MATEMATIČKO–FIZIČKI LIST (MFL) za učenike i nastavnike.
Izlazi u četiri broja tokom školske godine. Izdaju:
HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO i HRVATSKO FIZIKALNO DRUŠTVO
Pretplata za 2006./2007. je 60 kuna, pojedini broj stoji 15 kuna.
Za inozemstvo pretplata je 16 EUR, a pojedini broj 4 EUR.
(Uplata se može obaviti u kunama ili devizama po tečaju u trenutku plaćanja.)
Adresa lista je: "Matematičko–fizički list, Ilica 16/III, 10001 Zagreb,
tel./fax (01) 4833-891.
Uplate na žiro račun: *Hrvatsko fizikalno društvo,* Zagreb, br. 2360000-1101301202 (kune),
ZBZ d.d. SWIFT ZABA HRXX 70313-978-3239853 (EUR).
Na uplatnici kao svrhu uplate molimo naznačite "za MFL"!
Molimo Vas da kod svake uplate pošaljete (foto)kopiju uplatnice
ili da nas obavijestite telefonom ili elektronskom poštom o uplati.
URL: http://www.math.hr/mfl

SADRŽAJ

List financijski pomaže Ministarstvo znanosti, obrazovanja i športa Republike Hrvatske.

Slog i prijelom: Element, Zagreb, Menčetićeva 2
Tisak: Sveučilišna tiskara d.o.o., Zagreb, Trg maršala Tita 14
Naklada ovog broja 4000 primjeraka

Slika na naslovnici je prikazuje "dokaz bez riječi" relacija $3\Delta_n + \Delta_{n-1} = \Delta_{2n}$ i $3\Delta_n + \Delta_{n+1} = \Delta_{2n+1}$, gdje je $\Delta_n = 1 + 2 + \ldots + n$.

Dragi čitatelji!

Na početku smo nove školske godine u kojoj ćete u Matematičko-fizičkom listu ponovo moći čitati razne članke iz matematike i fizike, uz priloge iz astronomije, rješavati zadatke, čija rješenja možete slati u uredništvo MFL-a, a u jednom od sljedećih brojeva objavit ćemo vaša najbolja rješenja.

Bit će izvještaja s natjecanja iz matematike i fizike, kako onih u Hrvatskoj, tako i međunarodnih (Međunarodna matematička olimpijada, Međunarodna fizička olimpijada, Mediteransko matematičko natjecanje, Turnir gradova, Klokan bez granica, Međunarodni turnir mladih fizičara). U rubrici Novosti iz znanosti svaki put će biti riječi o nekoj aktualnoj znanstvenoj temi. Učenici koji su ove školske godine maturanti, spremat će se tokom cijele godine za polaganje prijemnog ispita na fakultetima, a u ovom časopisu redovno objavljujemo zadatke s kvalifikacijskih ispita na Matematičkom odjelu i Fizičkom odsjeku PMF-a, Fakultetu elektrotehnike i računarstva (FER), te na Ekonomskom fakultetu. Igra "Bridž", koja ima svoju redovnu stranicu u MFL-u, postaje sve popularnija, a na nekim fakultetima se predaje kao izborni kolegij. Na zadnjoj strani omota donosimo životopis nekog od naših poznatih fizičara i/ili matematičara. Također, objavljivat ćemo i učeničke radove, prikaz nekog zanimljivog natjecanja ili znanstvene ekskurzije.

U ovom broju ima niz zanimljivih priloga. Petar Vranjković, profesor iz Zadra, opisuje temu iz kombinatorike, *Razdioba različitih predmeta u različite kutije*. Zasigurno mnogi od vas imaju knjigu "Trokut i kružnica", za osnovne i srednje škole, a privukla je i pozornost profesora Zvonka Čerina s PMF-a u Zagrebu, koji je uočio da neke tvrdnje za trokute ne vrijede u svim slučajevima, već je potrebno napraviti malu ispravku da bi tvrdnja vrijedila i za tupokutne trokute. Studentica Eva Pavić i profesor Boško Šego s Ekonomskog fakulteta u Zagrebu u članku *Jedostavni kamatni račun* opisuju temu iz ekonomske matematike. Ovo može biti interesantno onima koji žele studirati na smjeru Financijska i poslovna matematika na PMF-u. Ima puno riješenih primjera i zadataka za vježbu. Drevna igra šah i dan-danas je jako popularna, ali ona je dosta zahtjevna čak i ako se koristi suvremena računalna tehnika. O tome koliko približno ima različitih partija možete saznati iz priloga *Konačnost šaha* od Siniše Režeka, profesora matematike iz Zagreba.

Ova godina se obilježava kao "godina Nikole Tesle" povodom 150-godišnjice njegova rođenja. O ovom velikom vizionaru i o jednom od njegovih mnogobrojnih otkrića, posebno o daljinskom upravljanju, saznat ćete u članku *Bežične komunikacije u patentima Nikole Tesle* od profesora Zvonimira Šipuša na FER-u.

Profesor u mirovini, Marijan Husak iz Varaždina, tokom svoje dugogodišnje nastavničke prakse na varaždinskoj gimnaziji priređivao je mnogobrojne fizikalne pokuse. Ovdje je na nekoliko primjera, u prilogu *Demonstriranje zakona očuvanja*, opisana eksperimentalna provjera tog zakona.

Na Zemlju dnevno padaju velike količine kamenja, od kojih većina izgori u atmosferi prije dodira s tlom, no mnogi primjerci su pronađeni i na tlu, a u ne tako davnoj prošlosti neki su bili katastrofalno veliki, o čemu Dario Hrupec s Instituta "Ruđer Bošković" piše u članku *Kamenje koje pada s neba*.

Uz još niz zanimljivih priloga prisjetili smo se Josipa Lukatele, gimnazijskog profesora matematike i fizike, jednog od vodećih stručnjaka u obrazovanju u drugoj polovici prošlog stoljeća, autora desetak udžbenika iz fizike za klasične gimnazije.

Uredništvo lista



Razdioba različitih predmeta u različite kutije

Petar Vranjković, Zadar

Često se u kombinatorici susrećemo s pitanjima: Na koliko je načina moguće 10 knjiga razmjestiti na 4 police? Na koliko je načina moguće 6 različitih čokolada podijeliti na troje djece? I slično.

Općenito: Na koliko je načina moguće n predmeta razmjestiti u r kutija?

U svakom slučaju ovo nije trivijalno pitanje, a neki problemi ovog tipa pokazali su se vrlo teški.

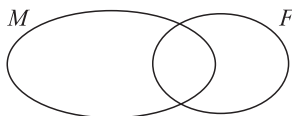
Postavljeno pitanje nije dovoljno jasno ni u pogledu predmeta, niti kutija. Naime, predmeti kao i kutije mogu biti jednaki ili različiti, a i uređaj predmeta, odnosno kutija valja uzeti u obzir. Ne ulazeći dublje, ovdje ćemo razmotriti samo jedan od mogućih problema, onaj iz naslova ovog članka. Valja još naglasiti da model razdiobe predmeta u kutije ima velike primjene u fizici.

U ovome ćemo članku koristiti formulu uključivanja-isključivanja (kratko FU-I), pa se najprije posvetimo tome.

Pretpostavlja se da čitatelji vladaju s temeljnim pojmovima o skupovima. U kombinatorici često treba naći broj elemenata unije nekoliko konačnih skupova. Pođimo od jednostavnih primjera.

Primjer 1. Grupa "matematičara" ima 14 učenika, grupa "fizičara" ima 10 učenika, a 8 učenika su uključeni u obje grupe. Koliko ima učenika koji su uključeni u barem jednu od te dvije grupe?

Rješenje. Ako je M skup "matematičara", a F skup "fizičara", onda je $M \cap F$ skup "matematičara" i "fizičara", pa treba naći broj elemenata skupa $M \cup F$ tj. $k(M \cup F)$. Prikažimo situaciju Euler-Vennovim dijagramom.



Lako je uočiti da u zbroju $k(M) + k(F)$ dva puta brojimo učenike koji su i "matematičari" i "fizičari". Prema tome vrijedi

$$K(M \cup F) = k(M) + k(F) - k(M \cap F)$$

odnosno

$$K(M \cup F) = 14 + 10 - 8 = 16.$$

Dokažimo općenito: Ako su A i B konačni skupovi, onda vrijedi

$$k(A \cup B) = k(A) + k(B) - k(A \cap B). \qquad (1)$$

Dokaz.

$$A \cup B = (A \setminus (A \cap B)) \cup B, \quad (A \setminus (A \cap B)) \cap B = \emptyset, \quad A \cap B \subseteq A,$$

$$\begin{aligned} k(A \cup B) &= k\,[(A \setminus (A \cap B)) \cup B] = k(A \setminus (A \cap B)) + k(B) \\ &= k(A) - k(A \cap B) + k(B), \end{aligned}$$

što je i trebalo dokazati.

Sada bismo mogli lako odrediti i $k(\overline{A} \cap \overline{B})$, gdje je $\overline{A} = S \setminus A$, a S je univerzalni skup $(A, B \subseteq S)$. Koristeći formulu (1) imamo

$$\begin{aligned} k(\overline{A} \cap \overline{B}) &= k((S \setminus A) \cap (S \setminus B)) = k(S \setminus (A \cup B)) = k(S) - k(A \cup B) \\ &= k(S) - k(A) - k(B) + k(A \cap B), \end{aligned} \tag{2}$$

tj.

$$k(\overline{A} \cap \overline{B}) = k(S) - k(A \cup B).$$

Primjer 2. Koliko ima prirodnih brojeva između 1 i 1 000 koji:

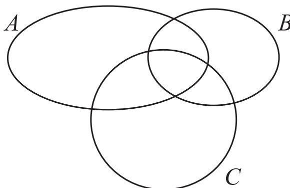
a) su djeljivi barem s jednim od brojeva 2, 3, 5?

b) nisu djeljivi niti s 2, niti s 3, niti s 5?

Rješenje.

a) Neka su A, B, C skupovi prirodnih brojeva između 1 i 1 000 koji su djeljivi redom s 2, 3, 5. Treba odrediti $k(A \cup B \cup C)$.

Evo dijagrama.



Nije teško uočiti da su u zbroju $k(A) + k(B) + k(C)$ dva puta uračunati brojevi koji se nalaze u presjeku točno dva od tri skupa A, B, C, a tri puta brojevi koji se nalaze u presjeku tri skupa. Prema tome mora vrijediti

$$k(A \cup B \cup C) = k(A) + k(B) + k(C) - k(A \cap B) - k(A \cap C) - k(B \cap C) + k(A \cap B \cap C). \tag{3}$$

Kako naći kardinalne brojeve skupova na desnoj strani te formule?

Ovdje ćemo koristiti očitu činjenicu da za $k, n \in \mathbf{N}$, $k \leqslant n$ u skupu $\{1, 2, \ldots, n\}$ ima točno $\left\lfloor \dfrac{n}{k} \right\rfloor$ brojeva djeljivih s k.

Prema tome imamo:

$$k(A) = \left\lfloor \frac{1\,000}{2} \right\rfloor = 500, \quad k(B) = \left\lfloor \frac{1\,000}{3} \right\rfloor = 333, \quad k(C) = \left\lfloor \frac{1\,000}{5} \right\rfloor = 200$$

$$k(A \cap B) = \left\lfloor \frac{1\,000}{6} \right\rfloor = 166, \quad k(A \cap C) = \left\lfloor \frac{1\,000}{10} \right\rfloor = 100,$$

$$k(B \cap C) = \left\lfloor \frac{1\,000}{15} \right\rfloor = 66, \quad k(A \cap B \cap C) = \left\lfloor \frac{1\,000}{30} \right\rfloor = 33.$$

Na temelju toga dobivamo

$$k(A \cup B \cup C) = 734.$$

b) Najprije imamo

$$k(S) = k(A \cup B \cup C) + k(\overline{A \cup B \cup C}),$$

pa prema jednoj De Morganovoj formuli izlazi

$$k(S) = k(A \cup B \cup C) + k(\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}),$$

odnosno

$$k(\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}) = k(S) - k(A \cup B \cup C).$$

Prema toj formuli u našem primjeru je

$$k(\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}) = 1\,000 - 734 = 266.$$

Dokažimo općenito: Ako su A, B, C konačni skupovi, onda vrijedi

$$k(A \cup B \cup C) = k(A) + k(B) + k(C) - k(A \cap B) - k(A \cap C) - k(B \cap C) + k(A \cap B \cap C).$$

Dokaz.

$$\begin{aligned} k(A \cup B \cup C) &= k\,[A \cup (B \cup C)] = k(A) + k(B \cup C) - k\,[A \cap (B \cup C)] \\ &= k(A) + k(B) + k(C) - k(B \cap C) - k\,[(A \cap B) \cup (A \cap C)] \\ &= k(A) + k(B) + k(C) - k(B \cap C) - k(A \cap B) - k(A \cap C) \\ &\qquad + k\,[(A \cap B) \cap (A \cap C)] \\ &= k(A) + k(B) + k(C) - k(A \cap B) - k(A \cap C) \\ &\qquad - k(B \cap C) + k(A \cap B \cap C). \end{aligned}$$

Navedeni primjeri (kao i poopćenja) su posebni slučajevi FU-I.

Poučak 1. (FU-I) Neka je S konačan skup, a $A_1, A_2, \ldots, A_n \subseteq S$, onda vrijedi:

$$\begin{aligned} k(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) &= k(A_1) + k(A_2) + \ldots + k(A_n) - k(A_1 \cap A_2) - k(A_1 \cap A_3) \\ &- \ldots - k(A_{n-1} \cap A_n) + k(A_1 \cap A_2 \cap A_3) + k(A_1 \cap A_2 \cap A_4) \\ &+ \ldots + k(A_{n-2} \cap A_{n-1} \cap A_n) - \ldots + (-1)^{n-1} k(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n). \end{aligned} \quad (4)$$

FU-I se može zapisati u ekvivalentnom obliku koji iskazujemo kao sljedeći poučak.

Poučak 2. Za podskupove $A_1, A_2, \ldots, A_n \subseteq S$ i $\overline{A_1} = S \setminus A_1$, $\overline{A_2} = S \setminus A_2, \ldots, \overline{A_n} = S \setminus A_n \subseteq S$ vrijedi

$$\begin{aligned} k(\overline{A_1} \cup \overline{A_2} \cup \ldots \cup \overline{A_n}) &= k(S) - k(A_1) - k(A_2) - \ldots - k(A_n) + k(A_1 \cap A_2) + k(A_1 \cap A_3) \\ &+ \ldots + k(A_{n-1} \cap A_n) - k(A_1 \cap A_2 \cap A_3) - k(A_1 \cap A_2 \cap A_4) \\ &- \ldots - k(A_{n-2} \cap A_{n-1} \cap A_n) + \ldots + (-1)^n k(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n). \end{aligned} \quad (5)$$

Iz De Morganovih formula slijedi da su **P1** i **P2** ekvivalentni:

1. $(\overline{A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n}) = \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \ldots \cap \overline{A_n}$
(Komplement unije jednak je presjeku komplementa.)

2. $(\overline{A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n}) = \overline{A_1} \cup \overline{A_2} \cup \ldots \cup \overline{A_n}$
(Komplement presjeka jednak je uniji komplemenata.)

Dokazi poučaka **P1** i **P2** mogu se provesti i matematičkom indukcijom po n. No taj se dokaz može provesti i jednostavnim kombinatornim rasuđivanjem.

Sada ćemo navesti poseban slučaj FU-I.

Neka su $A_1, A_2, \ldots, A_n \subseteq S$, za koje vrijede ovi uvjeti:

$$k(S) = N, \quad k(A_1) = k(A_2) = \ldots = k(A_n) = N_1,$$
$$k(A_1 \cap A_2) = k(A_1 \cap A_3) = \ldots = k(A_{n-1} \cap A_n) = N_2,$$
$$k(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = k(A_1 \cap A_2 \cap A_4) = \ldots = k(A_{n-2} \cap A_{n-1} \cap A_n) = N_3,$$
$$\vdots$$
$$k(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = N_n, \quad k(S \setminus (A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n)) = N_0.$$

Primijenimo li **P1** dobit ćemo:

1. $$k(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = \binom{n}{1} \cdot N_1 - \binom{n}{2} \cdot N_2 + \binom{n}{3} \cdot N_3 - \ldots + (-1)^{n-1} \cdot \binom{n}{n} \cdot N_n. \tag{6}$$

2. $$N_0 = N - \binom{n}{1} \cdot N_1 + \binom{n}{2} \cdot N_2 - \binom{n}{3} \cdot N_3 + \ldots + (-1)^n \cdot \binom{n}{n} \cdot N_n. \tag{7}$$

Vratimo se sada na naš temeljni problem, kojeg ćemo ilustrirati jednim jednostavnim primjerom.

Primjer 3.

a) Na koliko se načina može 5 različitih knjiga razmjestiti na 3 police p_1, p_2, p_3, pri čemu neke police mogu ostati i prazne?

b) Koliko ima tih razdioba ako na polici p_1 treba smjestiti 2 knjige, na p_2 jednu knjigu i na p_3 2 knjige?

Rješenje.

a) Ako uzmemo jednu knjigu, onda je možemo staviti na jednu od 3 police, a to se može uraditi na 3 načina. Drugu knjigu možemo opet staviti na 3 načina, treću knjigu možemo staviti također na 3 načina, četvrtu opet na 3 načina i najzad petu knjigu opet na 3 načina. Prema načelu umnoška, ukupan broj razdioba iznosi

$$3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^5 = 243.$$

b) U ovom slučaju nije važno kako su knjige razmještene na svakoj polici nego samo izbor knjiga za pojedine police. Dakle, dvije knjige za policu p_1 možemo izabrati na $\binom{5}{2}$ načina. Za policu p_2 jednu knjigu, od preostale 3 knjige, možemo izabrati na $\binom{3}{1}$ načina, a za policu p_3 dvije knjige od preostale dvije možemo izabrati na $\binom{2}{2}$ načina. Prema načelu umnoška broj traženih razdioba je

$$\binom{5}{2} \cdot \binom{3}{1} \cdot \binom{2}{2} = \frac{5 \cdot 4}{2!} \cdot \frac{3}{1!} \cdot \frac{1 \cdot 2}{2!} = \frac{5!}{1! \cdot 2! \cdot 2!} = 15.$$

Poopćenje.

a) Broj razdioba n različitih predmeta u r različitih kutija (ima kutija bez predmeta) iznosi

$$r^n. \tag{8}$$

b) Broj razdioba n različitih predmeta u r različitih kutija ako u prvoj kutiji mora biti točno n_1 predmeta, u drugoj točno n_2 predmeta, ... , u r-toj kutiji točno n_r predmeta, pri čemu vrijedi $n_1 + n_2 + \ldots + n_r = n$ iznosi

$$\frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_r!} \tag{9}$$

Dokaz.

a) Budući da su kutije različite, svakoj od njih pridijelimo ime. Predmete složimo u jedan niz i svakom od njih pridružimo jedno od r različitih imena kojima smo označili kutije. Broj takvih pridruživanja (razdioba) jest

$$r \cdot r \cdot \ldots \cdot r = r^n.$$

b) Među n različitih predmeta n_1 predmeta za prvu kutiju možemo izabrati na $\binom{n}{n_1}$ načina. Među preostalih $n - n_1$ predmeta, n_2 predmeta za drugu kutiju možemo izabrati na $\binom{n-n_1}{n_2}$ načina, itd. Prema načelu umnoška, ukupan broj razdioba iznosi

$$\binom{n}{n_1} \cdot \binom{n-n_1}{n_2} \cdot \ldots \cdot \binom{n_{r-1}+n_r}{n_{r-1}} \cdot \binom{n_r}{n_r}.$$

Ako svaki od binomnih koeficijenata ovog umnoška napišemo prema definiciji onda imamo:

$$\frac{n!}{n_1!(n-n_1)!} \cdot \frac{(n-n_1)!}{n_2!(n-n_1-n_2)!} \cdot \ldots \cdot \frac{(n_{r-1}-n_r)!}{n_{r-1}! \cdot n_r!} \cdot \frac{n_r!}{n_r! \cdot 0!}.$$

Nakon skraćivanja i sređivanja dobijemo konačan oblik

$$\frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_r!}.$$

Razdioba može biti i složenija kao u primjeru 4.

Primjer 4. Na koliko se načina može 3 različite knjige razmjestiti na 2 police p_1 i p_2 tako da na svakoj polici bude smještena barem jedna knjiga?

Rješenje. Najprije zadovoljimo uvjet, a to znači da na svaku policu stavimo po jednu knjigu. To se može uraditi na više načina budući da su knjige različite. Za policu p_1 jednu knjigu možemo izabrati na 3 načina, a za policu p_2 na dva načina. To znači da je prema načelu umnoška ukupan broj izbora jednak $3 \cdot 2 = 6$.

Ali kada na svaku policu stavimo po jednu knjigu, onda treća preostala knjiga može ići na policu p_1 ili p_2 što znači da se može razmjestiti na dva načina. Dakle ukupan broj razdioba iznosi $(3 \cdot 2) \cdot 2 = 12$. Međutim, broj svih mogućih razdioba 3 različite knjige na 2 različite police iznosi, prema formuli (8), $2^3 = 8 < 12$. To je paradoks. Točnije, napravljena je pogreška. Gdje? Neke su se razdiobe brojale više puta. Otkrijmo to!

Najprije ćemo složiti sve moguće razdiobe. Radi jednostavnosti označimo knjige s k_1, k_2 i k_3. Onda

p_1	k_1, k_2, k_3	k_1, k_2	k_1, k_3	k_2, k_3	k_1	k_2	k_3	
p_1		k_3	k_2	k_1	k_2, k_3	k_1, k_3	k_1, k_2	k_1, k_2, k_3

Sada lako možemo pročitati i rješenje: 6. Pogledajmo sada razdiobu iz koje je proizišla pogreška.

p_1	1. razdioba	k_1	k_1	k_1	k_1	k_2	k_2	k_2	k_2	k_3	k_3	k_3	k_3
	2. razdioba	k_3		k_2		k_3		k_1		k_2		k_1	
p_2	1. razdioba	k_2	k_2	k_3	k_3	k_1	k_1	k_3	k_3	k_1	k_1	k_2	k_2
	2. razdioba		k_3		k_2		k_3		k_1		k_2		k_1

To je "onih" 12 izračunatih razdioba. No sada možemo uočiti da su neke razdiobe jednake, točnije da smo svaku razdiobu brojili 2 puta. Npr. na policu p_1 smo stavili knjigu k_1, na p_2 knjigu k_2, a zatim na p_1 knjigu k_3. To je isto kao da smo na policu p_1 stavili knjigu k_3, na p_2 knjigu k_2 a zatim na p_1 knjigu k_1. Itd.

Time je jasno da tako izvršena razdioba nije dobra. U ovome primjeru smo se još mogli "spasiti" tako da ukupan broj razdioba podijelimo s 2. Naravno da to ne dolazi u obzir ako bismo imali razdiobu više od tri knjige na više od dvije police. Ovo samo ukazuje na činjenicu da ovaj problem treba riješiti općenito. Pa riješimo ga!

Neka je S skup svih razdioba n različitih predmeta u r različitih kutija. Nadalje, neka je A skup svih onih razdioba u kojima svaka kutija sadrži barem jedan predmet. Onda je $\overline{A}$ skup svih onih razdioba u kojima barem jedna kutija ne sadrži niti jedan predmet. Prema tome vrijedi:

$$S = A \cup \overline{A}, \quad A \cap \overline{A} = \emptyset$$

odnosno

$$k(S) = k(A) + k(\overline{A}),$$

pa je

$$k(A) = k(S) - k(\overline{A}).$$

Prema formuli (8) imamo

$$k(S) = r^n.$$

Valja još naći $k(\overline{A})$.

Najprije jedna kutija (bilo koja) ne sadrži niti jedan predmet. Tu kutiju možemo izabrati na $\binom{r}{1}$ načina. Tada n različitih predmeta treba razmjestiti u $r-1$ kutija. Prema (8) takvih razdioba ima $(r-1)^n$. Najzad, ukupan broj razdioba u kojima jedna kutija ne sadrži niti jedan predmet iznosi $\binom{r}{1} \cdot (r-1)^n$.

Sada dvije kutije (bilo koje) ne sadrže niti jedan predmet. Te dvije kutije možemo izabrati na $\binom{r}{2}$ načina. Onda n različitih predmeta treba razmjestiti u $r-2$ kutije, a to možemo uraditi na $(r-2)^n$ načina. Ukupan broj razdioba u kojima dvije kutije ne sadrže niti jedan predmet iznosi $\binom{r}{2} \cdot (r-2)^n$, itd. Na kraju, $r-1$ kutija ne sadrži niti jedan predmet. Tih $r-1$ kutija možemo izabrati na $\binom{r}{r-1}$ načina. Tada n različitih predmeta treba razmjestiti u $r-(r-1)=1$ kutiju što se može uraditi na 1^n načina, pa ukupan broj razdioba u kojima $r-1$ kutija ne sadrži niti jedan predmet iznosi $\binom{r}{r-1} \cdot 1^n$.

Primjenom FU-I imamo

$$k(A) = r^n - \binom{r}{1}(r-1)^n + \binom{r}{2}(r-2)^n - \binom{r}{3}(r-3)^n + \ldots + (-1)^r \binom{r}{r-1} \cdot 1^n. \quad (10)$$

Sada primjer 4. možemo riješiti pomoću formule (10). Dakle, $n=3$, $r=2$, pa je

$$k(A) = 2^3 - \binom{2}{1} \cdot 1^3 = 8 - 2 = 6,$$

a to smo dobili pomoću tablice.

Zadatak. Na koliko načina 5 različitih knjiga možemo razmjestiti na 3 police ako na svaku policu treba smjestiti barem jednu knjigu?

Rješenje. Sada je $n=5$, $r=3$, pa prema (10) izlazi

$$k(A) = 3^5 - \binom{3}{1}(3-1)^5 + \binom{3}{2}(3-2)^5 = 150.$$

Problemi s ortocentrom, I

Zvonko Čerin[1], *Zagreb*

U članku se prikazuju tri teorema o ortocentru iz knjige "Trokut i kružnica" profesora Dominika Palmana koji vrijede samo za šiljastokutne trokute. Pokazuje se da za tupokutne trokute treba izmijeniti jedan predznak u danim formulama da bi one postale točne i u ovom slučaju.

Prvi problem o ortocentru

U knjizi "Trokut i kružnica" na 92. stranici u teoremu 11.10 tvrdi se sljedeće:

Teorem 1. *Neka su D, E i F ortogonalne projekcije vrhova trokuta ABC na pravce njegovih stranica $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ i $\overline{AB}$. Neka je R radijus opisane kružnice tog trokuta. Udaljenost $|OH|$ između njegovog središta opisane kružnice O i ortocentra H dana je s*

$$|OH|^2 = R^2 - 2 \cdot |AH| \cdot |HD|, \tag{1a}$$

$$|OH|^2 = R^2 - 2 \cdot |BH| \cdot |HE|, \tag{1b}$$

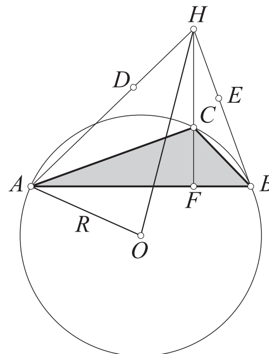
$$|OH|^2 = R^2 - 2 \cdot |CH| \cdot |HF|. \tag{1c}$$

ili s

$$|OH|^2 = 9\,R^2 - (a^2 + b^2 + c^2). \tag{2}$$

Očito je da formule (1a), (1b) i (1c) nisu ispravne jer bi iz njih slijedilo da udaljenost $|OH|$ ne može biti veća od R (tj. da ortocentar trokuta uvijek leži unutar njegove opisane kružnice) što za tupokutne trokute ne vrijedi. U to se možemo uvjeriti i tako da na računalu u programu The Geometer's Sketchpad (ili kratko GSP) nacrtamo trokut ABC, točke D, E, F (nožišta visina), središte opisane kružnice O, ortocentar H, odredimo sve dužine koje se pojavljuju u gornjim formulama i izračunamo razlike (npr. $|OH|^2 + 2 \cdot |AH| \cdot |HD| - R^2$). Kada mičemo točke nije točno da su razlike uvijek jednake nuli. Čim je trokut ABC tupokutan dobivamo isti pozitivan broj za sve tri razlike (vidi sliku 1).

$R = 5.50096$ cm, $|OH| = 9.11062$ cm,
$|AH| = 10.41783$ cm, $|HD| = 2.53137$ cm,
$|BH| = 7.04443$ cm, $|HE| = 3.74358$ cm,
$|CH| = 3.95347$ cm, $|HF| = 6.67044$ cm,
$(|OH|^2 + 2\,|AH|\,|HD|) - R^2 = 105.48549\ \text{cm}^2$,
$(|OH|^2 + 2\,|BH|\,|HE|) - R^2 = 105.48549\ \text{cm}^2$,
$(|OH|^2 + 2\,|CH|\,|HF|) - R^2 = 105.48549\ \text{cm}^2$.



Slika 1. Za tupokutan trokut ABC formule (1a)–(1c) ne vrijede.

[1] Autor je redoviti profesor na Matematičkom odjelu Prirodoslovno-matematičkog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu

Kako se izvući iz ovih poteškoća? Moramo koristiti relativne mjerne brojeve dužina umjesto njihovih duljina (vidi stranicu 3 u [5]). Ako je $[AB]_l$ oznaka za relativni mjerni broj dužine $\overline{AB}$ na orijentiranom pravcu l, onda ispravljeni prvi dio teorema 11.10 iz [5] glasi ovako:

Teorem 2. *Udaljenost $|OH|$ između središta opisane kružnice O i ortocentra H trokuta ABC je*

$$|OH|^2 = R^2 - 2 \cdot [AH]_{AH} \cdot [HD]_{AH}, \tag{1a*}$$

$$|OH|^2 = R^2 - 2 \cdot [BH]_{BH} \cdot [HE]_{BH}, \tag{1b*}$$

$$|OH|^2 = R^2 - 2 \cdot [CH]_{CH} \cdot [HF]_{CH}. \tag{1c*}$$

Za dokaz ovog teorema koristit ćemo sljedeće dvije leme.

Lema 1. *(a) Kut C je veći od 90° onda i samo onda ako je točka F između točaka A i B i ortocentar H je izvan dužine $\overline{CF}$.*

(b) Ako je kut C veći od 90° onda točka D leži između točaka A i H i točka E leži između točaka B i H.

Dokaz. Odaberimo pravokutni koordinatni sustav tako da je $A(0,0)$, $B(r(f+g),0)$ i $C\left(\frac{(f^2-1)gr}{fg-1}, \frac{2fgr}{fg-1}\right)$. Parametri f i g su kotangensi polovica kutova A i B dok je r radijus upisane kružnice trokuta ABC. Primijetimo da su f, g i r povezani s duljinama stranica a, b i c ovako

$$f = \frac{(a+b+c)\,(b+c-a)}{4S}, \quad g = \frac{(a+b+c)\,(a-b+c)}{4S}, \quad r = \frac{2S}{a+b+c},$$

gdje je

$$S = \frac{\sqrt{(a+b+c)\,(b+c-a)\,(c+a-b)\,(a+b-c)}}{4}.$$

Obrnuto,

$$a = \frac{rf(g^2+1)}{fg-1}, \quad b = \frac{rg(f^2+1)}{fg-1}, \quad c = r(f+g).$$

Ovakav odabir koordinata točaka i način dokazivanja uz pomoć računala koji ćemo stalno koristiti detaljno su objašnjeni u sljedećim člancima [2], [3], [4] i [1].

(a) Koordinate točaka D, E, F, H i O su

$$\left(\frac{4g^2r(f+g)}{(g^2+1)^2}, \frac{2gr(f+g)(g^2-1)}{(g^2+1)^2}\right), \left(\frac{r(f+g)(f^2-1)^2}{(f^2+1)^2}, \frac{2fr(f+g)(f^2-1)}{(f^2+1)^2}\right),$$

$$\left(\frac{gr(f^2-1)}{fg-1}, 0\right), \left(\frac{gr(f^2-1)}{fg-1}, \frac{r(f^2-1)(g^2-1)}{2(fg-1)}\right)$$

$$\text{i} \quad \left(\frac{r(f+g)}{2}, \frac{r(f+g+fg-1)(f+g-fg+1)}{4(fg-1)}\right).$$

Odredimo realni broj w u kojem točka F dijeli dužinu $\overline{AB}$. Drugačije rečeno, treba odrediti broj w tako da je $\frac{x_A+wx_B}{1+w} = x_F$ i $\frac{y_A+wy_B}{1+w} = y_F$, gdje su x_P i y_P prva i druga koordinata točke P. Dobije se $w = \frac{b^2+c^2-a^2}{a^2+c^2-b^2}$. Slično se pokazuje da ortocentar H dijeli dužinu $\overline{CF}$ u omjeru $v = \frac{2c^2(a^2+b^2-c^2)}{(b^2+c^2-a^2)(a^2+c^2-b^2)}$.

Ako je kut C veći od $90°$ onda je broj $a^2 + b^2 - c^2$ negativan a brojevi $b^2 + c^2 - a^2$ i $a^2 + c^2 - b^2$ su pozitivni. Dakle, broj w je pozitivan i točka F leži između A i B. S druge strane, broj v je negativan pa je ortocentar H izvan dužine $\overline{CF}$.

Obrnuto, ako točka F leži između točaka A i B i ortocentar H je izvan dužine $\overline{CF}$ onda je $w > 0$ i $v < 0$ što vodi na zaključak da je $a^2 + b^2 - c^2 < 0$ pa je kut C veći od $90°$.

(b) Ako je kut C veći od $90°$ onda je broj $a^2 + b^2 - c^2$ negativan a brojevi $b^2 + c^2 - a^2$ i $a^2 + c^2 - b^2$ su pozitivni. Budući da točke D i E dijele dužine $\overline{AH}$ i $\overline{BH}$ u pozitivnim omjerima $\frac{16S^2}{(c^2+a^2-b^2)(c^2-a^2-b^2)}$ i $\frac{16S^2}{(b^2+c^2-a^2)(c^2-a^2-b^2)}$ zaključujemo da točka D leži između A i H i da točka E leži između B i H. □

Lema 2. *Ortocentar H je unutar, na ili izvan opisane kružnice trokuta ABC već prema tome da li je taj trokut šiljastokutan, pravokutan ili tupokutan.*

Dokaz. Izračunamo li $R^2 - |OH|^2$ dobivamo $\frac{(b^2+c^2-a^2)(c^2+a^2-b^2)(a^2+b^2-c^2)}{16S^2}$. Dakle, ako je H unutar opisane kružnice onda je $R > |OH|$, pa je gornja razlika pozitivna što je moguće jedino ako su sve tri zagrade u brojniku pozitivne tj. ako je ABC šiljastokutan. Obrat očito također vrijedi.

Ako je H na opisanoj kružnici (tj. $R = |OH|$) onda jedna od zagrada u brojniku mora biti nula što povlači da je trokut pravokutan. I to zaključivanje se očigledno također može obrnuti.

I na kraju, ako je ortocentar H izvan opisane kružnice onda je $|OH| > R$. Tada brojnik gornjeg izraza mora biti negativan što je moguće jedino ako je jedna od njegovih zagrada negativna a ostale dvije su pozitivne. Dakle, tada je trokut tupokutan.

Obrnuto, ako je trokut ABC tupokutan samo jedna od zagrada je negativna a preostale dvije su pozitivne. Tada je $|OH| > R$, pa ortocentar H leži izvan opisane kružnice.

□

Dokaz teorema 2. Neka pravac visine AH siječe opisanu kružnicu osim u točki A još i u točki D_0.

Ako je trokut ABC šiljastokutan, onda njegov ortocentar H leži unutar opisane kružnice. Potencija točke H obzirom na tu opisanu kružnicu iznosi $|AH| \cdot |HD_0| = R^2 - |OH|^2$. Kako prema teoremu 11.1 u [5] vrijedi $|HD_0| = 2 \cdot |HD|$, gornja jednakost postaje $|AH| \cdot 2 \cdot |HD| = R^2 - |OH|^2$. Kako u šiljastokutnom trokutu ortocentar H leži na dužini $\overline{AD}$, vrijedi $|AH| = [AH]_{AH}$ i $|HD| = [HD]_{AH}$, što odmah povlači relaciju (1a*).

Ako je trokut ABC pravokutan onda se ortocentar nalazi u jednom od vrhova i dvije od točaka D, E i F su također u tom vrhu, a središte opisane kružnice je u polovištu nasuprotne stranice i vrijedi $|OH| = R$. Zbog toga su produkti $2 \cdot [AH]_{AH} \cdot [HD]_{AH}$, $2 \cdot [BH]_{BH} \cdot [HE]_{BH}$ i $2 \cdot [CH]_{CH} \cdot [HF]_{CH}$ jednaki nuli i formule (1a*) – (1c*) vrijede.

Ako je trokut ABC tupokutan onda je ortocentar H izvan opisane kružnice. Dakle, njegova potencija s obzirom na opisanu kružnicu iznosi $|AH| \cdot |HD_0| = |OH|^2 - R^2$. Kao i malo prije za šiljastokutne trokute, lijeva strana je $2 \cdot |AH| \cdot |HD|$. S druge strane, prema lemi 1, $[AH]_{AH} = |AH|$ i $[HD]_{AH} = -|HD|$ pa opet dobivamo formulu (1a*). Formule (1b*) i (1c*) se dobivaju slično.

□

Napomena. *(a)* Drugi način popravka prvog dijela teorema 1 je

$$\frac{||HO|^2 - R^2|}{2} = |AH| \cdot |HD| = |BH| \cdot |HE| = |CH| \cdot |HF|.$$

Mana tog oblika je što njime nemamo eksplicitni izraz za udaljenost $|HO|$ ortocentra od središta opisane kružnice.

(b) Uz pomoć računala lagano se može dokazati sljedeći obrat formule iz *(a)*. Prisjetimo se da za točku P presjeke pravaca AP, BP i CP redom s pravcima BC, AC i AB označavamo s aP, bP i cP.

Teorem 3. *Neka trokut ABC nije pravokutan. Njegov ortocentar H je jedina točka P ravnine različita od vrhova A, B i C za koju vrijedi*

$$\frac{||PO|^2 - R^2|}{2} = |AP| \cdot |P\,aP| = |BP| \cdot |P\,bP| = |CP| \cdot |P\,cP|.$$

Drugi problem o ortocentru

U idućem teoremu 11.11 iz knjige [5] imamo:

Teorem 4. *Neka su D, E i F ortogonalne projekcije vrhova trokuta ABC na pravce njegovih stranica BC, CA i AB. Neka je R radijus opisane kružnice tog trokuta a r radijus njemu upisane kružnice. Udaljenost $|IH|$ između njegovog središta upisane kružnice I i ortocentra H dana je s*

$$|IH|^2 = 2r^2 - |AH| \cdot |HD|, \tag{3a}$$

$$|IH|^2 = 2r^2 - |BH| \cdot |HE|, \tag{3b}$$

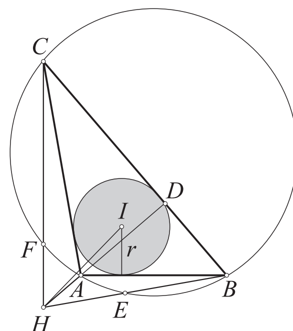
$$|IH|^2 = 2r^2 - |CH| \cdot |HF|. \tag{3c}$$

ili s

$$|IH|^2 = 2(r^2 + 2R^2) - \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2). \tag{4}$$

Očito je da formule (3a), (3b) i (3c) nisu ispravne jer bi iz njih slijedilo da udaljenost $|IH|$ ne može biti veća od $r\sqrt{2}$ što za tupokutne jednakokračne trokute kod kojih je ortocentar udaljen od vrha tupog kuta za više od $r\sqrt{2}$, ne vrijedi. U to se možemo uvjeriti i tako da na računalu u GSP-u nacrtamo trokut ABC, točke D, E, F, zatim središte upisane kružnice I i ortocentar H, a onda odredimo sve dužine koje se pojavljuju u gornjim formulama i izračunamo razlike (npr. $|IH|^2 + |AH| \cdot |HD| - 2\,r^2$). Kada pomičemo točke nije točno da su te razlike uvijek jednake nuli. Čim je trokut ABC tupokutan gornje razlike nisu nule već su sve tri jednake istom pozitivnom broju (vidi sliku 2).

$|AH| = 1.99664$ cm, $|HD| = 4.17779$ cm.
$|BH| = 4.72907$ cm, $|HE| = 1.76338$ cm.
$|CH| = 5.86216$ cm, $|HF| = 1.42294$ cm.
$|IH| = 3.20315$ cm, $r = 0.97945$ cm.
$(|IH|^2 + |AH| \cdot |HD|) - 2r^2 = 16.68305\ \text{cm}^2$,
$(|IH|^2 + |BH| \cdot |HE|) - 2r^2 = 16.68305\ \text{cm}^2$,
$(|IH|^2 + |CH| \cdot |HF|) - 2r^2 = 16.68305\ \text{cm}^2$.



Slika 2. Ako je kut A tup formule (3a) – (3c) ne vrijede.

Ako se prisjetimo načina kako smo riješili problem u prvom teoremu, dolazimo na ideju da ispravak prvog dijela formuliramo ovako:

Teorem 5. *(Popravljeni prvi dio teorema 11.11 iz [5].) Udaljenost $|IH|$ između središta upisane kružnice I i ortocentra H trokuta ABC je dana s*

$$|IH|^2 = 2r^2 - [AH]_{AH} \cdot [HD]_{AH}, \tag{3a*}$$

$$|IH|^2 = 2r^2 - [BH]_{BH} \cdot [HE]_{BH}, \tag{3b*}$$

$$|IH|^2 = 2r^2 - [CH]_{CH} \cdot [HF]_{CH}. \tag{3c*}$$

Dokaz. Po teoremu 2 imamo

$$[AH]_{AH} \cdot [HD]_{AH} = [BH]_{BH} \cdot [HE]_{BH} = [CH]_{CH} \cdot [HF]_{CH} = \frac{R^2 - |OH|^2}{2}.$$

Dakle, dovoljno je pokazati

$$2|IH|^2 - |OH|^2 + R^2 = 4r^2. \tag{*}$$

Budući da središte upisane kružnice I ima koordinate (fr, r) a koordinate središta opisane kružnice O i orthocentra H znamo iz dokaza prvog dijela leme 1, lako izračunamo uz pomoć računala da je $|IH|^2 = \frac{r^2 M_1}{4(fg-1)^2}$, $|OH|^2 = \frac{r^2 M_2}{16(fg-1)^2}$ i $R^2 = \frac{r^2 M_3}{16(fg-1)^2}$, gdje su M_1, M_2 i M_3 polinomi $f^4g^4 - 2f^4g^2 - 4f^3g^3 - 2f^2g^4 + f^4 + 4f^3g + 12f^2g^2 + 4fg^3 + g^4 - 2f^2 - 20fg - 2g^2 + 9$, $9f^4g^4 - 14f^4g^2 - 32f^3g^3 + 9f^4 - 14f^2g^4 + 32f^3g + 36f^2g^2 + 32fg^3 + 9g^4 - 14f^2 - 32fg - 14g^2 + 9$ i $(f^2+1)^2(g^2+1)^2$. Jednakost (*) je posljedica relacije $8M_1 - M_2 + M_3 = 64(fg-1)^2$ koju dokazujemo lagano jer se radi o jednostavnim operacijama s polinomima.

□

Napomena. *(a)* Drugi način popravka prvog dijela teorema 4 je da stavimo $||HI|^2 - 2r^2| = |AH| \cdot |HD| = |BH| \cdot |HE| = |CH| \cdot |HF|$. Loša strana tog oblika je da nemamo eksplicitni izraz za udaljenost $|HI|$ ortocentra od središta upisane kružnice.

(b) Na računalu se lagano dokazuje ovaj obrat formule iz *(a)*. Za pojašnjenje oznaka aP, bP i cP vidi napomenu iza teorema 2.

Teorem 6. *Ortocentar H je jedina točka P ravnine trokuta ABC za koju vrijedi ova trostruka jednakost:*

$$||PI|^2 - 2r^2| = |AP| \cdot |P\,aP| = |BP| \cdot |PbP| = |CP| \cdot |PcP|.$$

Treći problem o ortocentru

I idući teorem 11.12 knjige [5] ima slične poteškoće. U njemu se tvrdi sljedeće:

Teorem 7. *Zbroj udaljenosti ortocentra H od vrhova danog trokuta ABC jednak je dvostrukom zbroju promjera opisane i upisane kružnice toga trokuta,*

$$|HA| + |HB| + |HC| = 2(R + r). \tag{4}$$

Zbroj udaljenosti središta O opisane kružnice od stranica danog trokuta ABC (tj. do polovišta stranica A', B' i C' jednaka je zbroju polumjera opisane i upisane kružnice,

$$|OA'| + |OB'| + |OC'| = R + r. \tag{5}$$

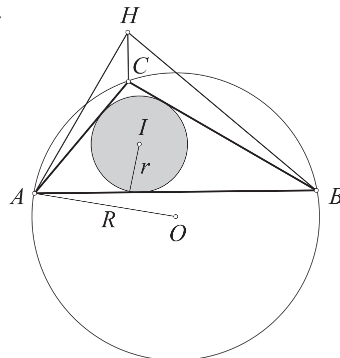
Prvi dio iskaza teorema sadrži pogrešku jer je promjer kružnice jednak dvostrukom njenom polumjeru. Dakle, trebalo bi zapravo reči: "... jednak je zbroju promjera opisane i upisane kružnice tog trokuta" (tj. treba izbaciti riječ "dvostrukom"). Pogrešna tvrdnja izražena formulom (5) dana je u knjizi [5] pod nazivom Carnotov teorem već ranije na 78. stranici.

Ako na računalu u GSP-u nacrtamo trokut ABC, središta I i O upisane i opisane kružnice, ortocentar H, odredimo sve duljine koje se pojavljuju u formuli (4) i izračunamo razliku

$$|HA| + |HB| + |HC| - 2(R + r),$$

kada mičemo točke nije točno da je ona uvijek jednaka nuli. Čim je trokut ABC tupokutan gornja razlika nije jednaka nuli (vidi sliku 3).

$|HA| = 4.34046\,\text{cm}$, $|HB| = 7.04751\,\text{cm}$,
$|HC| = 1.77803\,\text{cm}$,
$R = 3.78477\,\text{cm}$, $r = 1.02020\,\text{cm}$,
$(|HA| + |HB| + |HC|) - 2 \cdot (R + r) = 3.55607\,\text{cm}$,
$(-|HA| + |HB| + |HC|) - 2 \cdot (R + r) = -5.12485\,\text{cm}$,
$((|HA| - |HB|) + |HC|) - 2 \cdot (R + r) = -10.53895\,\text{cm}$,
$(|HA| + |HB|) - |HC| - 2 \cdot (R + r) = 0\,\text{cm}$.



Slika 3. Ako je kut C tup, formula (4) ne vrijedi, ali vrijedi jednakost
$|HA| + |HB| - |HC| = 2(R + r)$.

Promotrimo li malo pažljivije dobivene brojeve u slučaju da je neki kut tup vidimo da gornju razliku treba smanjiti što nas navodi na ideju da ispravak formuliramo ovako:

Teorem 8. *(Popravljeni teorem 11.12 iz [5].) (a) Trokut ABC nije tupokutan onda i samo onda ako je zbroj udaljenosti ortocentra H od vrhova jednak zbroju promjera opisane i upisane kružnice tog trokuta,*

$$|HA| + |HB| + |HC| = 2(R + r). \tag{4*}$$

(b) Trokut ABC nije tupokutan onda i samo onda ako je zbroj udaljenosti središta opisane kružnice O od polovišta stranica jednak zbroju polumjera opisane i upisane kružnice tog trokuta,

$$|OA'| + |OB'| + |OC'| = R + r. \tag{5*}$$

(c) Trokut ABC nema šiljasti kut u vrhu C onda i samo onda ako je

$$|HA| + |HB| - |HC| = 2(R + r). \tag{4c}$$

(d) Trokut ABC nema šiljasti kut u vrhu C onda i samo onda ako je

$$|OA'| + |OB'| - |OC'| = R + r. \tag{5c}$$

Dokaz. Kako u trokutu najviše jedan kut može biti veći ili jednak 90° možemo pretpostaviti da su kutovi A i B šiljasti. U odabiru koordinata pomoću veličina f, g i r (kotangensi kutova $\frac{A}{2}$ i $\frac{B}{2}$ i polumjer upisane kružnice) zato možemo uzeti da je $f > 1$ i $g > 1$. Lagano se izračuna da je $|HA| = \frac{r(f^2-1)(g^2+1)}{2(fg-1)}$, $|HB| = \frac{r(f^2+1)(g^2-1)}{2(fg-1)}$, $|HC| = \frac{r(fg+f+g-1)|fg-f-g-1|}{2(fg-1)}$ i $R = \frac{r(f^2+1)(g^2+1)}{4(fg-1)}$.

(a) Ako trokut ABC nije tupokutan, onda prema dolje dokazanoj lemi 3, udaljenost $|HC|$ je jednaka $\frac{r(fg+f+g-1)(f+g-fg+1)}{2(fg-1)}$. Sada se uvrštavanjem gornjih prikaza lagano provjeri da je $|HA|+|HB|+|HC|=2(R+r)$.

Obrnuto, ako se u jednakost $|HA|+|HB|+|HC|=2(R+r)$ za $|HA|$, $|HB|$ i R uvrste gornje vrijednosti i riješi po $|HC|$ dobije se $|HC|=\frac{r(g+f+fg-1)(f+g-fg+1)}{2(fg-1)}$. Usporedbom s gornjim izrazom za $|HC|$ vidimo da izraz $fg-f-g-1$ nije pozitivan pa prema lemi 3 slijedi da kut C nije tup (tj. da trokut ABC nije tupokutan).

Budući da su zbog jednakosti $|AH|=2\cdot|OA'|$, $|BH|=2\cdot|OB'|$ i $|CH|=2\cdot|OC'|$ (vidi teorem 11.5 u [5]) tvrdnje *(b)* i *(d)* očigledno ekvivalentne tvrdnjama *(a)* i *(c)*, mi ćemo još samo dokazati tvrdnju *(c)*.

(c) Ako kut C nije šiljast, onda je prema lemi 3 udaljenost $|HC|$ jednaka $\frac{r(fg+f+g-1)(fg-f-g-1)}{2(fg-1)}$. Sada odmah slijedi $|HA|+|HB|-|HC|=2(R+r)$.

Obrnuto, ako se u jednakost $|HA|+|HB|-|HC|=2(R+r)$ za $|HA|$, $|HB|$ i R uvrste gornje vrijednosti i riješi po $|HC|$ dobije se $|HC|=\frac{r(g+f+fg-1)(fg-f-g-1)}{2(fg-1)}$. Jer je $|HC|\geqslant 0$ vidimo da je $fg-f-g-1\geqslant 0$.

Ako je $fg-f-g-1=0$ onda je $c^2=a^2+b^2$ pa je prema Pitagorinom teoremu kut c pravi.

Ako je $fg-f-g-1>0$ onda prema lemi 3 slijedi da je kut C tup (tj. da je trokut ABC tupokutan).

Dakle, u svakom slučaju, kut C nije šiljast. □

Lema 3. *Trokut ABC ima tupi kut u vrhu C onda i samo onda ako je izraz* $\operatorname{ctg}\frac{A}{2}\operatorname{ctg}\frac{B}{2}-\operatorname{ctg}\frac{A}{2}-\operatorname{ctg}\frac{B}{2}-1$ *pozitivan.*

Dokaz. Gornji trigonometrijski izraz je zapravo $fg-f-g-1$ koji, kada se prikaže pomoću duljina stranica, postaje $\frac{c(4S+c^2-(a+b)^2)}{2S(a+b-c)}$. To će biti pozitivno onda i samo onda ako je $4S>(a+b+c)(a+b-c)$. Jer je $4S=\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}$, vidimo da je gornji izraz pozitivan onda i samo onda ako je $c^2-a^2-b^2>0$ što je očito ekvivalentno s tvrdnjom da je kut C tup. □

Malo proširena elektronička verzija oba dijela ovog članka izaći će uskoro na adresi `web.math.hr/~mathe/`.

Literatura

[1] M. Bator, Z. Čerin, M. Ćulav, *Analitička geometrija ravnine računalom*, Matematičko-fizički list (Zagreb), 54 br. 1,(2003/2004), 26–36.

[2] Z. Čerin, S. Vlah, *Rješavanje zadataka računalom*, Matka (Zagreb), 10 (2001./2002.), br. 39, 198–202.

[3] Z. Čerin, S. Vlah, *Primjeri upotrebe računala kod rješavanja zadataka*, Matematičko-fizički list (Zagreb), 52 br. 4, (2001/2002), 254–261.

[4] Z. Čerin, S. Vlah, *Još jedno rješenje drugog zadatka na 42. MMO 2001 g.*, Matematičko-fizički list (Zagreb), 53 br. 1, (2002/2003), 55–56.

[5] Dominik Palman, *Trokut i kružnica*, Element, Zagreb 1994.

Jednostavni kamatni račun

Eva Pavić[1], *Boško Šego*[2], *Zagreb*

Uobičajeno je da se kamate vežu uz novac. Pri tome se zaboravlja naturalni kredit, koji je postojao i prije pojave novca. Naime, posudba nekog dobra nekada se "ugovarala" uz obvezu da dužnik vrati istu količinu posuđenog dobra uvećanu za neki postotak. Tako se u starim sumerskim dokumentima iz vremena oko 3000. godine prije Krista (dakle, prije nekih 5000 godina) ukazuju na sustavnu upotrebu kredita koji je nastajao iznajmljivanjem žita u prostornim jedinicama i metala u težnim jedinicama. Često su te posudbe donosile kamate. Na primjer, ako je vjerovnik na godinu dana posudio nekome 1 000 kilograma pšenice, dužnik je preuzimao obvezu da nakon godinu dana vrati primjerice 1 050 kilograma. Dakle, dužnik se obvezivao vratiti 50 kg više nego što je posudio. U odnosu na dug (uobičajeno se kaže – glavnicu), vratio je 5% više, jer je

$$\frac{1\,050 - 1\,000}{1\,000} \cdot 100\% = 5\%.$$

To znači da su godišnje kamate iznosile 5%, odnosno godišnja kamatna stopa ili kamatnjak je 5. Dakle, naturalni kredit donosio je kamate "in natura", što znači da je postojala kamatna stopa, to jest izraženo u postocima, višak koji je, osim glavnice, dužnik morao vratiti. Karakteristično za kamatnu stopu u naturalnom kreditu je da se kamate dobivaju u istoj, konkretnoj robi u kojoj je dan kredit.

Kada je riječ o novčanom kreditu, kamate se kao i dug plaćaju u novcu, a *kamatna stopa ili kamatnjak predstavlja postotak* p *za koji dužnik mora vratiti, nakon isteka određenog* (*ugovorenog*) *vremena, više nego što je posudio*. Prema tome, kamate predstavljaju naknadu koju dužnik (debitor) mora platiti vjerovniku (kreditoru) zato što mu je na *određeno* vrijeme ustupio pravo raspolaganja nekim iznosom novca ili dobrom. Budući da kamate, ako su izražene u novcu, predstavljaju naknadu za financijska sredstva ustupljena na određeno vrijeme, nužno je uvijek naglasiti za koje vrijeme se ta naknada plaća. Najčešće se kamatnjak zadaje (ugovara) na godišnjoj (godišnji kamatnjak – $p(G)$), polugodišnjoj (polugodišnji kamatnjak – $p(P)$), kvartalnoj (kvartalni kamatnjak – $p(K)$), mjesečnoj (mjesečni kamatnjak – $p(m)$) ili dnevnoj (dnevni kamatnjak – $p(d)$) razini.

Kako se računaju kamate? Pri izračunu kamata koristimo se kamatnim računom: ili jednostavnim ili složenim. Naravno, veoma je važno znati ne samo što znači upotreba jednog od navedena dva kamatna računa, nego i kada se koji račun primjenjuje. U pravilu primjena jednog od dva navedena kamatna računa propisana je zakonom. Primjerice, jednostavni kamatni račun koristi se kada su u pitanju štedni ulozi po viđenju, kod računa mjenica, obračuna zakonskih zateznih kamata, potrošačkog kredita.

Jednostavni kamatni račun koristi se ako se kamate izračunavaju na *istu*, početnu glavnicu za *svako* razdoblje ukamaćivanja. Uočimo da kamate za jedno vremensko razdoblje predstavljaju postotni dio glavnice koji dužnik mora platiti vjerovniku kao naknadu za korištenje novčanog iznosa koji mu je posudio. Neka je C glavnica, $p(G)$ fiksni *godišnji* kamatnjak, a n broj godina. Postavlja se sljedeće pitanje: Koliko iznose kamate K računane po jednostavnom kamatnom računu (uobičajeno se kaže

[1] Studentica Ekonomskog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu.

[2] Redoviti profesor na istom fakultetu.

jednostavne kamate) za n godina za glavnicu C uz godišnji kamatnjak $p(G)$? Do daljnjega podrazumijevat ćemo da se kamate obračunavaju i pripisuju ili isplaćuju na kraju svake godine i da se i kamatnjak p odnosi upravo na to vremensko razdoblje (godinu).

Budući da kamate K predstavljaju postotni dio glavnice C, određujemo ih iz razmjera

$$K : C = p(G) : 100,$$

što znači da su kamate

$$K = \frac{C \cdot p(G)}{100}.$$

Dakle, kamate za prvu godinu iznose

$$K_1 = \frac{C \cdot p(G)}{100}.$$

Ali prigodom korištenja jednostavnog kamatnog računa kamate za *svako* razdoblje ukamaćivanja izračunavaju se na početnu glavnicu C, pa su kamate i za drugu i za bilo koju od n razmatranih godina

$$K_i = \frac{C \cdot p(G)}{100}, \ i \in \{1, 2, ..., n\}.$$

Dakle, *ukupne jednostavne kamate* K za n godina n puta su veće od kamata za jednu (bilo koju) godinu, jer je

$$K = \sum_{i=1}^{n} K_i = K_1 + K_2 + ... + K_n = \frac{C \cdot p(G)}{100} + \frac{C \cdot p(G)}{100} + ... + \frac{C \cdot p(G)}{100}$$

to jest

$$K = \frac{C \cdot p(G) \cdot n}{100}. \tag{1}$$

Primjena jednakosti (1) podrazumijeva da je godišnji kamatnjak $p(G)$ nepromjenjiv u svim vremenskim razdobljima na koja se izračun kamata odnosi. Ako tome nije tako, nužno je izvršiti modifikaciju navedene formule na način kako ćemo to pri kraju na primjerima pokazati.

U jednakosti (1) imamo četiri veličine: C, K, n i $p(G)$, pa želimo li izračunati bilo koju od njih, moraju biti poznate vrijednosti preostale tri veličine. Ilustrirat ćemo navedeno na sljedećim primjerima.

Primjer 1. Koliko iznose ukupne jednostavne kamate na iznos 2 000 kn za razdoblje od šest godina ako je godišnji kamatnjak u sve četiri razmatrane godine nepromjenjiv i iznosi 3.5?

Budući da je $C = 2\,000$ kn, $p = 3.5$ godišnje, $n = 6$ godina, koristeći se formulom (1), nalazimo da su ukupne jednostavne kamate

$$K = \frac{2\,000 \cdot 3.5 \cdot 6}{100} = 420 \text{ kn}.$$

Dobro je uočiti da se kamatnjak p odnosi upravo na razdoblje (1 godina) u kojemu se vrši ukamaćivanje (kapitalizacija).

Primjer 2. Koji iznos za osam godina uz godišnji kamatnjak 5 donese ukupno 20 000 kn jednostavnih kamata?

Sada je glavnica C nepoznata, pa riješimo li pripadnu linearnu jednadžbu

$$K = \frac{C \cdot p(G) \cdot n}{100}$$

po C, nalazimo da je

$$C = \frac{100 \cdot K}{p(G) \cdot n}.$$

Primjenom posljednje jednakosti, dobivamo

$$C = \frac{100 \cdot 20\,000}{5 \cdot 8} = 50\,000 \text{ kn}.$$

Dakle, tražena glavnica iznosi 50 000 kn.

Primjer 3. Uz koliku godišnju kamatnu stopu je dužnik posudio 20 000 kn ako je vjerovniku nakon pet godina u cijelosti podmirio dug s iznosom 24 000 kn? Kamate se obračunavaju po jednostavnom kamatnom računu.

Budući da je dužnik u cijelosti podmirio dug od 20 000 kn vjerovniku nakon pet godina s iznosom 24 000 kn, a kamate se obračunavaju po jednostavnom kamatnom računu, ukupne jednostavne kamate su

$$K = 24\,000 - 20\,000 = 4\,000 \text{ kn}.$$

Uvrstimo li u formulu (1) poznate vrijednosti, dobivamo jednadžbu

$$4\,000 = \frac{20\,000 \cdot p(G) \cdot 5}{100},$$

iz koje je traženi godišnji kamatnjak

$$p(G) = \frac{4\,000 \cdot 100}{20\,000 \cdot 5} = 4.$$

Naravno, mogli smo najprije slično, kao u prethodnom primjeru, izraziti kamatnjak p kao funkciju veličina C, K i n, a zatim računati $p(G)$. Lako se pokaže da je

$$p(G) = \frac{100 \cdot K}{C \cdot n}.$$

Primjer 4. Za koliko godina iznos od 30 000 kn donese uz godišnji kamatnjak 4 ukupno 12 000 kn jednostavnih kamata?

Uvrstimo li u formulu (1) dane vrijednosti, dobivamo linearnu jednadžbu

$$12\,600 = \frac{30\,000 \cdot 4 \cdot n}{100},$$

odakle je traženi broj godina

$$n = 10.5.$$

I sada smo mogli najprije izraziti broj godina n kao funkciju veličina C, K i p, a zatim računati n. Lako se pokaže da je

$$n = \frac{100 \cdot K}{C \cdot p(G)}.$$

Postavlja se pitanje: *Koliko je* 10.5 *godina mjeseci, odnosno dana*? Odgovor na drugi dio postavljenog pitanje ovisi o načinu brojanja dana u godini. Naime, nije svejedno koliko puta razmatrano razdoblje od 10.5 godina sadrži datum 29. veljače. Budući da se u gospodarskoj praksi jednostavne kamate računaju najčešće za mjesece, odnosno dane, najprije ćemo navesti kako valja postupiti u slučaju ako je vrijeme ukamaćivanja izraženo u mjesecima, a zatim tri metode koje se koriste ako je vrijeme ukamaćivanja izraženo u danima.

Ako je vrijeme ukamaćivanja izraženo u mjesecima, onda uvažavajući da jedna godina ima 12 mjeseci, znači da je m mjeseci $\frac{m}{12}$ godine. Uvrstimo li u formulu (1) umjesto n godina izraz $\frac{m}{12}$, dobivamo da se jednostavne kamate za m mjeseci računaju formulom

$$K = \frac{C \cdot p(G) \cdot \frac{m}{12}}{100},$$

to jest

$$K = \frac{C \cdot p(G) \cdot m}{1200}. \tag{2}$$

Primijetimo da primjenjujući formulu (2) ne vodimo računa o stvarnom broju dana u svakom pojedinom mjesecu, odnosno implicite podrazumijevamo da svaki mjesec ima jednak broj dana.

Primjer 5. Za koliko mjeseci iznos od 120 000 kn donese uz godišnji kamatnjak 4 ukupno 6 000 kn jednostavnih kamata?

Uvrstimo li u formulu (2) zadane vrijednosti, dobivamo linearnu jednadžbu

$$6\,000 = \frac{120\,000 \cdot 4 \cdot m}{1\,200}.$$

iz koje dobivamo traženi broj mjeseci

$$m = \frac{6\,000 \cdot 1\,200}{120\,000 \cdot 4},$$

to jest

$$m = 15.$$

Naravno, mogli smo najprije izraziti broj mjeseci m pomoću veličina C, K i $p(G)$, a zatim računati m. Lako se pokaže da je

$$m = \frac{12\,000 \cdot K}{C \cdot p(G)}.$$

Do identičnog rezultata dolazimo ako primijenimo najprije formulu (1) i dobiveni broj godina pomnožimo s 12. Doista, iz

$$6\,000 = \frac{120\,000 \cdot 4 \cdot n}{100}$$

slijedi da je

$$n = 1.25 \text{ godina},$$

a znamo da je

$$1.25 \text{ godina} = 1.25 \cdot 12 \text{ mjeseci} = 15 \text{ mjeseci}.$$

Ako se jednostavne kamate računaju za dane, najprije treba odrediti broj dana u godini. Budući da jedna godina (ako *nije prijestupna*) ima 365 dana, to znači da n godina ima $d = 365 \cdot n$ dana, to jest d dana ima

$$n = \frac{d}{365} \text{ godina},$$

pa uz navedenu pretpostavku jednostavne kamate na glavnicu C uz godišnji kamatnjak $p(G)$ za d dana u skladu s formulom (1) iznose

$$K = \frac{C \cdot p(G) \cdot \dfrac{d}{365}}{100},$$

to jest

$$K = \frac{C \cdot p(G) \cdot d}{36\,500}. \tag{3}$$

Naravno, ako je riječ o *prijestupnoj* godini, onda n (prijestupnih) godina ima $d = 366 \cdot n$ dana, to jest d dana ima

$$n = \frac{d}{366} \text{ godina,}$$

pa u ovom slučaju jednostavne kamate na glavnicu C uz godišnji kamatnjak $p(G)$ za d dana iznose

$$K = \frac{C \cdot p\,(G) \cdot \dfrac{d}{366}}{100},$$

to jest

$$K = \frac{C \cdot p\,(G) \cdot d}{36\,600}. \tag{4}$$

Dugo se u gospodarskoj praksi (u mnogim zemljama još i danas) zbog jednostavnijeg računanja uzimalo da svaki mjesec ima po 30 dana, odnosno da svaka godina ima 360 dana. To bi značilo da uz navedenu pretpostavku n godina ima $d = 360 \cdot n$ dana, to jest d dana ima

$$n = \frac{d}{360} \text{ godina,}$$

godina, pa jednostavne kamate na glavnicu C uz godišnji kamatnjak $p(G)$ za d dana u skladu s formulom (1) iznose

$$K = \frac{C \cdot p(G) \cdot \dfrac{d}{360}}{100},$$

to jest

$$K = \frac{C \cdot p(G) \cdot d}{36\,000}.$$

Primjer 6. Za koliko dana iznos od 90 000 kn donese uz godišnji kamatnjak 6 ukupno 27 000 kn jednostavnih kamata?

Pretpostavljajući da je riječ o neprijestupnim godinama i koristeći se formulom (3), dobivamo linearnu jednadžbu

$$27\,000 = \frac{90\,000 \cdot 6 \cdot d}{36\,500},$$

iz koje nalazimo traženi broj dana

$$d = \frac{27\,000 \cdot 36\,500}{90\,000 \cdot 6} = 1\,825.$$

Uz pretpostavku da je riječ o neprijestupnim godinama, zaključujemo da se kapitalizacija vršila

$$\frac{1\,825}{365} = 5 \text{ godina.}$$

Uočimo da su najviše 3 godine uzastopno neprijestupne[3], pa navedena pretpostavka nije realna, to jest 1 825 dana sigurno je manje od 5 godina.

Za izračun broja dana u godini koriste se tri metode, koje se koriste i pri obračunu i izračunavanju jednostavnih kamata ako su vremenska razdoblja dani. Riječ je o sljedeće tri metode:

(a) francuska metoda: uzima se da godina ima 360 dana, dani u mjesecima (d_F) računaju se prema kalendaru, a za izračunavanje jednostavnih kamata koristi se formula

$$K_F = \frac{C \cdot p(G) \cdot d_F}{36\,000};$$

(b) njemačka metoda: uzima se da godina ima 360 dana, svaki mjesec 30 dana, a za izračunavanje jednostavnih kamata koristi se formula

$$K_{NJ} = \frac{C \cdot p(G) \cdot d_{NJ}}{36\,000};$$

(c) engleska metoda: uzima se da godina ima 365 dana (prijestupna 366), dani u mjesecima računaju se prema kalendaru (d_E), a za izračunavanje jednostavnih kamata koristi se formula

$$K_E = \frac{C \cdot p(G) \cdot d_E}{36\,500} \quad \text{ili} \quad K_E = \frac{C \cdot p(G) \cdot d_E}{36\,600}.$$

U gospodarskoj praksi Republike Hrvatske u pravilu se koristi engleska metoda, pa je i mi u primjerima koristimo.

Napomena 1. Bez obzira koja se metoda izračuna broja dana koristi, prvi datum se ne uzima u obzir, a posljednji se računa pri tom izračunu.

Prethodna napomena je veoma bitna, pogotovo ako se kamate računaju za razdoblje koje sadrži dio i preijestupne i dio neprijestupne godine. Ilustrirat ćemo navedeno sljedećim primjerima.

Primjer 7. Kolikim iznosom će raspolagati štediša 31. siječnja 2007. godine ako je 31. siječnja 2006. uložio u poslovnu banku 100 000 kn, a banka mu je obračunala kamate po jednostavnom kamatnom računu uz godišnji kamatnjak 10?

Uočimo da je uloženi iznos štediša u banci imao točno 1 godinu i pri tome ni jedna od dvije ključne godine (godina kada je iznos uložen i godina kada je izvršen izračun kamata) ne pripada prijestupnoj godini, pa ukupne jednostavne kamate iznose

$$K = \frac{100\,000 \cdot 10 \cdot 1}{100} = 10\,000 \text{ kn}.$$

Dakle, štediša će 31. siječnja 2007. godine raspolagati iznosom

$$100\,000 + 10\,000 = 110\,000 \text{ kn}.$$

Primjer 8. Kolikim iznosom je raspolagao štediša 31. siječnja 2005. godine ako je 31. siječnja 2004. uložio u poslovnu banku 100 000 kn, a banka mu je obračunala kamate po jednostavnom kamatnom računu uz godišnji kamatnjak 10?

[3] Zanemarujemo mogućnost prelaska iz jednog stoljeća u drugo pri čemu je barem jedna godina u stoljeću koje nije bez ostatka djeljivo s 4.

Uočimo da je i u ovom primjeru štediša uloženi iznos imao u poslovnoj banci točno 1 godinu, ali je razdoblje ukamaćivanja djelomično u prijestupnoj a djelomično u neprijestupnoj godini. Zbog toga razdoblje ukamaćivanja treba rastaviti na dva podrazdoblja: prvo podrazdoblje pripada prijestupnoj a drugo neprijestupnoj godini. Budući da je broj dana ukamaćivanja u prijestupnoj godini 366-31=335, to kamate za to podrazdoblje iznose

$$K_1 = \frac{100\,000 \cdot 10 \cdot 335}{36\,600} \approx 9\,153.01 \text{ kn.}$$

Analogno, broj dana ukamaćivanja u neprijestupnoj godini je 31, pa kamate za to podrazdoblje iznose

$$K_2 = \frac{100\,000 \cdot 10 \cdot 31}{36\,500} \approx 849.32 \text{ kn.}$$

Dakle, ukupne jednostavne kamate iznose

$$K = K_1 + K_2 = 9\,153.01 + 849.32 = 10\,002.33 \text{ kn,}$$

pa je štediša 31. siječnja 2005. godine raspolagao iznosom

$$100\,000 + 10\,002.33 = 110\,002.33 \text{ kn.}$$

Primjer 9. Kolikim iznosom je raspolagao štediša 31. siječnja 2004. godine ako je 31. siječnja 2003. uložio u poslovnu banku 100 000 kn, a banka mu je obračunala kamate po jednostavnom kamatnom računu uz godišnji kamatnjak 10?

Uočimo da je uloženi iznos štediša u banci imao točno 1 godinu, ali je razdoblje ukamaćivanja djelomično u neprijestupnoj a djelomično u prijestupnoj godini. Zbog toga razdoblje ukamaćivanja treba rastaviti na dva podrazdoblja: prvo podrazdoblje pripada neprijestupnoj a drugo prijestupnoj godini. Budući da je broj dana ukamaćivanja u neprijestupnoj godini $365 - 31 = 334$, to kamate za to podrazdoblje iznose

$$K_1 = \frac{100\,000 \cdot 10 \cdot 334}{36\,500} \approx 9\,150.68 \text{ kn.}$$

Analogno, broj dana ukamaćivanja u prijestupnoj godini je 31, pa kamate za to podrazdoblje iznose

$$K_2 = \frac{100\,000 \cdot 10 \cdot 31}{36\,600} \approx 846.99 \text{ kn.}$$

Dakle,ukupne jednostavne kamate sada iznose

$$K = K_1 + K_2 = 9\,150.68 + 846.99 = 9\,997.67 \text{ kn,}$$

pa je štediša 31. siječnja 2004. godine raspolagao iznosom

$$100\,000 + 9\,997.67 = 109\,997.67 \text{ kn.}$$

Prethodni primjeri ukazuju da se svakako treba uvažiti je li riječ o prijestupnoj ili neprijestupnoj godini budući da ako je riječ o neprijestupnoj godini, kamate se računaju formulom

$$K = \frac{C \cdot p(G) \cdot d}{36\,500},$$

a ako je riječ o prijestupnoj, formulom

$$K = \frac{C \cdot p(G) \cdot d}{36\,600},$$

pri čemu je d broj dana između datuma uplate (D_0) glavnice C i datuma obračuna kamata (D_1). Naravno, pri izračunu broja dana datum D_0 se ne računa, ali se računa datum D_1.

Kako treba postupiti ako kamatnjak nije fiksan? Potrebno je rastaviti razdoblje ukamaćivanja na podrazdoblja u kojima je kamatnjak nepromjenjiv i za svako tako dobiveno podrazdoblje izračunati jednostavne kamate na prethodno opisani način i zatim te kamate zbrojiti. Ilustrirat ćemo navedeno sljedećim primjerom.

Primjer 10. Kolikim iznosom je raspolagao štediša 31. siječnja 2005. godine ako je 31. siječnja 2004. uložio u poslovnu banku 100 000 kn, a banka mu je obračunala kamate po jednostavnom kamatnom računu uz godišnji kamatnjak 10 za razdoblje do (zaključno) 31. svibnja 2004., a zatim je do 15. rujna 2004. godine obračunavala kamate po godišnjoj kamatnoj stopi 8 i nakon navednog datuma po godišnjoj stopi 7?

Uočimo da se godišnji kamatnjak mijenjao dva puta, pa razlikujemo tri podrazdoblja u kojima je bio fiksan: prvo podrazdoblje je od 31. siječnja 2004. do 31. svibnja 2004., drugo od 1. lipnja 2004. do 15. rujna 2004., a treće od 16. rujna 2004. do 31. siječnja 2005. godine.

Kamate za prvo podrazdoblje iznose

$$K_1 = \frac{100\,000 \cdot 10 \cdot 121}{36\,600} \approx 3\,306.01 \text{ kn},$$

jer je broj dana (bez prvog dana) u tom podrazdoblju

$$29 + 31 + 30 + 31 = 121.$$

Budući da je u drugom podrazdoblju broj dana

$$30 + 31 + 31 + 15 = 107,$$

kamate za to podrazdoblje iznose

$$K_2 = \frac{100\,000 \cdot 8 \cdot 107}{36\,600} \approx 2\,338.80 \text{ kn}.$$

Uočimo da treće podrazdoblje djelomično pripada prijestupnoj a djelomično neprijestupnoj godini, pa ga zbog toga treba dodatno podijeliti na dva podrazdoblja: od 16. rujna 2004. do 31. prosinca 2004. i od 1. siječnja 2005. do 31. siječnja 2005. godine. Kamate za podrazdoblje od 16. rujna 2004. do 31. prosinca 2004. iznose

$$K_{31} = \frac{100\,000 \cdot 7 \cdot 108}{36\,600} \approx 2\,065.57 \text{ kn},$$

a za podrazdoblje od 1. siječnja 2005. do 31. siječnja 2005. godine

$$K_{32} = \frac{100\,000 \cdot 7 \cdot 31}{36\,500} \approx 594.52 \text{kn}.$$

Dakle, kamate za treće podrazdoblje iznose

$$K_3 = K_{31} + K_{32} = 2\,065.57 + 594.52 = 2\,660.09 \text{ kn},$$

pa ukupne jednostavne kamate za razdoblje od 31. siječnja 2004. do 31. siječnja 2005. godine iznose

$$K = K_1 + K_2 + K_3 = 3\,306.01 + 2\,338.80 + 2\,660.09 = 8\,304.90 \text{ kn}.$$

Prema tome, štediša je 31. siječnja 2005. godine raspolagao iznosom 108 304.90 kn.

Posljednji primjer ukazuje da primjena jednostavnog računa u praksi nije uvijek sasvim trivijalna i da je nužno razmisliti u kojim podrazdobljima i na koji način ga treba primijeniti. Budući da se nerijetko ovaj kamatni račun podcjenjuje unatoč mnogobrojnim i relativno čestim primjenama u gospodarskoj praksi, mladim čitateljima predlažemo da provjere jesu li doista usvojili izloženo gradivo rješavajući zadatke koje dajemo u nastavku.

Zadaci za vježbu

1. Koliko iznose ukupne jednostavne kamate na iznos 12 000 kn za razdoblje od četiri godine ako je godišnji kamatnjak u svim razmatranim godinama nepromjenjiv i iznosi 4.25?

Rješenje: 2 040 kn.

2. Koji iznos za dvanaest godina uz godišnji kamatnjak 3.88 donese ukupno 45 000 kn jednostavnih kamata?

Rješenje: 96 649.48 kn.

3. Uz koliku godišnju kamatnu stopu je dužnik posudio 50 000 kn ako je vjerovniku nakon tri godine u cijelosti podmirio dug s iznosom 54 755 kn? Kamate se obračunavaju po jednostavnom kamatnom računu.

Rješenje: 3.17 godišnje.

4. Za koliko godina iznos od 140 000 kn donese uz godišnji kamatnjak 3.25 ukupno 18 200 kn jednostavnih kamata?

Rješenje: 4 godine.

5. Za koliko mjeseci iznos od 480 000 kn donese uz godišnji kamatnjak 4.5 ukupno 25 200 kn jednostavnih kamata?

Rješenje: 14 mjeseci.

6. Neka osoba je 13. ožujka 2003. godine uložila u poslovnu banku 150 000 kn. Ako je ta osoba na temelju navedene uplate 31. prosinca 2003. podigla 160 000 kn, uz koji godišnji kamatnjak je banka obračunavala kamate?

Rješenje: $p \approx 8.30489$ godišnje.

7. Neka osoba je 13. ožujka 2004. godine uložila u poslovnu banku 150 000 kn. Ako je ta osoba na temelju navedene uplate, 31. prosinca 2004. podigla 160 000 kn, uz koji godišnji kamatnjak je banka obračunavala kamate?

Rješenje: $p \approx 8.32765$ godišnje.

8. Kolikim iznosom je raspolagao štediša 30. lipnja 2004. godine ako je 15. listopada 2003. uložio u poslovnu banku 500 000 kn, a banka obračunava kamate po jednostavnom kamatnom računu uz godišnji kamatnjak 4.75?

Rješenje: 516 820.38 kn.

9. Kolikim iznosom je raspolagao štediša 30. lipnja 2005. godine ako je 15. listopada 2004. uložio u poslovnu banku 500 000 kn, a banka obračunava kamate po jednostavnom kamatnom računu uz godišnji kamatnjak 4.75?

Rješenje: 516 773.98 kn.

10. Kolikim iznosom je raspolagao štediša 30. lipnja 2006. godine ako je 15. listopada 2005. uložio u poslovnu banku 500 000 kn, a banka obračunava kamate po jednostavnom kamatnom računu uz godišnji kamatnjak 4.75?

Rješenje: 516 787.67 kn.

11. Kolikim iznosom je raspolagao štediša 30. lipnja 2004. godine ako je 1. srpnja 2003. uložio u poslovnu banku 200 000 kn, a banka mu je obračunala kamate po jednostavnom kamatnom računu uz godišnji kamatnjak 7.5 za razdoblje do (zaključno) 31. listopada 2003., a zatim je do 15. ožujka 2004. godine obračunavala kamate po godišnjoj kamatnoj stopi 7 i nakon navednog datuma po godišnjoj stopi 6.75?

Rješenje: 214 315.17 kn.

12. Kolikim iznosom je raspolagao štediša 30. lipnja 2005. godine ako je 1. srpnja 2004. uložio u poslovnu banku 200 000 kn, a banka mu je obračunala kamate po jednostavnom kamatnom računu uz godišnji kamatnjak 7.5 za razdoblje do (zaključno) 31. listopada 2004., a zatim je do 15. ožujka 2005. godine obračunavala kamate po godišnjoj kamatnoj stopi 7 i nakon navednog datuma po godišnjoj stopi 6.75?

Rješenje: 214 275.80 kn.

13. Kolikim iznosom je raspolagao štediša 30. lipnja 2006. godine ako je 1. srpnja 2005. uložio u poslovnu banku 200 000 kn, a banka mu je obračunala kamate po jednostavnom kamatnom računu uz godišnji kamatnjak 7.5 za razdoblje do (zaključno) 31. listopada 2005., a zatim je do 15. ožujka 2006. godine obračunavala kamate po godišnjoj kamatnoj stopi 7 i nakon navednog datuma po godišnjoj stopi 6.75?

Rješenje: 214 295.89 kn.

Literatura

[1] B. Relić, (2002), *Gospodarska matematika*, Hrvatska zajednica računovođa i financijskih djelatnika, Zagreb

[2] Đ. Salamon, B. Šego, (2005), *Matematika* 1 – udžbenik sa zbirkom zadataka za prvi razred ekonomske škole, Alka script, Zagreb

[3] Đ. Salamon, B. Šego, (2005), *Matematika* 2 – udžbenik sa zbirkom zadataka za drugi razred ekonomske škole, Alka script, Zagreb

[4] Đ. Salamon, B. Šego, (2003), *Matematika* 3 – udžbenik sa zbirkom zadataka za treći razred ekonomske škole, Alka script, Zagreb

[5] B. Šego, (2005), *Matematika za ekonomiste*, Narodne novine, Zagreb

⋆ ⋆ ⋆

Unapređivanje i savršenstvo matematike je povezano s blagostanjem države.

Napoleon

Konačnost šaha

Siniša Režek, Zagreb

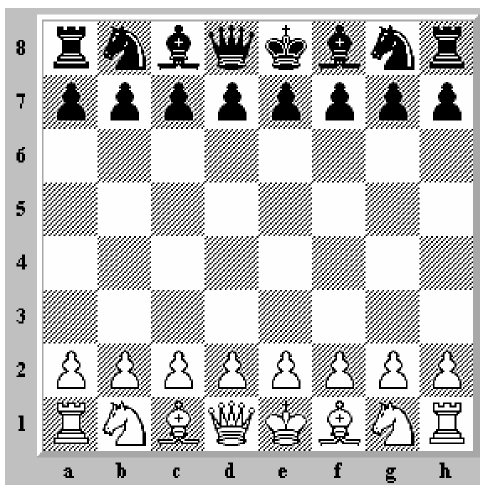
Nijedna igra nema toliko raznih aplikacija i uspoređenja kao šah; sport, umjetnost, strategija, filozofija, kultura, geometrija, sve su to derivati šaha, dapače Dufrense, otkriva šah kao "posebnu prostornu znanost", probleme šaha uspoređuje s poezijom, estetikom igre, a i s fizikom ("otkrito" je, da sistem konjeva skoka ima primjene u kristalografiji!).

Teško je šah uspoređivati s bilo čime, pa niti s matematikom, jedino se mogu razni problemi šaha i šahovske ploče sekundarno pokazati egzaktno s posebnim matematičkim izvodima, koji su vezani uz svoje postulate, odnosno pravila šahovske igre.

Iako takvi matematičari, kako kaže Schopenhauer, "liče čovjeku, koji si reže zdravu nogu, da si umetne drvenu", ipak su se Euler, Leibnity, Gauss, Moivre, Lucas, Bertrand, Landau, Jaenisch, bavili zanimljivim zadacima šaha, kao što su problemi osam i pet dama, te problem konjićevog skoka. Oni su još do danas ostali kao nepotpuno riješeni problemi. Većina njihovih rješenja bila su vezana za šahovsku ploču, i rezultati nisu imali općeniti oblik, već su izvođeni putem duhovitih proba i algoritamskih jednadžbi. Svi su ti problemi vrlo raznoliki i idu od prvog poznatog zadatka Sissa ben Dahira o količini žita, koje se udvostručuje na svakom polju šahovske ploče, pa do najnovijih zadataka u vezi s računom vjerojatnosti, konstrukcijskih analiza normalnog i višedimenzionalnog šaha.

Postoje dva osnovna oblika u pogledu djelovanja šahovskih figura: statički i dinamički, tj. postavljanje i gibanje figura ili pozicija i partija.

Od mnoštva zanimljivih izvoda i zadataka ovih oblika, u kojima se mnogi mogu obuhvatiti jednadžbama općenitog oblika, obradit ću u ovom prikazu dva najzanimljivija i najznačajnija problema, tj. proračuna broja svih pozicija i partija.



Za rješenje ovog pitanja važno je pronaći onaj broj figura, kod kojeg nastaje najveći broj postava. Na prvi se pogled čini, da maksimalni broj nastaje kod postave s 32 figure, no zbog smetnja pješaka, koji imaju razmjerno mali broj različitih postava, a veliku zakrčenost, suma se gubi u odnosu prema drugim postavama.

$$S_{32} = \binom{64-16}{14} \cdot \frac{14!}{2!^6} \cdot 15^5 \cdot 10^2 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot (64-31) \cdot \frac{1}{2} \cdot (64-31) \approx 10^{32}. \qquad (1)$$

Kod ovog izraza binomni koeficijent ima značenje svih kombinacija grupe od 14 figura (bez kraljeva!) na raspoloživih 48 polja; drugi član znači sve permutacije 14 elemenata od 8 vrsti (bijela i crna dama, top, lovac, skakač); sljedeća tri člana prikazuju broj svih postava pješaka (počevši od pozicije, kad su sve figure u mogućnosti potpunog razvoja!); dok posljednji članovi označuju dodatak na postave oba kralja, gdje popravni koeficijenti ($\frac{2}{3}$ i $\frac{1}{2}$) oslabljuju ova gibanja kod onih slučajeva, kada su oba kralja u šahu ili u nemogućoj poziciji.

Praktično maksimum se nalazi kod postava s 28 figura i to nakon gubitka 4 pješaka, koji onemogućuju promociju ostalih 12 na posljednjim linijama:

$$S_{28} = \binom{64}{28} 8^{26} \cdot \frac{1}{2} \cdot (64-27) \cdot \frac{1}{5} \cdot (64-27) \approx 2 \cdot 10^{43}. \qquad (2)$$

Binomni koeficijent ima značenje kao gore, dok drugi član sadrži osim permutacija raznih vrsta figura (isto bez kraljeva) i razne promjene promoviranih pješaka; dok posljednji članovi znače broj gibanja kralja s pooštrenim koeficijentima nemogućih postava.

Drugi dio izraza nešto je prevelik, jer sadrži veći broj promocija, nego li je praktički moguće (npr. 26 figura iste vrste), no ta pogreška nimalo ne utječe na rezultat, jer te pozicije s većim brojem promocija iste vrste figura imaju vrlo mali broj permutacija.

Taj maksimum je istodobno maksimum za sve postave, jer se ostale pozicije gube u tom izrazu, tako npr. sljedeći najveći broj pozicija s 27 figura ima $5 \cdot 10^{40}$ postava.

Pitanje maksimalnog broja korektnih pozicija pokušavao je rješavati 1895. godine matematičar L. Schuring, dobivši sumu od 10^{51}, što nije nikako ispravno jer najveći pogrešni izraz s 28 figura iznosi $\binom{64}{28} \cdot 28! \approx 10^{47}$, tj. uz permutacije 28 raznih figura, što znači, da je Schuring prestupio i granicu pogreške!

Osim ovih izvoda, koji predočuju sumu svih korektnih postava, koje se temelje na ortodoksnim pravilima šahovske igre, postojala bi još suma svih mogućih postava na šahovskoj ploči u ilegalnom obliku, ali s legalnim šahovskim figurama. To bi bio ukupan broj šahovskih problema, koji se mogu postaviti u običnom i "čarobnom" šahu! U sljedećem izrazu

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k = (1+a)^n \qquad (3)$$

gdje n znači broj polja, k broj figura u pojedinoj postavi i a broj vrsta figura, te za $n = 64$, $k = 1, 2, 3, \ldots, 64$, te $a = 12$, dobivamo sumu binomnog reda $\Sigma = 13^{64} \approx 2.5 \cdot 10^{71}$. Zanimljivo je kod ovog reda, da najveći broj pozicija dolazi kod postave s 59 figura!

Ovaj proračun koji se je tretirao kao da pripada u područje “mjerenja duljine, koja se ne može izmjeriti”, moguće je izvesti razmjerno mučnim kombiniranjem i variranjem izvjesnih konstrukcijskih partija i konstrukcijskih pozicija.

Kod određivanja maksimalnog broja partija, koji ima više akademsku, nego li praktičnu vrijednost, dolazi u obzir jedna problemski konstruirana partija velike duljine, a istodobno s velikim brojem pozicija. Ta se partija osniva na šahovskom pravilu, da u slučaju, ako je učinjeno 50 poteza s obje strane, a da za to vrijeme nije uzeta ni jedna figura niti pokrenut niti jedan pješak, ostaje partija remi. Dakle, takvu složenu remi-partiju najveće duljine uzet ćemo kod određivanja maksimalnog broja partija. Shema te partije imala bi četiri etape sljedećeg oblika:

Nakon 50 poteza bijelih i 49 poteza crnih skakača i topova vuče crni b7-b6, zatim opet nakon serije od 49 i pol poteza vuče g7-g6, nakon toga c7-c6 i f7-f6, što iznosi četiri pomaka crnih pješaka odnosno 200 poteza.

Ova etapa mogla bi biti i dulja, sve npr. do postave crnih pješaka: a4, b3, d3, d4, e3, e4, g3, h4, ali se onda produljuje pasivnost pokreta bijelih figura, te se zato forsira prijelaz na drugu etapu radi bržeg razvoja bijelih figura.

U drugoj se etapi, nakon gubitka od pola poteza (kod prijelaza bijelog na crne), bijeli pješaci probijaju (uzimajući šest crnih figura) do posljednje linije. Dakako, da kod toga moraju vući optimalno, da se bijele figure što prije razviju (d3, e3 ili b3, g3), a uzimaju crne figure kasnije, tako da crni operira što dulje s većim brojem figura! Etapa ima u svemu 48 pokreta, što iznosi daljnjih 2 400 poteza!

Kod treće se etape svi crni pješaci mijenjaju u figure, i na kraju uzimaju sve preostale bijele figure, dakako sve u maksimalno dopuštenim distancama. Etapa ima 57 pomaka pješaka i uzimanja, dakle još 2 850 poteza, uz daljnji gubitak od pola poteza.

U zadnjoj, četvrtoj etapi bijeli kralj uzima preostalih devet crnih figura, 450 poteza, te partija završava remijem!

Dakle, čitava partija sa 118 osnovno promijenjenih pozicija završava s 5 899. potezom.

Proračun broja svih partija ovog oblika vršen je dakle tako, da je za svaku osnovno promijenjenu poziciju izračunata srednja vrijednost svih mogućih gibanja, koja je zatim potencirana u svojem intervalu s brojem efektivnih varijantnih poteza!

Srednja vrijednost mogućih pomaka svake pozicije nađena je na temelju proračuna statički konstruiranih problema, zbroj pozicija s maksimalnim brojem poteza veći je od zbroja pozicija s minimalnim pokretima. Interpolacija za proračunavanje srednje vrijednosti uzeta je parabolički, a ne linearno.

Isto tako pozicije su konstruirane za istodobno proračunavanje ekstremnih vrijednosti bijelih i crnih pomaka (ne pojedinačno) tako da se u svakoj poziciji omogući uvijek alternativno (za obje boje) izvesti srednji broj poteza. Naravno, da su iste figure i kod konstrukcije s maksimalnim i minimalnim brojem poteza, i odbijeni su potezi s davanjem šaha!

Dodatak svih partija ekstremnih vrijednosti jedne boje, iako je ona veća od zajedničkih ekstremnih vrijednosti, ne povećava rezultat, jer povećanjem broja pozicija jedne boje rapidno pada broj pozicija druge boje.

Finesa proračuna je i u tom, što se kod mogućnosti povećanja broja pozicija jedne boje na uštrb druge, uvijek povećao broj pozicija one boje koja u odnosnoj etapi

nije izvodila pješački potez! Između pojedinih etapa mora postojati izvjesna sličnost konstrukcijskih problema radi mogućnosti izvođenja varijacija.

Osim, proračuna ovog optimalnog slučaja unutar najdulje partije, pribrajaju se i druge partije s različitim varijacijama pješačkih gibanja (vidi primjedbu u prvoj etapi), ranijeg uzimanja figura, različitih promocija, te partija kraćih poteza.

Sve ove alternative računski ispitane neznatno povećavaju konačnu sumu, te npr. koeficijent povećanja uslijed svih mogućih varijacija gibanja bijelih i crnih pješaka, od početne postave do krajnje linije, iznosi 10^{76}, što je ništavna vrijednost prema konačnom rezultatu.

Tim sistemom računanja eliminirana je gotovo i svaka pogreška, koja bi se protivila pravilima šaha, kao: nemoguće postave, ponavljanje poteza, osim kvalitativne vrijednosti partija, koje se nikada neće odigrati, ne samo radi njihove nelogičnosti, već i radi praktične nemogućnosti brojanja fantastične sume.

Prema naprijed navedenim shemama izračunati produkt iznosi po etapama i naprijed navedenim koeficijentom povećanja uslijed varijacija gibanja pješaka:

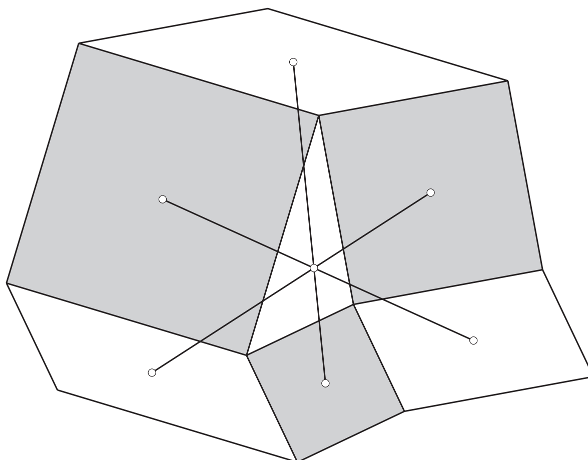
$$\sum = 10^{447} \cdot 10^{7\,060} \cdot 10^{10\,377} \cdot 10^{989} \cdot \binom{48!}{6!^8} \approx 10^{18\,900} \tag{4}$$

što bi iznosilo prosjek od 41 gibanja po potezu.

Ova suma, koja prikazuje "teoretsku konačnost šahovske partije", ne može se uopće praktički prikazati niti godinama svjetlosti, niti svemirskim duljinama, te i Eddingtonov zbroj svih elektrona u svemiru od 10^{79} ostaje u ništavilu prema ovom broju.

"Praktična konačnost šahovske partije" nastat će onog dana, kad ljudski mozak riješi "konačnicu početne postave", tj. kada bude u mogućnosti da savršeno registrira broj poteza najdulje remi varijante.

⋆ ⋆ ⋆



Jedna od točaka presjeka iz knjige Hans Walser,
99 Points of Intersection, Examples – Pictures – Proofs,
The Mathematical Association of America, 2006.



FIZIKA

Bežične komunikacije u patentima Nikole Tesle

Zvonimir Šipuš[1], *Zagreb*

Nikola Tesla je počeo raditi na eksperimentima s visokofrekvencijskim uređajima 1888. godine u New Yorku. Već tada je imao ideju kako se energija može prenositi bez upotrabe žica. Pri tome nije razmišljao hoće li se takav sustav koristiti za telegrafiju (možemo smatrati da je telegrafija prvi moderni digitalni komunikacijski sustav brzine prijenosa otprilike 10 bita u sekundi), za telefoniju ili za prijenos energije. U jednom intervjuu je izjavio: "Bilo mi je očigledno da bežični prijenos energije (ako će ikada biti ostvaren) nije samo izum, to je umjetnost ... koja zahtijeva mnoge izume u kombinaciji". Slika 1 pokazuje jednu od Teslinih vizija kako bi svjetski bežični energetski i komunikacijski sustav trebao izgledati (sustav koji je Tesla pokušao razviti) – iz centralnog ureda bi se odašiljala energija, odnosno informacije, što bi omogućavalo slanje električne energije svima kojima bi ona bila potrebna za komunikaciju između ljudi, te bi čak i razne letjelice primale bežičnim putem energiju potrebnu za let.



Slika 1. Vizija svjetskog bežičnog energetskog i komunikacijskog sustava [1].

Godine 1891. Tesla je izveo eksperiment gdje je bez žica pobudio vakumsku žarulju. Cijev se nalazila između dviju metalnih struktura (današnjim rječnikom – između ploča kondezatora) koje su bile spojene na visokofrekvencijski generator. U opisivanju tog eksperimenta Tesla je rekao da ga priroda svakodnevno provodi u olujama na Zemlji, i da je to zapravo za njega prvi dokaz da je moguće prenositi energiju na udaljenost.

Po Tesli, za uspješan prijenos energije (informacije) potrebno je riješiti pet problema:

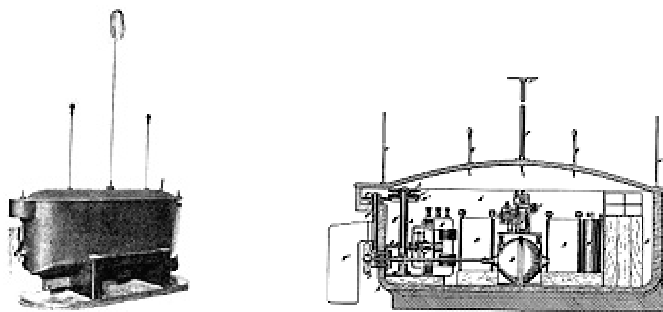
* proizvodnja izmjenične struje odgovarajućeg svojstva
* transformacija te struje u oblik pogodan za bežični prijenos energije
* razvoj metoda i uređaja za prijam radiovalova
* izoliranje energije, ne dozvoliti da se širi u svim smjerovima
* otkrivanje prirodnih zakona koji opisuju širenje energije

[1] Autor je izvanredni profesor na Zavodu za radiokomunikacije Fakulteta elektrotehnike i računarstva, Sveučilišta u Zagrebu, e-mail: zvonimir.sipus@fer.hr.

U svojim izumima Tesla je pokušao naći odgovore na sva ova pitanja i time je došao do rješenja koja se i danas koriste u suvremenim bežičnim komunikacijskim sustavima. Već 1893. godine Tesla je opisao komunikacijski sustav s monopol-antenama na predajnoj i prijamnoj strani, te je sugerirao upotrabu kontinuirane visokofrekvencijske struje i ugođenog prijamnika (većina suvremenih bežičnih komunikacijskih sustava upravo tako i radi). Kao visokofrekvencijski izvor Tesla je već 1891. godine patentirao generator koji je bio u mogućnosti generirati za to doba savršeno sinusoidalan signal frekvencije 10 do 20 kHz. To je bilo dosta različito od prvih Hertzovih eksperimenata i sustava iz 1887. godine koji je koristio kratke impulse visokofrekvencijske struje (spektar je bio jako širok i vremenski promjenjiv odnosno nestabilan).

Principom ugođenog prijamnika Tesla je otkrio princip koji se danas redovito koristi u svim bežičnim uređajima – kod prijamnika ugodimo željenu frekvenciju (rezonantnu frekvenciju prijamnog titrajnog kruga) tako da prijamnik prima upravo željenu frekvenciju i time da "ne reagira" na signale drugih frekvencija koje su prisutne svuda oko nas. Taj princip je Tesla nazvao metodom individiualizacije – metodom određivanja tko treba primati određeni elektromagnetski val. Također je izumio predajnik s više signala, preteču modernih sustava s raspršnim spektrom (napomenimo da novi UMTS sustav mobine telefonije koristi upravo taj princip). U prijamniku su se nalazila dva ili više prijamna sklopa, svaki od njih ugođen da prima impulse jedne frekvencije. Ukupna informacija se dobivala međudjelovanjem svih individualno primljenih informacija (logička I vrata). Time je Tesla unaprijedio svoj princip individualizacije, informacija se zaštićuje od neželjenih osoba i ujedno se smanjuje osjetljivost na šum koji je uvijek prisutan.

Između mnogobrojnih elektromagnetskih eksperimenata koje je Tesla izveo posebno je zanimljiva izvedba prvog sustava za daljinsko upravljanje, odnosno otkriće teleautomatike. Tesla je prvi izradio daljinski vođeni objekt – čamac, a za upravljanje su se koristili radiovalovi (slika 2). Demonstraciju novog sustava Tesla je izveo 1898. godine u parku u New Yorku – upravljao je malim brodom koji je plovio po jezeru u parku. U samom brodu nalazila se baterija koja je davala energiju motoru, a brzinom broda i smjerom kretanja broda se daljinski upravljalo. Koliko je taj izum bilo revolucionaran pokazuje podatak da je publika uzalud tražila skrivene žice s kojima je po njihovom mišljenju brod privezan. Ovim izumom Tesla je postao začetnikom daljinskog upravljanja, koje se danas koristi u mnogobrojnim primjenama od dječjih igračaka do svemirskih brodova. Zanimljivo je da je Tesla, kao uvjereni pacifist, predlagao uporabu ovog izuma u vojne svrhe. Naime, Tesla je smatrao da će se ratovi u budućnosti voditi između daljinski navođenih ratnih uređaja (teleautomata) koji bi bili bez ljudske posade, i stoga u ratovima više ne bi bilo ljudskih žrtava.

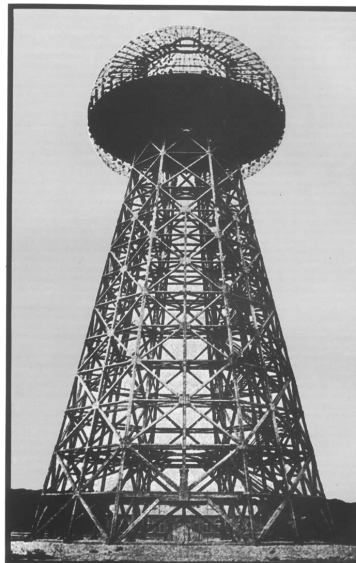


Slika 2. Izgled teledirigiranog broda; izum iz 1898. godine.

Godine 1899. Tesla se preselio u Colorado Springs gdje je započeo raditi na tzv. svjetskom sustavu za bežični prijenos energije i informacija (u svojim sjećanjima [1] Tesla je posebnu pažnju posvetio upravo tom sustavu). Ideja za izum proizašla je iz

jedne zgode iz djetinstva, kad je Tesla promatrao grudu snijega koja je izazvala snježnu lavinu. Ta zgoda je Teslu inspirirala da iskoristi rezonanciju u generiranju signala visoke frekvencije odnosno visokog napona. Osim što je generirao napone 10 do 12 milijuna volta i proizveo munje duže od 30 metara, Tesla je uspio bežično prenijeti energiju na udaljenost od četrdesetak kilometara koja je bila dovoljna da osvijetli jednu zgradu sa 200 žarulja i da upogoni jedan elektromotor.

Godine 1900. Tesla se vraća u New York i na Long Islandu počinje izgradnju tornja i laboratorija koji je osim odašiljanju energije bio namijenjen i telegrafiji (slika 3). Naime, u to vrijeme se rodila ideja da se Europa i Amerika bežično povežu telegrafskom vezom. Upravo ta veza će biti jedan od najvećih udaraca Tesli kao izumitelju (svjetski sustav nažalost nikada nije zaživio) jer će uzrokovati Teslino odustajanje od eksperimenata u elektromagnetizmu. Naime, Marconi je pobijedio u utrci u povezivanju Europe i Amerike: 12. prosinca 1901. godine Marconi je uspio bežično prenijeti telegrafski signal preko Atlanskog oceana. Pri tome je koristio sustav zasnovan na razmjerno jednostavnim uređajima, mnogo jeftinijim u odnosu na rješenja koja je predlagao Tesla (paradoksalno, velik dio sustava bio je inspiriran Teslinim izumima). Vjerojatno je zato glavni Teslin sponzor (Morgan) odlučio prestati davati financijsku pomoć razvoju Teslina tornja – svjetske radio stanice.

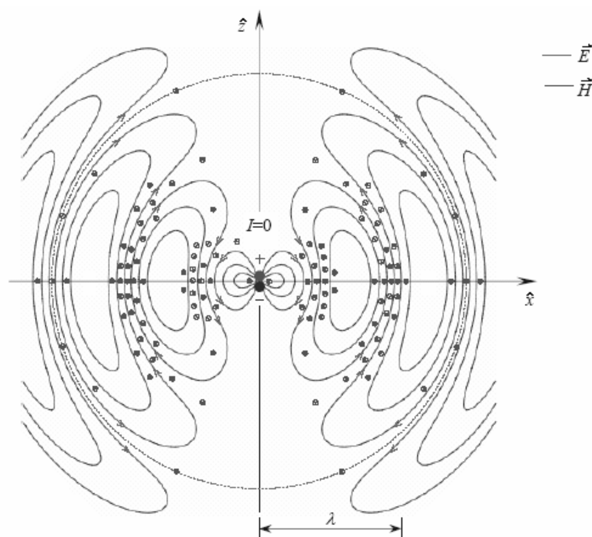


Slika 3. Izvedba tornja – predajnika na Long Islandu [1].

Usprkos svim ovim izumima Tesla dugo nije bio prepoznat kao jedan od pionira radio tehnike. Jedan od razloga su objašnjenja koja je Tesla davao u svojim patentima. Tesla je naime razlikovao način širenja valova kroz zrak (Hertz je tako opisivao zračenje svojih antena – 1888. godine je utvrdio da radiovalovi putuju brzinom svjetlosti i da se ponašaju kao svjetlosni valovi), dok je svoj izum opisao kao vođenje valova preko promjene distribucije elektrostatskih naboja na Zemljinoj površini. Zbog tvrdnje da njegov sustav ne proizvodi značajno zračenje kroz slobodni prostor, Teslu dugo nisu povezivali s bežičnim prijenosom signala. Tako je 1909. godine Marconi dobio Nobelovu nagradu za istraživanja u području radiotehnike, što je Tesla doživio kao veliki udarac. Nepravda je donekle ispravljena 1943. godine, u doba kada su i Tesla i Marconi bili već mrtvi, kada je Vrhovni sud SAD-a poništio Marconijev patent na osnovu kojeg je ostvario prijenos signala preko Atlantika. Sud je naime donio odluku po kojoj nema ništa novog u Marconijevom patentu, već je sve opisano u patentima čiji su autori Lodge, Tesla i Stone.

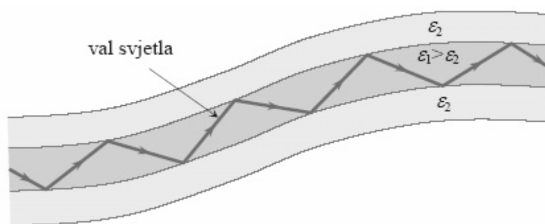
Današnji elektromagnetizam prepoznaje oba načina širenja elektromagnetskih valova: širenje kroz slobodni prostor i vođene (površinske) valove. Na slici 3 pokazano je kako se elektromagnetski val odvaja od antene i širi kroz slobodni prostor. To je danas najčešći mehanizam širenja valova kada promatramo uređaje koji imaju antene (npr. mobilne telefone). Tako i Teslin toranj sa slike 3 možemo zamisliti kao kratki unipol (kratki komad žice) kojem je jedan kraj uzemljen. Pri tome treba imati na umu da, kada govorimo o duljini antene, kao mjernu jedinicu uzimamo valnu duljinu. Budući da je Teslin toranj trebao raditi na otprilike 150 kHz, odnosno na valnoj duljini 2 000 metara, duljina tornja (antene) je bila manja od desetine valne duljine pa tako tu antenu možemo

smatrati kratkom. Drugim riječima, takva antena se promatra na isti način kao i unipoli na mobilnim telefonima (popularna vrsta antena prije 5–10 godina) gdje Zemlju "glumi" metalna šasija samog mobilnog uređaja.



Slika 4. Odvajanje elektromagnetskog vala od antene [2].

Osim što se elektromagnetski valovi mogu slobodno širiti kroz prostor, oni se mogu širiti uz granicu između dvaju dielektrika (odnosno dielektrika i zraka). U tu grupu spadaju površinski valovi koji se šire npr. uz površinu Zemlje. Ako struktura ima i drugu granicu dobivamo sendvičastu strukturu koja predstavlja osnovu rada dielektričnih valovoda, odnosno širenja svjetlosti u svjetlovodu (slika 5). Osnovni mehanizam je princip totalne refleksije – ako zraka svjetlosti pada na granicu između dva sredstva pod kutom većim od kritičnog, dolazi do totalne refleksije (da bi došlo do totalne refleksije, dielektrična konstanta unutrašnjeg sredstva, jezgre, treba biti veća od dielektrične konstante vanjskog sredstva, plašta. Na taj način zraka svjetlosti ostaje zarobljena u svjetlovodu i nema gubitka energije (osim malog gušenja u dielektriku uslijed nesavršenosti materijala). Svjetlovodi su danas osnova svih modernih brzih komunikacijskih sustava – prisutni su svugdje osim u pristupnim mrežama (linijama koje dolaze do naših domova). Napomenimo da je slika širenja elektromagnetskog vala koji se širi kao zraka tek djelomično točna – rigorozna metoda analize pokazuje da je polje prisutno i u rjeđem sredstvu (plaštu) i da jakost polja eksponencijalno opada kako se udaljujemo od granice sredstva.

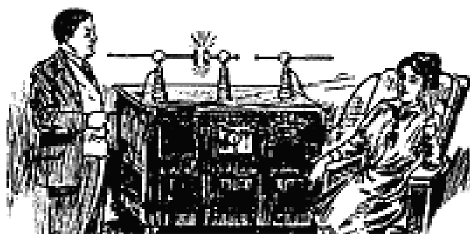


Slika 5. Rasprostiranje elektromagnetskog vala u dielektričnom valovodu (svjetlovodu) [2].

Na sličan način se šire i valovi uz površinu Zemlje (tzv. površinski valovi). Tesla je osim površinskih valova predvidio i pobuđivanje rezonantnih frekvencija Zemlje (tj. frekvencija kod kojih je jakost elektromagnetskog polja posebno velika – upravo te frekvencije je kanio rabiti za prijenos informacija i energije). Rezonantne frekvencije Zemlje koje je Tesla približnim računom predvidio su 6, 18 i 30 Hz. U kasnijim istraživanjima su potvrđene rezonantne frekvencije Zemlje na 8, 14 i 20 Hz (tzv. Schumannove rezonancije).

Osim što je Tesla znao za fenomen vođenja elektromagnetskih valova uz površinu Zemlje, koristio je taj fenomen za izum koji je bio na margini velikih izuma, a koji mu je možda donio najviše novaca: uređaj koji koristi visokofrekvencijske struje za terapijsko djelovanje, odnosno za liječenje raznih bolesti. Naime, dok je osobno svojom nazočnošću bio uključen u eksperimente generiranja i širenja visokofrekvencijskih valova uočio je da se oni ne šire kroz tijelo, već uz površinu ljudskog tijela. Kao dodatni fenomen uočio je da dolazi do laganog zagrijavanja na površini tijela što je ljekovito kod nekih bolesti (npr. kod reumatskih bolesti).

Zagrijavanje tijela odnosno dielektrika elektromagnestkim valovima najviše se koristi kod pripremanja (zagrijavanja) hrane – kod popularne mikrovalne pećnice (ona predstavlja vjerojatno najviše korišteni elektromagnetski rezonator). Zagrijavanje je u nekim primjenama neželjena pojava, posebno kod mobilnih telefona gdje kod dužeg telefoniranja dolazi do lokalnog zagrijavanja tkiva u glavi. Da li je to lokalno zagrijavanje štetno (odnosno u kojoj mjeri jest) – o tome se danas vode mnogobrojne rasprave i eksperimenti.



Medicinski tretman Teslinim transformatorom
(Electtrical Experimenter, 1917).

Slika 6. Izgled uređaja za terapijsko djelovanje visokofrekvencijskim strujama.

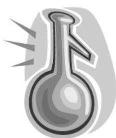
Znanstveno djelovanje velikog svjetskog istraživača i izumitelja Nikole Tesle pokriva mnoga područja tehnike. Usudio bih se dodati da je posebno zanimljiv njegov doprinos u području bežičnih komunikacija jer je zapravo preteča većine današnjih komunikacijskih sustava i tehnoloških rješenja. Njegovi izumi izgledali su prije sto godina kao znanstvena fantastika, a i danas nas s pravom zadivljuju i inspiriraju.

Literatura

[1] NIKOLA TESLA, *Moji pronalasci*, Školska knjiga, Zagreb, 1990.

[2] JURAJ BARTOLIĆ, *Mikrovalna elektronika*, Zagreb, 2006.

[3] ALEKSANDAR MARINČIĆ, *Some recent recognition of pioneering role of Nikola Tesla in development of radio*, Zbornik radova međunarodnog skupa Život i djelo Nikole Tesle, Akademija tehničkih znanosti Hrvatske, Zagreb, 2006.



Demonstriranje zakona očuvanja

Marijan Husak, Varaždin

Ako se ukupni iznos fizičkih veličina u toku procesa ne mijenja, kažemo da su one očuvane. Izražavanje te činjenice zovemo zakonom očuvanja. Među onim zakonima koji se mogu provjeriti u školskim uvjetima su zakon očuvanja količine gibanja, zakon očuvanja energije i zakon očuvanja naboja. Provjera znači, da će izmjereni iznosi očuvanih veličina prije i poslije procesa ostati jednaki. To je kvantitativno provjeravanje. Ta mjerenja su vrlo zahtjevna, ako želimo da pogreška mjerenja bude u granicama prihvatljivosti. Drugi način upoznavanja zakona očuvanja je kvalitativan. Pokusom demonstriramo pojavu, te ukazujemo na očuvanost promatrane fizičke veličine, bez mjerenja. Ova metoda je u nastavi fizike prihvatljivija, te ćemo opisati neke mogućnosti kojima se navedeno može izvesti.

Zakon očuvanja količine gibanja

Zakon glasi: U zatvorenom sistemu, ukupna količina gibanja prije i poslije međudjelovanja, ostaje očuvana.

Izvođenje pokusa moguće je na više načina:

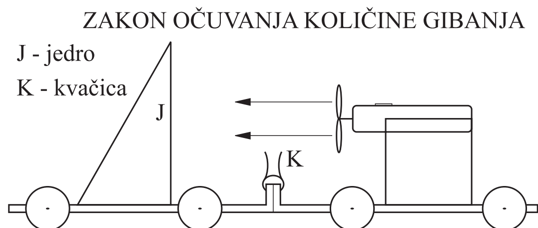
1) Odbijanje kolica

Potrebno je imati dvoja, najbolje jednaka, kolica, sa što manjim trenjem u kotačima. Kolica se mogu odbiti ako:

– između njih stavimo stisnutu oprugu, a kolica povežemo koncem. Pregaranjem konca, kolica se razdvoje;

– umjesto opruge, na jedna i druga kolica stavimo jači magnet, s nasuprot istoimenim polovima. Za pričvršćivanje magneta na kolica, kao i za mnoge druge slične potrebe, praktičan je samoljepivi kit, koji nakon odvajanja ne ostavlja tragove na predmetima, i može se ponovo uporabiti. Može ga se nabaviti u trgovinama sa školskim potrepštinama.

U trgovinama se može naći i džepni baterijski ventilator, koji može korisno poslužiti za ovaj, kao i za druge pokuse. Prema dimenzijama ventilatora, od kartona se izradi postolje na koje se on može smjestiti i pričvrstiti na kolica. Na druga kolica postavimo čvrsti karton, okomito na struju zraka iz ventilatora. Kolica spojimo pridržavajući ih rukom. Otpuštanjem, kolica se razdvoje. Ako ih slijepimo, ili spojimo kvačicom, ostaju mirovati, (sl. 1).

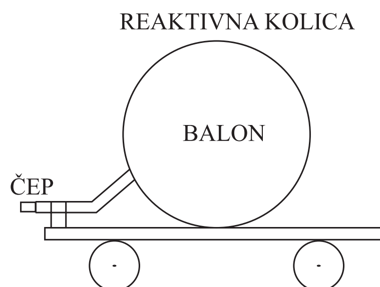


Slika 1.

Ako su kolica približno jednakih masa, tada će i brzine razdvajanja biti jednake. Kolica će stići istovremeno do jednako udaljenih prepreka sa svake strane. Kada opteretimo jedna kolica, njihova će brzina biti obrnuto proporcionalna masama.

2) Reaktivni pogon

Tim se nazivom služimo ako iz tijela izlazi usmjereni mlaz plina. Najjednostavniji primjer je da pustimo iz ruke prethodno napuhani balon. Pravilnije gibanje postižemo ako na balon prilijepimo vrpcu, ili više njih, duljine oko 1 m. U oba slučaja, bolji su rezultati, ako je balon duguljast. Prema sl. 2, možemo improvizirati kolica na reaktivni pogon. Umjesto čepa, otvor možemo do puštanja u pogon držati začepljen prstom. Takva igračka može se ponekad kupiti.



Slika 2.

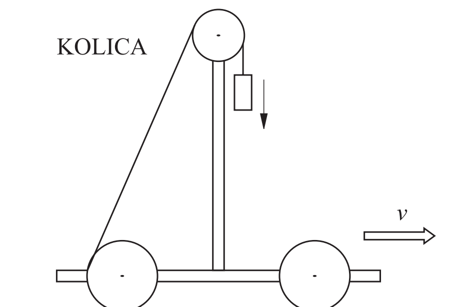
Uz više truda, pokus je upečatljiviji, ako balon s cijevčicom na otvoru montiramo da klizi po žici, razapetoj preko dvorane.

Konačno, reaktivni pogon su i kolica s ventilatorom.

Zakon očuvanja energije

Pokusi demonstriraju pretvorbu energije iz jednog oblika u drugi, ali ne možemo pokazati da je energija očuvana u cijelosti, jer ni u jednom pokusu ne možemo izbjeći trenje i toplinu.

– Na sl. 3, prikazan je princip izvedbe kolica za pokus. Padajući uteg povlači kolica, E_p se pretvara u E_k. Vožnjom (guranjem) kolica unatrag, konac se namotava i podiže uteg, E_k prelazi u E_p.



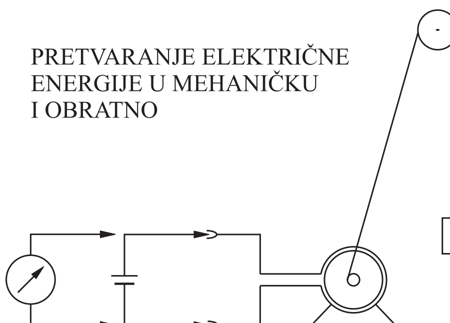
Slika 3.

– Kolicima stisnemo oprugu uza "zid", izvršili smo rad. Otpuštanjem, elastična energija pretvara se u kinetičku, a ova opet u rad, kada se kolica zaustave.

– Pretvaranje potencijalne energije u kinetičku i obratno, pokazujemo na primjeru loptice koja odskače.

– Puštanjem predmeta da padne na vagu s oprugom, u trenutku pada, vaga pokazuje više, nego kad je isti predmet položen na vagu. Višak je elastična energija dobivena iz kinetičke, a ova iz potencijalne.

– Za pokus mogu poslužiti i autići igračke, koje pokreću različite energije: Elastična, električna ili energija rotacije.



Slika 4.

– Primjer pretvaranja energije je i uteg koji harmonički titra.

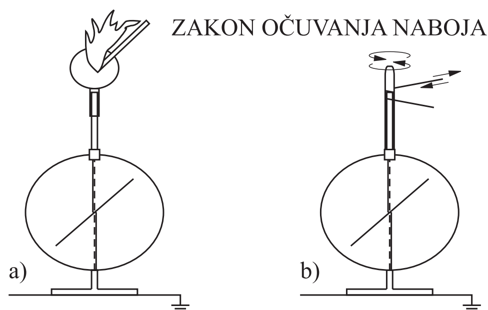
– Za pretvaranje električne energije u mehaničku i obratno, može poslužiti uređaj, čiji princip prikazuje sl. 4. Motor (od igračke, isluženog kazetofona i sl.) priključen na bateriju, podiže uteg. Ako bateriju zamijenimo voltmetrom, on će pokazivati napon, kad se uteg spušta.

Zakon očuvanja naboja

Ukupni naboj u prirodi, pa tako i u pokusima, ostaje očuvan. To pokazuju sljedeći pokusi:

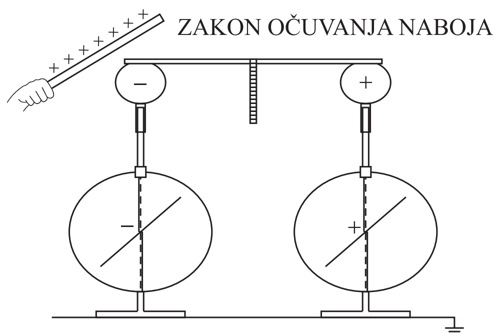
– U Faradayevu čašu (sl. 5), nataknutu na uzemljeni elektroskop, stavimo krpu i plastični štap (ravnalo, npr.). Dodirom kazaljku dovedemo na nulu. Štap malo protrljamo i izvučemo. Kazaljka se otkloni zbog naboja na krpi. Vraćanjem štapa, koji nosi jednaki suprotni naboj, u čašu, naboji se neutraliziraju, a kazaljka se vraća na nulu.

– Pokus sa sličnim ishodom može se izvesti i drugačije. Na šipku uzemljenog elektroskopa, nataknemo plastičnu cjevčicu, npr. od kemijske olovke (sl. 6). Kazaljku dovedemo na nulu. Uzicu, omotanu oko cjevčice, povlačimo nekoliko puta amo-tamo, kako bi se rotirajući natrljala. Uklonimo uzicu, kazaljka je još uvijek na nuli. Skinemo cjevčicu, kazaljka se otkloni. Vratimo cjevčicu, vraća se i kazaljka na nulu. Razdvojeni naboji su se neutralizirali.



Slika 5. *Slika 6.*

– Drugi je pokus prikazan na slici 7. Uzemljene elektroskope povežemo metalnim mostom s ručkom od izolatora. Približavanjem nabijenog štapa kazaljke elektroskopa se otklone zbog razdvajanja naboja (influencija). Držeći štap u tom položaju, maknemo most, a onda i štap. Elektroskopi ostaju nabijeni. Ponovnim vraćanjem mosta, elektroskopi se izbijaju. To pokazuje da su razdvojeni naboji suprotnih predznaka, a istog iznosa.



Slika 7.



ASTRONOMIJA

Kamenje koje pada s neba

Dario Hrupec[1], *Koprivnica*

Uvod

U sklopu ovogodišnje ljetne škole mladih fizičara, održane od 18. do 24. lipnja u Labinu, bio je organiziran odlazak u Višnjan gdje je poznati hrvatski astronom Korado Korlević za sudionike škole održao posebno predavanje o asteroidima.

Datum ovog izleta poklopio se s ljetnim solsticijem[2] kad u Višnjanu započinje već tradicionalni *Astrofest* – festival astronomije, vina i glazbe. Učesnici škole tako su imali priliku prisustvovati predavanju na otvorenom o solsticiju te pogledati novu zvjezdarnicu u Tićanu pored koje je izrađena kamena replika prethistorijskog sunčevog opservatorija.

Pogrešna slika Sunčeva sustava

Sunčev sustav obično zamišljamo kao sustav od devet planeta koji u jednoj ravnini kruže oko Sunca. Takva je slika zapravo previše pojednostavljena. Čitav Sunčev sustav ispunjen je milijardama malih tijela: od zrnaca prašine preko meteorida do asteroida[3] i kometa.

Asteroidi su tijela u promjeru manja od 1 000 km koja se poput malih planeta gibaju oko Sunca. Petnaestak ih ima u promjeru više od 250 km [2]. Što su im linearne dimenzije manje to ih ima više. Većina asteroida nalazi se u asteroidnom pojasu između Marsa i Jupitera gdje pravilo Titiusa i Bodea[4] predviđa planet. Zbog snažnog Jupiterovog gravitacijskog djelovanja taj se planet nije nikad ni formirao. U brojnim međusobnim sudarima dio asteroida biva izbačen iz asteroidnog pojasa te se samostalno giba oko Sunca presijecajući staze planeta. Izvan asteroidnog pojasa nalazi se danas tek par postotaka od ukupnog broja asteroida jer su planeti s vremenom "počistili" područja svojih staza. Neke asteroide planeti su gravitacijski zarobili pa su postali njihovi sateliti (kao u slučaju Marsovih satelita Deimosa i Fobosa). Asteroidi su općenito nepravilna oblika i okreću se oko svojih osi. Veći asteroidi mogu čak imati vlastite satelite (slika 1).

---

[1] Autor je asistent u Institutu "Ruđer Bošković" u Zagrebu, e-mail: dario.hrupec@irb.hr

[2] Solsticij ili **suncostaj** je trenutak kad se Sunce u prividnom gibanju najviše odmakne od nebeskog ekvatora. Ljetni solsticij obično je 22. lipnja i tada je dan najdulji, a noć najkraća u godini.

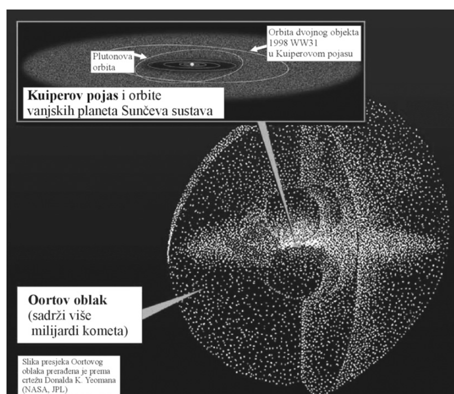
[3] Naziv asteroid (poput zvijezde) skovao je početkom 19. stoljeća Herschel jer je asteroide u teleskopu lako zamijeniti sa zvijezdama [2]. U hrvatskom jeziku postoji bolji naziv – **planetiod** (poput planeta).

[4] To matematičko pravilo, koje vrlo dobro određuje udaljenosti planeta od Sunca, objavljeno je 1772. godine, a do danas nije fizikalno potkrijepljeno. Pravilo je neka vrsta Balmerove formule za koju se još nije pojavio odgovarajući Niels Bohr.



Slika 1. Asteriod 243 Ida prvi je za kojeg se zna da ima vlastiti satelit. Duljina Ide je oko 60 km, a njezin mjesec Daktil ima promjer od samo 1.4 km. Idu je 1884. godine iz Beča otkrio astronom Johan Palisa koji je iz Pule također otkrio 28 asteroida. Tome u čast jedan se dio ide naziva Pola regio.
Izvor: http://nssdc.gsfc.nasa.gov/imgcat/html/object_page/gal_0202561352.html

Devedesetih godina dvadesetog stoljeća otkriven je Kuiperov pojas, područje ogromnog broja malih tijela koje se proteže od 35 aj[5] do čak 1 000 aj (slika 2). Jedno od najvećih tijela na početku Kuiperovog pojasa je Pluton koji je otkriven 1930. godine i tada proglašen devetim planetom. Zbog vrlo izdužene staze i značajnog otklona orbite od ekliptike, Plutonov status planeta za neke je astronome upitan od početka. Danas sve više astronoma drži da Sunčev sustav ima osam planeta (Merkur, Venera, Zemlja, Mars, Jupiter, Saturn, Uran i Neptun), a Plutona smatra predvodnikom KBO[6]. U tom kontekstu jasno je da ni kontroverzni objekt "2003 UB_{313}" nije deseti planet[7]. Orbita još jednog "kandidata" za deseti planet, dvojnog[8] objekta 1998 WW31, prikazana je na slici 2.



Slika 2. Oortov oblak kometa tisuću je puta veći od Plutonove orbite – pomjer mu je oko 1 svjetlosne godine što je četvrtina udaljenosti do najbliže zvijezde. Ovo je prava slika Sunčeva sustava. Unutrašnji dio Oortovog oblaka, Kuiperov pojas, povećan je u gornjem isječku. Originalna slika preuzeta je na web stranici
http://www.harmsy.freeuk.com/oimages/oort_cloud.jpg

---

[5] aj (astronomska jedinica) je mjerna jedinica duljine, srednja udaljenost od Zemlje do Sunca, približno 150 milijuna km

[6] KBO – Kuiper Belt Objects, tijela koja se gibaju u Kuiperovom pojasu.

[7] Pogledajte članak M. Milin, *Da li je otkriven deseti planet?* MFL **LVI** 3 (2005. – 2006.)

[8] Sustav Pluton–Haron također je dvojni objekt.

Nedavna otkrića sve većeg broja velikih objekata Kuiperovog pojasa koja se uklapaju u staru (danas više neprimjerenu) definiciju planeta, dovela su na kraju do redefiniranja pojma planet. Novu definiciju planeta izgasat će 2 500 astronoma u Pragu od 14. do 25. kolovoza 2006. na 26. generalnoj skupštini Međunarodne astronomske unije [9]. U vrijeme pisanja članka konferencija je bila u tijeku, ali definicija još nije bila izglasana. Prevlada li konzervativna opcija broj "planeta" mogao bi se popeti s 9 na 12 te nastaviti rasti. Nova definicija izvedena iz fundamentalnih principa (i oslobođena sentimentalnosti prema Plutonu) mogla bi biti: *Planet je krajnji proizvod akrecijskog diska oko primarne zvijezde ili protozvijezde* [9].

Kometi su složena[10] mala tijela koja se oko Sunca gibaju po jako izduženim putanjama. Svojstva njihovih staza (posebice linearni ekscentricitet[11]) pokazuju da velika većina kometa pripada Sunčevu sustavu. S obzirom da putanje graniče s parabolama, oblak kometa (tzv. *Oortov oblak*) je ogroman – tisuću puta veći od Plutonove orbite – i sadrži više milijardi kometa (slika 2). Prema najnovijim procjenama, temeljenim na zasjenjenju X-zraka iz dalekih izvora, Sunčev sustav sadrži čak bilijardu (10^{15}) tijela veličine između 10 i 100 m [8].

Mase kometa, prema realističnim procjenama, kreću se u rasponu od jedne tone do 10^{16} kg (kao Marsov satelit Fobos). Za razliku od asteroida, koji su čvrste gromade kamena i metala, građa kometa je zamršena. Tipični komet sastoji se od jezgre, kome i repa (*zvijezda repatica*). Jezgra je čvrsta, veličine 1 – 10 km. Zbog istjecanja tvari[12] formira se koma, veličine 50 do 100 000 km, te rep čija duljina može doseći čak 10 milijuna kilometara.

Meteoridi su ostaci (razmrvljeni manji komadi – od zrnaca prašine do par metara u promjeru) koji potječu od asteroida ili kometa, a gibaju se u blizini Zemljine staze. I dok asteroidi i kometi (srećom!) iznimno rijetko pogađaju Zemlju, meteoridi često upadaju u Zemljinu atmosferu postajući tako *meteori* i *meteoriti*.

Nebesko kamenje

Meteor (*nebeska krijesnica* ili *zvijezda padalica*) je širi naziv za svemirsko tijelo koje prolazi kroz atmosferu, uključujući i popratnu pojavu[13]. Tijela manja od 10 cm (mase manje od nekoliko kilograma) ne stižu do površine Zemlje nego potpuno sagore. To se događa u vrlo visokim slojevima atmosfere, na visinama od 70 do 130 km. Prosječni je meteor veličine milimetra i mase nekoliko miligrama. Tijela koja stignu do tla zovemo *meteoriti*.

Meteoriti su stoljećima predstavljali nedokučivu tajnu i bili su nazivani "nebeskim kamenjem" [2]. Danas se zna da većinu meteorita čine odlomci asteroida koji su se kretali unutar Marsove orbite. Prije nego su pali na tlo meteoriti su dugo lutali međuplanetarnim prostorom – kameni meteoriti do 50 milijuna godina, a željezni čak do dvije milijarde godina.

---

[9] http://www.astronomy2006.com/

[10] Kometi nisu samo *prljave snježne grude* kako se dosad mislilo. Pogledajte rezultate tekuće misije *Stardust* na web stranici http://www.nasa.gov/mission_pages/stardust/main/

[11] Ekscentricitet *kružnice* jednak je nula, *elipse* manji od jedan, *parabole* jednak jedan i *hiperbole* veći od jedan.

[12] Kometi su trošni i s vremenom se mijenjaju, stoga su i njihove staze podložne promjenama.

[13] Dominantna popratna pojava je svijetli trag kojega stvara ionizirani stupac zraka. Druga popratna pojava je zvuk.

DUPLERICA

DUPLERICA

Meteoriti mogu biti različitih veličina, od povećeg kamena pa do gromada od čak 10 km u promjeru. Većina ih padne u oceane, no pokoji pogodi i gusto naseljena područja (slika 3).



Slika 3. Oštećeni automobil na kojeg je u New Yorku pao "nebeski kamen". Izvor: http://www.ens-lyon.fr/Planet-Terre/Infosciences/Planetologie/Meteorites/Images/meteor-NY.jpg

Udari meteorita ostavili su brojne kratere na Mjesecu, Merkuru, Marsu i brojnim drugim tijelima Sunčeva sustava. Zemljini "ožiljci" nisu tako vidljivi (premda naravno postoje) jer geološka i atmosferska aktivnost neprestano obnavljaju površinu planeta.

Učestalost padanja na Zemlju, na našu sreću, naglo opada s veličinom meteorita – približno eksponencijalno (slika 4). Ekstremni primjeri sudara su poznati događaji:

– Tunguska katastrofa 1908. godine;

– Isčeznuće dinosaura i drugih vrsta prije 65 milijuna godina;

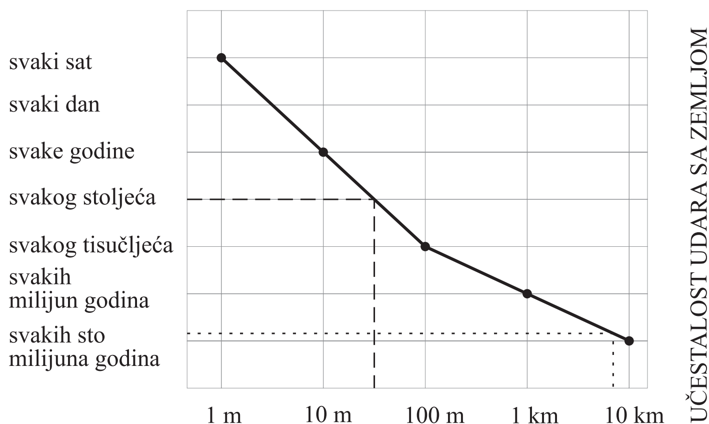
– Nastanak Mjeseca (?!) prije 4 milijarde godina[14].

Dnevno na Zemlju padne u prosjeku oko 10 tona meteorita.

Osim meteorita (većeg kamenja koje padne na tlo) i meteora (manjih čestica koje sagore u atmosferi) na Zemljinu površinu neprekidno padaju i *mikrometeoriti*. To su čestice manje od 10 μm koje su premale da bi se jako zagrijale i sagorjele prolaskom kroz atmosferu. Umjesto toga, one slijeću na Zemljinu površinu u ukupnom dnevnom iznosu od čak 10 000 tona na dan[15].

---

[14] Prema ovoj, danas najizglednijoj teoriji, mladu Zemlju pogodio je objekt veličine Marsa. Prsten krhotina iz tog sudara gravitacijskim je privlačenjem stvorio Mjesec.



Slika 4. Učestalost sudara velikih meteorita sa Zemljom u ovisnosti o njihovoj veličini. Podatke za sliku preuzeo sam iz reference [1]. Crtkana linija odgovara Tunguskom meteoritu iz 1908., a točkasta linija meteoritu koji je prije 65 milijuna godina doveo do iščeznuća dinosaura i drugih biljnih i životinjskih vrsta koje su dotad živjele na Zemlji.

Svemirska straža

U svom romanu *Sastanak s Ramom* [4], objavljenom prvi puta 1973. godine, klasik znanstvenofantastične književnosti Arthur Clarke zamislio je između ostalog projekt Svemirske straže (engl. *Spaceguard*). Dvadeset je godina kasnije Clarke istu ideju razradio u romanu *Božji čekić*. Roman je izvorno objavljen 1993. godine, a 2002. godine izašao je i hrvatski prijevod [5].

Konačno, tri godine nakon Božjeg čekića, 1996. osnovana je međunarodna organizacija *Spaceguard Foundation* [15] čiji je osnovni cilj otkrivanje objekata NEO [16] – potencijalno opasnih objekata bliskih Zemlji (danas ih je poznato oko 500). Dio Svemirske straže čine i astronomi iz Višnjana.

Mada se ime Spaceguard vezuje uz Arthura Clarkea, ljudska svijest o opasnosti od kozmičkih objekata počela se razvijati puno ranije – od 1770. godine kad je komet Lexell prošao blizu Zemlje. Godine 1898. otkriven je *433 Eros*, prvi asteroid koji se približava Zemlji. Sustavno pretraživanje objekata NEO započeli su još 1973. godine Helin and Shoemaker.

Ključan događaj u razvoju opće svijesti od opasnosti bliskih asteroida i kometa svakako je bio spektakularan sudar kometa *Shoemaker Levy 9* s Jupiterom u srpnju 1994. godine.

Na kraju, kao što se Spaceguard inspirirao znanstvenofantastičnom književnošću, tako se nedavo i književnost ponovno inspirirala lovce na asteroide. I to onim domaćim, Istarskima. Preporučam Vam duhoviti roman Dejana Šorka *Ja i Kalisto* [7].

---

[15] http://spaceguard.esa.int/

[16] NEO – *Near Earth Objects*

Zaključak

Zanimanje za mala tijela Sunčeva sustava izuzetno se povećalo zadnjih desetak godina. Razlog nije samo potencijalno spašavanje svijeta od katastrofalnog sudara. Porast znanja o malim tijelima značajno je unaprijedilo naše razumijevanje nastanka i razvoja Sunčeva sustava. Asteroidi su postali zanimljivi i kao budući bogati rudnici vrijednih sirovina za gradnju velikih svemirskih letjelica u Zemljinoj ili Mjesečevoj orbiti.

Proučavanjem Halleyeva kometa 1986. godine otkriveno je da njegova jezgra sadrži ugljik, vodik, kisik i dušik u gotovo istom omjeru u kojem se oni nalaze i na Zemlji [3]. To znači da su kometi, čija je učestalost sudara s mladom Zemljom bila puno veća nego što je danas, u principu mogli donijeti sjeme života. Takve ideje (nazvane *panspermija*) koje opovrgavaju kemijsku evoluciju na Zemlji, sada više ne izgledaju besmislene kao u doba kad ih je predložio jedan od najvećih astronoma 20. stoljeća, Fred Hoyle.

Mali dio kometa Oortova oblaka ima ekscentricitet jedan (ili nešto veći od jedan). Putanje tih kometa su otvorene (parabole ili hiperbole) i oni mogu napustiti Sunčev sustav te prijeći u sustav susjedne zvijezde. Moguće je također da su takvi kometi stigli iz susjednog zvjezdanog sustava. Dakle, elementi koji grade organske spojeve mogu se prenositi od zvijezde do zvijezde.

Posebno je zanimljivo da su zadnjih godina u međuzvjezdanom prostoru otkrivene i složene organske molekule (među kojima i jedna od 20 aminokiselina – glicin). Kao što u spomenutom Clarkeovom romanu u Sunčev sustav ulazi izvanzemaljski svemirski brod Rama (kojeg otkriva Svemirska straža), tako u Hoyleovom romanu *Crni oblak* [6] u naš Sunčev sustav ulazi inteligentni, međuzvjezdani oblak. To je još jedan SF klasik kojega iskreno preporučujem jer potiče maštu i zanimanje za astronomiju te znanost općenito.

Literatura

[1] C. R. CHAPMAN, *The hazard of near-Earth asteriod impacts on earth*, Earth. Planet. Sci. Lett. 222 (2004) 1–15.

[2] VLADIS VUJNOVIĆ, *Astronomija*, Školska knjiga (2005) 189–218 (*Mala tijela Sunčeva sustava*).

[3] R. BURNHAM, A. DYER & J. KANIPE, *Astronomija*, Duševič & Kršovnik (2003) 118–169 (*Naš Sunčev sustav*).

[4] ARTHUR C. CLARKE, *Rendezvous With Rama*, Gollancz (2006).

[5] ARTHUR C. CLARKE, *Božji čekić*, Izvori (2002).

[6] FRED HOYLE, *Crni oblak*, Naprijed (1964).

[7] DEJAN ŠORAK, *Ja i Kalisto*, Algoritam (2002).

[8] CHANG, H.-K. et al. Nature 442 (2006) 660–663.

[9] STEVEN SOTER, *What is a planet*?
`http://arxiv.org/ftp/astro-ph/papers/0608/0608359.pdf`

ZABAVNA MATEMATIKA

Šesterokuti

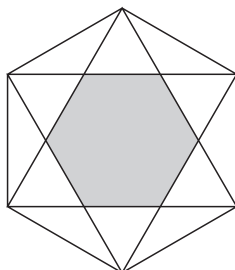
Sat geometrije. Profesor Šestić bio je kratak:

– Godina je tek počela pa vas neću zamarati teškim zadacima. Nacrtajte pravilni šesterokut i povucite šest njegovih kraćih dijagonala. Što primjećujete?

– One tvore opet pravilni šesterokut! – odgovorio je razred u horu.

– A koliko je on puta manji od polaznog?

– Neće nas, a? – tiho su se oglasila sumnjala.



Je li odgovor uistinu težak ili nije?

Zlato i srebro

Numizmatičar Gold ima u svojoj kolekciji određen broj zlatnika i srebrnjaka. Masa svakoga zlatnika je 25 grama, a srebrnjaka 16 grama. Masa svih zlatnika i srebrnjaka zajedno iznosi točno pola kilograma.



Koliko zlatnika, a koliko srebrnjaka ima Gold?

Rimska jednakost

Donja jednakost sastavljena od štapića jednake duljine očigledno nije točna. Ona to može postati pomicanjem samo jednog štapića. Netko će brzo otkriti jedno rješenje, netko drugo, ali koliko zapravo ima različitih rješenja?

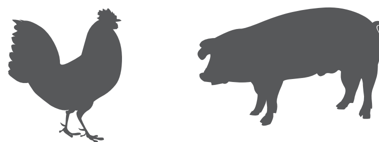
$$\mathrm{XI} + \mathrm{X} - \mathrm{I} = \mathrm{XX} - \mathrm{II}$$

Tu nastupate vi.

Kokoši i svinje

Mnogi matematički problemi najlakše se rješavaju primjenom jednadžbi, ali često mala domišljatost može uštedjeti vrijeme i trud. Evo jednog primjera takve vrste:

U velikom seoskom dvorištu nalaze se kokoši i svinje. Te životinje imaju ukupno 94 glave i 250 nogu.



Razmislite malo i onda recite koliko je u tome dvorišu kokoši, a koliko svinja.

Mala igra

Na pripremama za matematička natjecanja mladi matematičari rješavali su i probleme iz zabavne matematike. Izdvojili smo problem s pločicama i slovima. Poslušajmo:

– Na stolu je postavljen niz od 10 kružnih pločica sa slovima Ć, E, E, I, J, K, O, P, R, T tako da piše TKO ĆE PRIJE. Možete li od toga niza dobiti 5 stupaca s po dvije pločice uz jedan jedini uvjet: neka pločica preskače preko točno dvije pločice prema lijevo ili prema desno i dolazi iznad sljedeće pločice?

– To je lako? – odmah su komentirali članovi grupe.

(T)(K)(O)(Ć)(E)(P)(R)(I)(J)(E)

Je li to tako, ustanovite i vi.

Zdravko Kurnik



ZADACI I RJEŠENJA

Redakcija, iz tehničkih razloga, daje ovo upozorenje:

Krajnji rok za primanje rješenja iz ovog broja je 31. prosinca 2006. Rješenja (i imena rješavatelja) bit će objavljena u br. 3/227.

Ujedno molimo da pripazite na upute rješavateljima koje su na dnu treće strane omota.[1]

A) Zadaci iz matematike

3007.* Ako je

$$a=\sqrt{\sqrt{3}-\sqrt{2}}\Big(\sqrt{\sqrt{3}-1}+\sqrt{\sqrt{3}+1}\Big),$$

$$b=\sqrt{\sqrt{3}+\sqrt{2}}\Big(\sqrt{\sqrt{3}-1}-\sqrt{\sqrt{3}+1}\Big),$$

koliko je $a+b$?

3008.* Ako je x rješenje jednadbe

$$x^2-x-1=0,$$

pokaži da se za svaki prirodan broj $n\geqslant 2$ može zapisati

$$x^n=a_nx+b_n.$$

Odredi a_n i b_n za svaki $n\geqslant 2$.

3009. Nađi sva rješenja jednadžbe

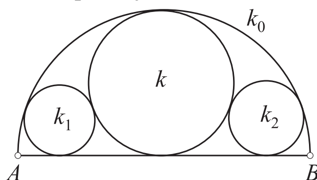
$$\log_{2-2x^2}(2-x^2-x^4)=2-\frac{1}{\log_{\frac{4}{3}}(2-2x^2)}.$$

3010. Unutar paralelograma $ABCD$ dana je točka M, a unutar trokuta AMD točka N takva da je

$$\sphericalangle MNA+\sphericalangle MCB=\sphericalangle MND+\sphericalangle MBC=180^\circ.$$

Dokaži da su pravci MN i AB paralelni.

3011. Dana je polukružnica k_0 s promjerom $\overline{AB}$. Kružnice k, k_1, k_2 dodiruju k_0 i dužinu $\overline{AB}$; kružnica k dodiruje k_1 i k_2. Neka su r, r_1, r_2 redom polumjeri od k, k_1, k_2.



[1] Zadaci označeni zvjezdicom predviđeni su prvenstveno za 15 – 16 godišnje učenike.

Dokaži da je

$$\frac{1}{\sqrt{r_1}}+\frac{1}{\sqrt{r_2}}=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{r}}.$$

3012.* Unutar polukružnice polumjera 1 koja je omeđena promjerom, upisane su dvije kružnice polumjera r_1 i r_2 od kojih svaka dodiruje polukružnicu i njezin promjer, te se dodiruju međusobno. Dokaži nejednakost

$$r_1+r_2\leqslant 2(\sqrt{2}-1).$$

3013. Neka je P točka na kružnici upisanoj u jednakostraničan trokut ABC, duljine stranice 2. Dokaži jednakost

$$|PA|^2+|PB|^2+|PC|^2=5.$$

3014. Na stranicama $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$ trokuta ABC konstruirani su s vanjske strane jednako orijentirani kvadrati $ABMN$ i $BCQP$. Njihova središta su O_1 i O_2, K je polovište stranice $\overline{AC}$ i L je polovište od $\overline{MP}$. Dokaži da je četverokut O_1LO_2K kvadrat.

3015. Odredi produkt

$$\cos\frac{2\pi}{17}\cos\frac{4\pi}{17}\cos\frac{6\pi}{17}\cos\frac{8\pi}{17}\cdot$$
$$\cdot\cos\frac{10\pi}{17}\cos\frac{12\pi}{17}\cos\frac{14\pi}{17}\cos\frac{16\pi}{17}.$$

3016. Dokaži da za pozitivne brojeve a, b, c vrijedi nejednakost

$$\frac{a(3a-b)}{c(a+b)}+\frac{b(3b-c)}{a(b+c)}+\frac{c(3c-a)}{b(c+a)}\leqslant\frac{a^3+b^3+c^3}{abc}.$$

3017. Koliko puta treba baciti dva novčića da vjerojatnost pojave dva grba bude veća od $\frac{1}{2}$?

3018. Na koliko načina se na šahovskoj ploči 8×8 mogu postaviti crni i bijeli skakač tako da se međusobno ne napadaju?

3019. Dana je funkcija $f:\mathbf{R}\backslash\{\frac{1}{3}\}\longrightarrow\mathbf{R}$ relacijom $f\left(\dfrac{x+1}{1-3x}\right)=x-f(x)$.

Da li je 2006 višekratnik od $f(1)$?

3020. Baza piramide je romb čija duljina stranice je jednaka a, i šiljasti kut između njegovih stranica je α. Svaki prostorni kut uz bridove baze je φ. Odredi ukupnu površinu bočnih strana piramide.

B) Zadaci iz fizike

OŠ – 250. Stojeći nepomično na pomičnim stepenicama, putnik u trgovačkom centru stigne s prvog kata na drugi za 8 s. Kad se uspinje nepomičnim stepenicama potrebne su mu 24 s. Za koje će vrijeme putnik stići s prvog na drugi kat, ako se uspinje pomičnim stepenicama?

OŠ – 251. Da bi odredio promjer žice učenik je namotao 1.57 m žice na olovku promjera 5 mm, tako da su navoji žice jedan do drugoga. Navoji su prekrili olovku u duljini 10 cm. Koliki je promjer žice?

OŠ – 252. Koliki rad izvrši trkač svladavajući otpor zraka na putu 100 m, ako na 1 m površine djeluje otpor od 0.5 kN? Dio površine tijela na koji izravno djeluje otpor zraka iznosi $0.5\,\mathrm{m}^2$.

OŠ – 253. U čašu ulijemo vode od $100\,^\circ\mathrm{C}$ do $\frac{3}{4}$ volumena čaše, a zatim dodamo hladne vode toliko da čaša bude puna. Odredite kolika je konačna temperatura vode u čaši, ako je hladna voda imala temperaturu $20\,^\circ\mathrm{C}$.

1343. Promatrač stoji kraj početka prvog vagona vlaka koji se počne gibati jednoliko ubrzano. Prvi vagon prolazi pokraj promatrača 5 s. Koliko će dugo pored njega prolaziti peti vagon, ako su svi vagoni jednake duljine?

1344. Astrolozi tvrde da na život osobe utječe položaj planeta prilikom njezina rođenja. Da biste provjerili da li taj utjecaj potječe od gravitacijske sile, usporedite sljedeće dvije vrijednosti:

(a) iznos promjene gravitacijske sile na dijete u rodilištu zbog promjene položaja planeta Jupitera u jednom danu i

(b) vrijednost promjene gravitacijske sile na dijete zbog prisustva ili odsustva kamiona mase 4 t na parkiralištu udaljenom 75 m od rodilišta.

Jupiter ima masu $1.9\cdot10^{27}$ kg, njegova srednja udaljenost od Sunca je $0.78\cdot10^{9}$ km, a period revolucije mu je 11.9 godina. Pretpostavite da je putanja Jupitera, kao i Zemlje, kružna, te da je udaljenost Zemlje od Sunca $1.5\cdot10^{8}$ km. Odaberite područje kada su planeti najbliži. Komentirajte rezultate.

1345. Dijete puše u opnu od sapunice i pravi mjehure. Hoće li se mjehuri uvijek dizati uvis? Da li na to utječe temperatura prostorije? Obrazložite odgovor.

1346. U smjesu koja se sastoji od 21 l vode i 11 kg leda na temperaturi $0\,^\circ\mathrm{C}$, ulije se tekuće olovo pri temperaturi njegova tališta. Na kraju miješanja, temperatura smjese iznosi $100\,^\circ\mathrm{C}$, i pri toj temperaturi ispari 205 g vode. Koliko je olova uliveno u smjesu, ako je temperatura tališta olova $327\,^\circ\mathrm{C}$, specifična toplina taljenja olova $\lambda_{to} = 25\,103\ \mathrm{J/kg}$, specifični toplinski kapacitet olova $c_o = 130\ \mathrm{J/kgK}$, specifična toplina taljenja leda je $\lambda_{tl} = 3.35\cdot10^5\ \mathrm{J/kg}$, a specifična toplina isparavanja vode $q_i = 22.6\cdot10^5\ \mathrm{J/kg}$?

1347. Kružna zavojnica sa 100 zavoja, površine poprečnog presjeka $100\,\mathrm{cm}^2$, postavljena je u homogeno magnetsko polje, jakosti $105\ \mathrm{A/m}$, i to tako da se os zavojnice poklapa sa smjerom silnica magnetskog polja. Kolika količina naboja proteče kroz kratko spojenu zavojnicu, kad se u nju stavi željezna šipka, relativne permeabilnosti 500? Otpor jednog zavoja zavojnice iznosi $2\,\Omega$.

1348. Dvije metalne kugle pozitivno su nabijene, i to prva polumjera $2\cdot10^{-2}$ m, na potencijal 200 V, a druga polumjera $5\cdot10^{-2}$ m, na potencijal 80 V. Kugle dovedemo u međusobni kontakt, a zatim ih razmaknemo na udaljenost 0.4 m. Kolika će biti jakost električnog polja na pola te udaljenosti?

1349. Iz aviona, koji leti na visini 3 000 m, treba snimiti površinu od $0.2\,\mathrm{km}^2$ na Zemlji, koja ima oblik kvadrata. Kolika mora biti jakost leće objektiva upotrijebljenog fotoaparata, ako površina snimke na fotografskoj ploči treba iznositi $8\,\mathrm{cm}^2$?

C) Rješenja iz matematike

2979. *Nađi sve proste brojeve* p *takve da je* $8p^2+1$ *također prost broj.*

Rješenje. Kvadriranjem brojeva $p = 3k+1$ ili $p = 3k-1$ dobivamo

$p^2 = 9k^2+6k+1$ ili $p^2 = 9k^2-6k+1$,

a oba broja pri djeljenju s 3 daju ostatak 1. Znači da je broj $8p^2+1$ djeljiv s 3. Ako je $p=3$, tada je $8p^2+1=73$ prost broj.

Barbara Štimac (2),
Gimnazija Antuna Vrančića, Šibenik

2980. *Dokaži da produkt osam uzastopnih prirodnih brojeva ne može biti četvrta potencija nekog prirodnog broja.*

Rješenje. Pretpostavimo suprotno, tj. da postoji osam uzastopnih prirodnih brojeva čiji produkt je četvrta potencija prirodnog broja. Neka je n najmanji od promatranih brojeva. Njihov produkt je

$$\begin{aligned} m^4 &= n(n+1)\cdot\ldots\cdot(n+7) \\ &= (n(n+7))\cdot((n+1)(n+6))\cdot \\ &\quad\cdot((n+2)(n+5))\cdot((n+3)(n+4)) \\ &= (n^2+7n)\cdot(n^2+7n+6)\cdot \\ &\quad\cdot(n^2+7n+10)\cdot(n^2+7n+12). \end{aligned}$$

Supstitucijom $t=n^2+7n+6$ dobivamo:

$$\begin{aligned} m^4 &= (t-6)t(t+4)(t+6) \\ &= (t^2-36)(t^2+4t) \\ &= t^4+4t^3-36t^2-144t \\ &= t^4+4t(t^2-9t-36) \\ &= t^4+4t(t+3)(t-12). \end{aligned}$$

Radi $n\geqslant 1$ je $t\geqslant 14$, $t-12>0$ pa je

$$m^4>t^4. \tag{1}$$

S druge strane je

$$\begin{aligned} m^4 &= t^4+4t^3-36t^2-144t \\ &< t^4+4t^3+6t^2+4t+1=(t+1)^4, \end{aligned}$$

$$m^4<(t+1)^4. \tag{2}$$

Iz (1) i (2) slijedi

$$t^4<m^4<(t+1)^4,$$

tj.

$$t<m<t+1,$$

što je kontradikcija. Zato takvih osam brojeva ne postoji.

Ur.

2981. *Dokaži nejednakost*

$$\frac{1}{\sqrt{1+\log_{\sin x}\cos x}}+\frac{1}{\sqrt{1+\log_{\cos x}\sin x}}\leqslant\sqrt{2},$$

$$x\in\left\langle 0,\frac{\pi}{2}\right\rangle.$$

Rješenje.

$$\frac{1}{\sqrt{1+\log_{\sin x}\cos x}}+\frac{1}{\sqrt{1+\log_{\cos x}\sin x}}\leqslant\sqrt{2},$$

$$\frac{1}{\sqrt{\log_{\sin x}\sin x+\log_{\sin x}\cos x}} + \frac{1}{\sqrt{\log_{\cos x}\cos x+\log_{\cos x}\sin x}}\leqslant\sqrt{2},$$

$$\frac{1}{\sqrt{\log_{\sin x}(\sin x\cdot\cos x)}} + \frac{1}{\sqrt{\log_{\cos x}(\sin x\cdot\cos x)}}\leqslant\sqrt{2},$$

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\log_{\sin x\cdot\cos x}\sin x}}}+\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\log_{\sin x\cdot\cos x}\cos x}}}\leqslant\sqrt{2}$$

$$\sqrt{\log_{\sin x\cdot\cos x}\sin x}+\sqrt{\log_{\sin x\cdot\cos x}\cos x}\leqslant\sqrt{2}.$$

I lijeva i desna strana su veće od 0, pa možemo kvadrirati.

$$\log_{\sin x\cdot\cos x}\sin x + 2\sqrt{\log_{\sin x\cdot\cos x}\sin x\cdot\log_{\sin x\cdot\cos x}\cos x} + \log_{\sin x\cdot\cos x}\cos x\leqslant 2$$

$$\log_{\sin x\cdot\cos x}(\sin x\cdot\cos x) + 2\sqrt{\log_{\sin x\cdot\cos x}\sin x\cdot\log_{\sin x\cdot\cos x}\cos x}\leqslant 2$$

$$1+2\sqrt{\log_{\sin x\cdot\cos x}\sin x\cdot\log_{\sin x\cdot\cos x}\cos x}\leqslant 2$$

$$\sqrt{\log_{\sin x\cdot\cos x}\sin x\cdot\log_{\sin x\cdot\cos x}\cos x}\leqslant\frac{1}{2}.$$

Ova nejednakost vrijedi jer je

$$\sqrt{\log_{\sin x\cdot\cos x}\sin x\cdot\log_{\sin x\cdot\cos x}\cos x} \leqslant\frac{\log_{\sin x\cdot\cos x}\sin x+\log_{\sin x\cdot\cos x}\cos x}{2}=\frac{1}{2},$$

koja je točna po A-G nejednakosti.

Sara Muhvić (2),
III. gimnazija, Osijek

2982. *Nađi sva rješenja jednadžbe*

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{35}{12}.$$

Rješenje. Kvadriranjem obje strane dobivamo jednadžbu

$$\frac{1}{x^2(1-x)^2}+\frac{2}{x\sqrt{1-x^2}}-\left(\frac{35}{12}\right)^2=0.$$

Supstitucijom $y=\dfrac{1}{x\sqrt{1-x^2}}$, dobivamo

$$y^2+2y-\left(\frac{35}{12}\right)^2=0.$$

Rješenja ove kvadratne jednadžbe su

$$y_1=\frac{25}{12},\quad y_2=-\frac{49}{12}.$$

Sada iz polazne jednadžbe dobivamo dva sistema jednadžbi

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{35}{12},\quad \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{25}{12};$$

i

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{35}{12},\quad \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=-\frac{49}{12}.$$

Riješimo prvi sistem. Prema Vièteovim formulama $\dfrac{1}{x}$ i $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ su rješenja kvadratne jednadžbe

$$z^2-\frac{35}{12}z+\frac{25}{12}=0.$$

Njezina rješenja su $z_1=\dfrac{5}{3}$ i $z_2=\dfrac{5}{4}$. Prvi sistem ekvivalentan je sistemima

$$\frac{1}{x}=\frac{5}{3},\quad \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{5}{4};$$

i

$$\frac{1}{x}=\frac{5}{4},\quad \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{5}{3}.$$

Rješenja ovih jednadžbi su $x_1=\dfrac{3}{5}$, $x_2=\dfrac{4}{5}$.

Rješenja drugog sistema su rješenja kvadratne jednadžbe

$$z^2-\frac{35}{12}z-\frac{49}{12}=0,$$

tj.

$$z_3=\frac{7(5-\sqrt{73})}{24},\quad z_4=\frac{7(5+\sqrt{73})}{24}.$$

Prema Vièteovim formulama drugi sistem je ekvivalentan sistemima

$$\frac{1}{x}=\frac{7(5+\sqrt{73})}{24},\quad \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{7(5-\sqrt{73})}{24};$$

i

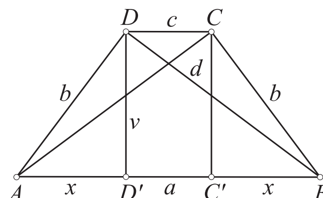
$$\frac{1}{x}=\frac{7(5-\sqrt{73})}{24},\quad \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{7(5+\sqrt{73})}{24};$$

Kako je $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}>0$, prvi od ova dva sistema nema rješenje. Rješenje drugog sistema je $x_3=-\dfrac{5+\sqrt{73}}{14}$, što se provjeri uvrštavanjem u jednadžbu.

Ur.

2983. *Dijagonale jednakokračnog trapeza su okomite na njegove krakove. Kolika je njegova površina ako je duljina dijagonale 20 cm, a kraka 15 cm?*

Rješenje. $b=15$ cm, $d=20$ cm



U pravokutnom trokutu ABD imamo:

$$a^2=b^2+d^2=625,\quad a=25\,\text{cm}.$$

Nadalje,

$$b^2=x\cdot a,\quad x=\frac{b^2}{a},\quad x=9\,\text{cm}.$$

U jednakokračnom trapezu imamo:

$$c=a-2x=25-18,\quad c=7\,\text{cm};$$

$$v^2=b^2-x^2,\quad v^2=144,\quad v=12\,\text{cm}.$$

Površina trapeza je

$$P=\frac{a+c}{2}\cdot v,\quad P=192\,\text{cm}^2.$$

Vanja Ubović (8),
OŠ Ivana Gorana Kovačića, Gornje Bazje

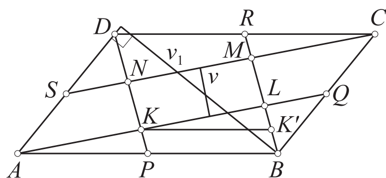
2984. *Točke P, Q, R, S su polovišta stranica $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DA}$ paralelograma $ABCD$. Odredi površinu četverokuta koji je ograničen pravcima AQ, BR, CS, DP ako je površina paralelograma jednaka P.*

Rješenje. Uz oznake kao na slici imamo:

$$|AP|=|PB|=|KK'|,$$

$$\sphericalangle KAP=\sphericalangle LKK',\quad \sphericalangle PKA=\sphericalangle K'LK.$$

Zato je $\Delta APK\cong\Delta KK'L$, odakle je $|AK|=|KL|$.



Četverokut $KLMN$ je paralelogram i $P_{KLMN} = |KL| \cdot v$. Nadalje $|AK| = |KL|$, $|LQ| = \frac{1}{2}|MC| = \frac{1}{2}|AK| = \frac{1}{2}|KL|$. Sada iz

$$\begin{aligned}|AQ| &= |AK| + |KL| + |LQ| \\ &= |KL| + |KL| + \frac{1}{2}|KL| = \frac{5}{2}|KL|\end{aligned}$$

sljedi

$$|KL| = \frac{2}{5}|AQ|.$$

Konačno imamo

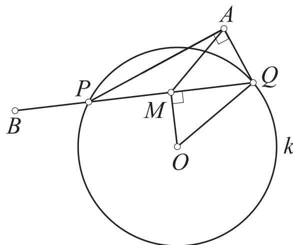
$$\begin{aligned}P_{KLMN} &= \frac{2}{5}|AQ| \cdot v = \frac{2}{5} \cdot P_{AQCS} \\ &= \frac{2}{5} \cdot |CQ| \cdot v_1 = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{2}|BC| \cdot v_1 = \frac{1}{5}P.\end{aligned}$$

Sara Muhvić (2)
III. gimnazija, Osijek

2985. *Dana je kružnica k polumjera r sa središtem O i točke A i B izvan nje. Konstruiraj tetivu $\overline{PQ}$ od k tako da bude $B \in PQ$ i $\sphericalangle QAP = 90^\circ$.*

Rješenje. Dovoljno je konstruirati polovište tetive $\overline{PQ}$. Neka je točka M polovište tetive $\overline{PQ}$, tada je ΔOMP pravokutan pa M leži na kružnici dijametra $\overline{OB}$. Konstruirat ćemo još jednu kružnicu na kojoj leži točka M. Iz pravokutnog trokuta OMQ, prema Pitagorinom poučku vrijedi

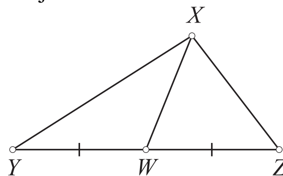
$$r^2 = |OM|^2 + |MQ|^2.$$



Kako je ΔPQA pravokutan, to je $|MQ| = |MA|$ pa dobivamo

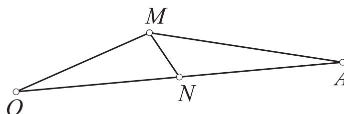
$$r^2 = |OM|^2 + |MA|^2.$$

Sada ćemo koristiti teorem o težišnici trokuta: zbroj kvadrata duljina dviju stranica trokuta jednak je zbroju dvostrukog kvadrata duljine težišnice na treću stranicu i polovice kvadrata duljine treće stranice.



$$|XY|^2 + |XZ|^2 = 2|XW|^2 + \frac{1}{2}|YZ|^2.$$

(Dokazuje se korištenjem kosinusovog poučka za trokute XYW i XWZ.)



Ako je $\overline{MN}$ težišnica trokuta OMA ($N \in \overline{OA}$) imamo

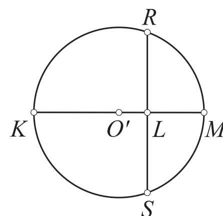
$$r^2 = |OM|^2 + |MA|^2 = 2|MN|^2 + \frac{1}{2}|OA|^2,$$

odakle možemo $|MN|$ izraziti pomoću r i $|ON| = \frac{1}{2}|OA|$.

$$|MN| = \sqrt{\frac{1}{2}r^2 - |ON|^2}.$$

Dakle, druga kružnica ima središte u N i polumjer $|MN|$.

Dokaz bez riječi.



$$\overline{KL} = r, \quad |LM| = \frac{1}{2}r, \quad O' \text{ polovište od } \overline{KM}.$$

$$|KL| \cdot |LM| = |LR| \cdot |LS|, \quad r \cdot \frac{1}{2}r = |LR|^2.$$

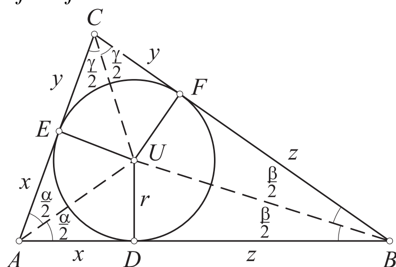
$$|MN| = \sqrt{(|LR| - |ON|)(|LR| + |ON|)}$$

Vidi rješenje nagradnog natječaja br. 112, MFL 3/223.

Ur.

2986. *U trokutu ABC kut $\alpha = 70^\circ$, a U je središte upisane mu kružnice. Ako je $|CA| + |AU| = |BC|$, odredi kut β.*

Rješenje.



Trokut ADU je sukladan trokutu AEU. Također su sukladni i trokuti CFU i CEU, te trokuti BDU i BFU.

$$|AC| + |AU| = |BC| \Rightarrow x + y + |AU| = y + z,$$
$$x + |AU| = z \qquad (1)$$

Iz ΔADU dobivamo

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{r}{x} \Rightarrow x = \frac{r}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}},$$
$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{r}{|AU|} \Rightarrow |AU| = \frac{r}{\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

Nadalje, iz ΔBUD slijedi

$$\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \frac{r}{z} \Rightarrow z = \frac{r}{\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}},$$
$$(1) \Rightarrow \frac{r}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}.} + \frac{r}{\sin\frac{\alpha}{2}.} = \frac{r}{\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}.},$$

$$\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{\operatorname{tg}35^\circ \sin 35^\circ}{\operatorname{tg}35^\circ + \sin 35^\circ}$$
$$= \frac{\frac{\sin 35^\circ}{\cos 35^\circ}\cdot\sin 35^\circ}{\frac{\sin 35^\circ}{\cos 35^\circ} + \sin 35^\circ} = \frac{\sin 35^\circ}{1+\cos 35^\circ}$$
$$= \frac{2\sin 17.5^\circ \cos 17.5^\circ}{2\cos^2 17.5^\circ} = \operatorname{tg}17.5^\circ.$$

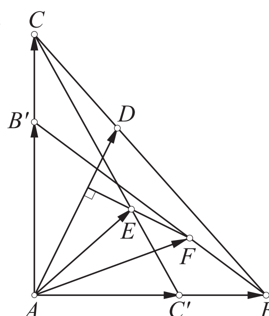
Odavde dobivamo $\beta = 35^\circ$.

Tomislav Pozaić (2),
SŠ Zlatar, Zlatar

2987. *Dani su pravokutan trokut ABC ($\alpha = 90^\circ$) i točke $C' \in \overline{AB}$, $B' \in \overline{AC}$ tako da je $|BC'| = |CB'|$. Promatraj točke $F \in \overline{BB'}$ i $E \in \overline{CC'}$ za koje je $\frac{|C'E|}{|CE|} = \frac{|BF|}{|B'F|}$, te točku $D \in \overline{BC}$. Dokaži*

$$AD \perp EF \Longleftrightarrow \frac{|C'E|}{|CE|} = \frac{|AB|}{|AC|}\cdot\frac{|DC|}{|DB|}.$$

Rješenje.



Označimo $k = \frac{|C'E|}{|CE|} = \frac{|BF|}{|BF'|}$. Tada je

$$\overrightarrow{AE} = \frac{\overrightarrow{AC'} + k\overrightarrow{AC}}{1+k}, \quad \overrightarrow{AF} = \frac{\overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{AB'}}{1+k}.$$

Dobivamo

$$\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AF} - \overrightarrow{AE} = \frac{\overrightarrow{C'B} - k\overrightarrow{B'C}}{1+k}.$$

S druge strane je

$$\overrightarrow{AD} = \frac{|BD|\cdot\overrightarrow{AC} + |DC|\cdot\overrightarrow{AB}}{|BC|}.$$

Sada je

$$AD \perp EF \Leftrightarrow \overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{EF} = 0$$
$$\Leftrightarrow |DC|\cdot|AB|\cdot|C'B| - k|BD|\cdot|B'C|\cdot|AC| = 0$$
$$\Leftrightarrow |DC|\cdot|AB| = k|BD|\cdot|AC|$$
$$\Leftrightarrow \frac{|C'E|}{|CE|} = k = \frac{|DC|}{|DB|}\cdot\frac{|AB|}{|AC|}.$$

Ur.

2988. *Odredi skup svih kompleksnih brojeva*

$$z = (4t+1) + (3t+7)i, \quad t \in \mathbf{R}$$

u kompleksnoj ravnini. Koji od njih ima najmanji modul?

Rješenje. Kompleksni broj z je oblika $z = x + yi$. U našem slučaju je $x = 4t + 1$, $y = 3t + 7$. Odavde je $t = \frac{x-1}{4}$ i $t = \frac{y-7}{3}$, pa slijedi

$$\frac{x-1}{4} = \frac{y-7}{3}$$

ili

$$3x - 4y + 25 = 0,$$

što znači da je traženi skup točaka pravac čija je ovo jednadžba. Nadalje

$$|z| = \sqrt{(4t+1)^2 + (3t+7)^2} = 5\sqrt{t^2+2t+2}.$$

Kako je $t^2 + 2t + 2 = (t+1)^2 + 1 \geqslant 1$, onda je $|z| \geqslant 5$, i minimalna vrijednost se dostiže za $t = -1$. Tada je $x = -3$, $y = 4$. Dakle od svih promatranih kompleksnih brojeva, najmanji modul ima broj $z = -3+4i$.

Goran Šeketa (2),
Gimnazija Karlovac, Karlovac

2989. *Za dani $n \in \mathbf{N}$ odredi $k \in \mathbf{N}$ takav da je broj*

$$\binom{2n+k}{n}\binom{2n-k}{n}$$

maksimalan?

Rješenje. Ako je $k > n$, onda je $\binom{2n-k}{n} = 0$,

Ako je $k = n$, dobivamo

$$\binom{2n+n}{n}\binom{2n-n}{n} = \binom{3n}{n}\binom{n}{n} = \binom{3n}{n}.$$

Ako je $k = 0$, vrijedi

$$\binom{2n}{n}\binom{2n}{n} = \binom{2n}{n}^2.$$

Za $0 < k < n$ imamo

$$\binom{2n+k}{n}\binom{2n-k}{n}$$
$$= \frac{(2n+k)(2n+k-1)\dots(2n+k-n+1)}{n!} \cdot$$
$$\cdot \frac{(2n-k)(2n-k-1)\dots(2n-k-n+1)}{n!}$$
$$= \frac{(4n^2-k^2)\Big((2n-1)^2-k^2\Big)\dots\Big((2n-n+1)^2-k^2\Big)}{n!n!}.$$

Dani izraz poprima maksimalnu vrijednost za $k = 0$. Zato se postiže maksimum $\binom{2n}{n}^2$.

Ur.

2990. *Tanki štap prelomljen je na tri dijela. Kolika je vjerojatnost da se od njih može sastaviti trokut?*

Rješenje. Označimo duljinu štapa s d, a duljine djelova s x, y i z. Tada je

$$x + y + z = d \qquad (1)$$

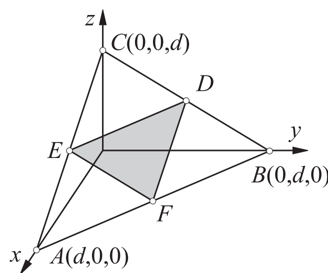
Ako su x, y, z duljine stranica trokuta, vrijedi nejednakost trokuta. Dakle,

$$y + z \geqslant x, \quad z + x \geqslant y, \quad x + y \geqslant z.$$

odakle dobivamo

$$x \leqslant \frac{d}{2}, \quad y \leqslant \frac{d}{2}, \quad z \leqslant \frac{d}{2}. \qquad (2)$$

Uvjeti (1) i (2) su i dovoljni da x, y, z budu duljine stranica trokuta. Budući da je $x + y + z = d$ jednadžba ravnine koja prolazi točkama $A(d, 0, 0)$, $B(0, d, 0)$, $C(0, 0, d)$ (u prostornom Kartezijevom sustavu), koordinate točaka unutar trokuta DEF, gdje je $D(0, \frac{d}{2}, \frac{d}{2})$, $E(\frac{d}{2}, 0, \frac{d}{2})$, $F(\frac{d}{2}, \frac{d}{2}, 0)$, određuju duljine stranica traženog trokuta.



Kako je $P_{EFG} = \frac{1}{4}P_{ABC}$ tražena vjerojatnost je

$$v = \frac{P_{EFG}}{P_{ABC}} = \frac{1}{4}.$$

Ur.

2991. *Neka su a, b, p, q, r međusobno različiti brojevi i svaki je različit od nule. Odredi zbroj $x+y+z$ ako x, y, z zadovoljavaju uvjete*

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{p-a} + \frac{z}{p-b} = 1,$$
$$\frac{x}{q} + \frac{y}{q-a} + \frac{z}{q-b} = 1,$$
$$\frac{x}{r} + \frac{y}{r-a} + \frac{z}{r-b} = 1.$$

Rješenje. Promotrimo polinom trećeg stupnja

$$F(t) = \left(1 - \frac{x}{t} - \frac{y}{t-a} - \frac{z}{t-b}\right) t(t-a)(t-b).$$

Njegove nultočke su p, q, r. Prema Vièteovim formulama je $-p-q-r$ jednako koeficijentu uz t^2 u $F(t)$, a on je jednak $-a-b-x-y-z$.

Dakle

$$x+y+z=p+q+r-a-b.$$

Brojevi x, y, z postoje i jedinstveni su:

$$x=\frac{pqr}{ab},$$

$$y=\frac{(p-a)(q-a)(r-a)}{a(a-b)},$$

$$z=\frac{(p-b)(q-b)(r-b)}{b(b-a)}.$$

Ur.

2992. *Odredi sumu reda*

$$S=\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{2}{n^2}\right).$$

Rješenje. Za $n \geqslant 1$ je

$$\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{n}\right)-\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{n+2}\right)$$

$$=\operatorname{arctg}\left(\frac{\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}}{1+\frac{1}{n(n+2)}}\right)=\operatorname{arctg}\left(\frac{2}{(n+1)^2}\right),$$

pa je za $N \geqslant 2$

$$\sum_{n=2}^{N}\operatorname{arctg}\left(\frac{2}{n^2}\right)=\sum_{n=1}^{N-1}\operatorname{arctg}\left(\frac{2}{(n+1)^2}\right)$$

$$=\sum_{n=1}^{N-1}\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{n}\right)-\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{n+2}\right)\right)$$

Kada $N\to\infty$ dobivamo

$$\sum_{n=2}^{\infty}\operatorname{arctg}\left(\frac{2}{n^2}\right)=\operatorname{arctg}(1)+\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$=\frac{\pi}{4}+\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2}\right)$$

i konačno

$$S=\frac{\pi}{4}+\operatorname{arctg}(2)+\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3\pi}{4}.$$

Ur.

D) Rješenja iz fizike

OŠ – 242. *Kruno i njegova mlađa sestra Katarina se njišu na ljuljačkama iste duljine. Ako se zanjišu s iste visine, podjednako snažno, tko će se dulje njihati? Da li bi se dulje njihali na dugačkoj ili kratkoj ljuljački? Odgovore provjerite pokusom pomoću kuglica obješenih na nit.*

Rješenje. Pri ljuljanju se gravitacijska potencijalna energija djeteta pretvara u njegovu kinetičku energiju, pa ponovo u potencijalnu. Do zaustavljanja ljuljačke dolazi zato što se pri svakom njihaju gubi dio energije na svladavanje otpora zraka (tijelo mora "razmaknuti" molekule zraka da bi prošlo).

Možemo izvesti pokus s utezima različitih masa obješenim na niti. S iste visine zanjišemo istovremeno dva utega različitih masa (npr. 50 g i 100 g), obješenih na niti jednakih duljina. Na početku utezi kreću s iste visine. Uteg veće mase predstavlja Krunu, a uteg manje mase Katarinu. Njihove potencijalne energije računamo kao $E=mgh$, pri čemu je masa Krune veća od mase Katarine. Možemo zaključiti da Kruno ima na istoj visini veću potencijalnu energiju, koja bi mu uz isti otpor zraka omogućila dulje njihanje. No, pokus pokazuje da se oba utega njišu približno jednako dugo. Zaključujemo da otpor zraka nije jednak za veći i manji uteg. Otpor zraka ovisi i o površini poprečnog presjeka tijela (veći je za tijelo većeg presjeka, jer treba razmaknuti više molekula zraka). Zbog veće površine tijela na Krunu djeluje veći otpor zraka, no ne znamo koliko puta veći. Za tijela jednakih gustoća masa je proporcionalna obujmu, a obujam je proporcionalan površini presjeka tijela (ako tijela možemo otprilike smatrati kvadratima jednakih debljina), tako da koliko puta će jedno tijelo biti masivnije od drugog, toliko će puta imati i veći presjek. Stoga će se Kruno i Katarina njihati približno jednako dugo.

Kod kraće će ljuljačke vrijeme jednog njihaja biti kraće, što se lako provjeri pokusom. Ako su početne visine i mase jednake za dulju i kraću ljuljačku (npr. uspoređujemo ljuljanje istog djeteta na različitim ljuljačkama) i početna potencijalna energija je jednaka u oba slučaja. Zato svaka ljuljačka napravi jednak broj njihaja do zaustavljanja, no zbog kraćeg vremena jednog njihaja, ukupno će vrijeme njihanja za kraću ljuljačku biti kraće, pa će se Kruno i Katarina prije zaustaviti na kraćoj ljuljački.

Ur.

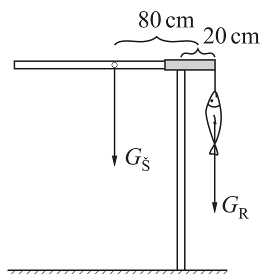
OŠ – 243. *Profesor Mudrić ulovio je veću ribu, pa je izmjerio njenu masu pomoću svog ribarskog štapa kao što to obično čini. Njegov ribarski štap ima masu 1 kg i težište mu je*

udaljeno 80 cm od debljeg kraja. Prof. Mudrić je objesio ribu na deblji kraj i postavio štap na ogradu pomičući ga lijevo-desno dok ga nije uravnotežio. Kolika je bila masa ribe ako je udaljenost od kraja na kojem je ona visjela do ograde bila 20 cm?

Rješenje.

$$m_Š = 1\,\text{kg}$$
$$G_Š = m_Š \cdot g = 10\,\text{N}$$
$$F_1 = G_Š = 10\,\text{N}$$
$$k_1 = 80\,\text{cm} - 20\,\text{cm} = 60\,\text{cm}$$
$$k_2 = 20\,\text{cm}$$

$$m_\text{R} = ?$$



$$m_\text{R} = \frac{G_\text{R}}{g} = \frac{F_2}{g}, \quad F_1 \cdot k_1 = F_2 \cdot k_2,$$

$$10\,\text{N} \cdot 60\,\text{cm} = F_2 \cdot 20\,\text{cm}, \quad F_2 = 30\,\text{N},$$

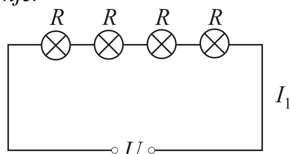
$$m_\text{R} = \frac{G_\text{R}}{g} = \frac{30\,\text{N}}{10\frac{\text{N}}{\text{kg}}} = 3\,\text{kg}.$$

Masa ribe je bila 3 kilograma.

Marija Čelar (8),
OŠ Fausta Vrančića, Šibenik

OŠ – 244. *Akvarij je osvijetljen s 4 serijski spojene žarulje. Da li bi se smanjila potrošnja električne energije ako bi ga osvijetlili s tri umjesto četiri žarulje? Objasnite odgovor.*

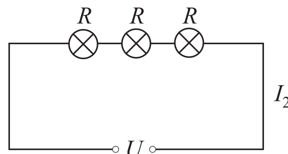
Rješenje.



$$R_U = R + R + R + R, \quad R_U = 4R$$

$$I_1 = \frac{U}{R_U}, \quad I_1 = \frac{U}{4R}, \quad E_1 = UI_1t,$$

$$E_1 = U\frac{U}{4R}t, \quad E_1 = \frac{1}{4}\frac{U^2}{R}t.$$



$$R_U = R + R + R, \quad R_U = 3R$$

$$I_2 = \frac{U}{R_U}, \quad I_2 = \frac{U}{3R}, \quad E_2 = UI_2t,$$

$$E_2 = U\frac{U}{3R}t, \quad E_2 = \frac{1}{3}\frac{U^2}{R}t.$$

Kako je $E_1 < E_2$, jer je $\frac{1}{4}\frac{U^2}{R}t < \frac{1}{3}\frac{U^2}{R}t$, neće se smanjiti, nego će se povećati potrošnja električne energije osvijetlimo li s 3 umjesto 4 žarulje.

Silvija Konjić (8)
OŠ Augusta Cesarca, Krapina

OŠ – 245. *Koliko je puta brzina vrha velike kazaljke veća od brzine vrha male kazaljke na ručnom satu? Duljina velike kazaljke je 6 cm, a male 4 cm.*

Rješenje.

$$r_1 = 6\,\text{cm}, \quad r_2 = 4\,\text{cm}$$
$$t_1 = 1\,\text{h}, \quad t_2 = 12\,\text{h}$$

$$v_1 = ?, \quad v_2 = ?.$$

v_1 – brzina velike kazaljke
v_2 – brzina male kazaljke
s_1 – put koji napravi vrh velike kazaljke
s_2 – put koji napravi vrh male kazaljke
t_1 – vrijeme za koje velika kazaljka napravi puni krug
t_2 – vrijeme za koje mala kazaljka napravi puni krug

$$s_1 = 2 \cdot r_1 \cdot \pi = 2 \cdot 6\,\text{cm} \cdot \pi = 12\pi\,\text{cm},$$

$$s_2 = 2 \cdot r_2 \cdot \pi = 2 \cdot 4\,\text{cm} \cdot \pi = 8\pi\,\text{cm},$$

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{\frac{s_1}{t_1}}{\frac{s_2}{t_2}} = \frac{\frac{12\pi\,\text{cm}}{1\,\text{h}}}{\frac{8\pi\,\text{cm}}{12\,\text{h}}} = \frac{144}{8} = 18,$$

$$v_1 = 18 v_2.$$

Brzina velike kazaljke je 18 puta veća od brzine male.

Vanja Ubović (8)
OŠ Ivana Gorana Kovačića, Gornje Bazje

1329. *Neko tijelo izbacimo vertikalno uvis početnom brzinom 6 m/s. Na tijelo prilikom gibanja djeluje sila otpora zraka čiji je iznos 20% od iznosa sile teže. Odredite maksimalnu visinu do koje će tijelo doći i vrijeme koje će mu za to trebati.*

Rješenje.

(1) Akceleracija koja djeluje suprotno od smjera početne brzine ($v_0 = 6\,\text{m/s}$) iznosi:

$$a = g + 0.2\,g = 1.2\,g.$$

(2) Vrijeme potrebno da bi akceleracija potpuno zaustavila tijelo je:

$$t = \frac{v_0}{a} = 0.5\,\text{s}.$$

(3) Put koji je tijelo prevalilo za to vrijeme iznosi

$$s = v_0 t - \frac{1}{2}at^2 = 1.52\,\text{m}.$$

Petar-Šime Čepo (4)
Klasična gimnazija, Zagreb

1330. *Ljestve se oslanjaju na zid bez trenja, a između njih i tla faktor trenja je μ. Koji je najmanji kut između ljestvi i tla, pri kojem one neće iskliznuti?*

Rješenje. Kada ljestve miruju, tj. kada su u ravnoteži, zbroj svih sila jednak je nuli, kao i zbroj svih momenata.

Za sile možemo pisati:

$$x - \text{smjer}: \quad \sum \vec{F}_x = 0 \Rightarrow N_2 = F_{\text{tr}},$$

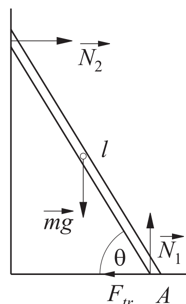
$$y - \text{smjer}: \quad \sum \vec{F}_y = 0 \Rightarrow N_1 = mg.$$

Za momente oko točke A vrijedi:

$$\sum \vec{M} = 0,$$

$$N_2 l \sin\theta = mg\frac{l}{2}\cos\theta,$$

$$N_2 \operatorname{tg}\theta = \frac{mg}{2}, \quad N_2 = \frac{mg}{2\operatorname{tg}\theta} = F_{\text{tr}}.$$



Maksimalna snaga trenja

$$F_{\text{tr}_{\max}} = \mu N_1 = \mu mg.$$

Iz toga dobivamo najmanji kut:

$$\frac{mg}{2\operatorname{tg}\theta} = \mu mg, \quad \operatorname{tg}\theta = \frac{1}{2\mu}.$$

Ur.

1331. *Posuda s vodom stoji na vagi baždarenoj u njutnima. Vaga pokazuje težinu od 10 N. U posudu potpuno uronimo željezni uteg mase 1 kg i gustoće 7800 kg/m³, držeći ga cijelo vrijeme na niti, tako da ne dodiruje dno posude. Što će pokazivati vaga? Obrazložite odgovor!*

Rješenje.

$G = 10\,\text{N}$

$m_{\check{Z}} = 1\,\text{kg}$

$\rho_{\check{Z}} = 7\,800\,\dfrac{\text{kg}}{\text{m}^3}$

$F = ?$

Voda djeluje silom uzgona (F_u) na uteg. Prema trećem Newtonovom zakonu koji glasi: Ako prvo tijelo djeluje na drugo nekom silom $\overrightarrow{F_{1,2}}$, onda drugo tijelo djeluje na prvo silom $\overrightarrow{F_{2,1}}$, koja ima jednak iznos a suprotan smjer. Zaključujemo da jednakom silom u suprotnom smjeru djeluje uteg na vodu.

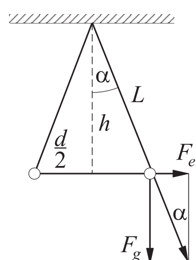
$$F = G + F_u,$$
$$F = G + \rho_V \cdot g \cdot V_Ž,$$
$$F = G + \rho_V \cdot g \cdot \frac{m_Ž}{\rho_Ž},$$
$$F = 10\,\mathrm{N} + 1\,000\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3} \cdot 9.81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot \frac{1\,\mathrm{kg}}{7\,800\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}},$$
$$F = 11.275\,\mathrm{N}.$$

U posudi s vodom u koju je položen željezni uteg na prikazan način, baždarena vaga u njutnima prikazat će težinu od 11.275 N.

Josip Gulin (2)
Gimnazija Antuna Vrančića, Šibenik

1332. *Dvije jednake kuglice mase m vise na svilenim nitima duljine L. Kuglice imaju istoimene naboje Q_1 i Q_2. Polumjer kuglica je malen u usporedbi s njihovom međusobnom udaljenošću, tako da se one mogu smatrati točkastim nabojima. Izvedite izraz za ravnotežnu udaljenost d između kuglica, uz pretpostavku da je njihov otklon od okomitog položaja malen, tako da vrijedi $\operatorname{tg}\alpha \approx \sin\alpha$.*

Rješenje.



$$F_{el} = k\frac{Q_1Q_2}{d^2}, \quad k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}, \quad F_g = mg,$$
$$\sin\alpha = \frac{d}{2L}, \quad L \approx h, \quad \operatorname{tg}\alpha \approx \frac{d}{2L},$$
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{F_{el}}{F_g}, \quad \frac{d}{2L} = \frac{k\frac{Q_1Q_2}{d^2}}{mg}$$
$$\Rightarrow d^3 = \frac{2kQ_1Q_2L}{mg}, \quad d = \sqrt[3]{\frac{2kQ_1Q_2L}{mg}}.$$

Marko Čolić (2)
III. Gimnazija, Osijek

1333. *Debela staklena ploča, prekrivena je vrlo tankim slojem prozirne tvari indeksa loma $n = 1.5$. Okomito na ploču upada paralelan snop monokromatske svjetlosti valne duljine 600 nm. Kolika je najmanja debljina nanesenog sloja, ako na njegovoj površini dolazi do maksimalnog slabljenja svjetlosti, te ona izgleda tamna, premda je osvijetljena? Indeks loma prozirne tvari manji je od indeksa loma stakla od kojeg je načinjena ploča.*

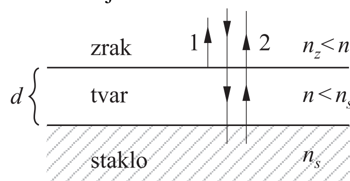
Rješenje. Na površini tvari dolazi do interferencije između svjetlosti koja se reflektira na gornjem sloju tvari i svjetlosti koja prolazi kroz tvar i reflektira se na staklu. I zraka 1 i zraka 2 reflektiraju se na optički gušćem sredstvu (skok u fazi za π) pa je razlika faza ista kao i bez refleksije. Razlika geometrijskog puta zrake 1 i zrake 2:

$$\Delta s = 2d.$$

Uvjet destruktivne interferencije:

$$\Delta s = (2k+1)\frac{\lambda}{2} = (2k+1)\frac{\lambda_0}{2n} = 2d$$

Minimalna debljina $k = 0$.



$$d = \frac{\lambda_0}{4n}, \quad d = \frac{600\,\mathrm{nm}}{4 \cdot 1.5}, \quad d = 100\,\mathrm{nm}.$$

Ur.

1334. *Kad se izvor istosmjernog napona od 2 V spoji na "crnu kutiju", koja sadrži nepoznati električni element, struja u krugu iznosi 200 mA. Ako se izvor zamijeni izvorom izmjeničnog napona, frekvencije 50 Hz, struja postaje 100 mA. Kolika će biti struja pri istom naponu i frekvenciji od 1000 Hz?*

Rješenje. Nepoznati element ne može biti otpornik (jer se ne bi promijenila jakost struje u izmjeničnom krugu), niti kondenzator (jer je on beskonačan otpor u istosmjernom krugu). Dakle, radi se o zavojnici.

U istosmjernom krugu omski otpor jednak je

$$R = \frac{U}{I} = \frac{2\,\mathrm{V}}{0.2\,\mathrm{A}} = 10\,\Omega.$$

U izmjeničnom krugu pri frekvenciji od 50 Hz impendancija je jednaka:

$$Z_1 = \sqrt{R^2 + R_l^2} = \sqrt{R^2 + L^2\omega^2}$$

$$Z_1 = \sqrt{R^2 + 4\pi^2 f^2 L^2},$$

$$L^2 = \frac{Z_1^2 - R^2}{4\pi^2 f^2}, \quad L = \frac{\sqrt{Z_1^2 - R^2}}{2\pi f},$$

$$Z_1 = \frac{U}{I} = \frac{2\,\mathrm{V}}{0.1\,\mathrm{A}} = 20\,\Omega,$$

$$L = \frac{\sqrt{400 - 100}}{2\pi \cdot 50} = 0.055\,\mathrm{H}.$$

Pri frekvenciji od 1 000 Hz impendancija je:

$$Z_2 = \sqrt{R^2 + R_l^2} = \sqrt{100 + 0.055^2 \cdot 4\pi^2 \cdot 10^6}$$

$$Z_2 = 346.1\,\Omega.$$

Iz toga dobivamo:

$$I_2 = \frac{U}{Z_2}, \quad I_2 = \frac{2\,\mathrm{V}}{346\,\Omega} = 5.77\,\mathrm{mA}.$$

Ur.

1335. *Dok se ljeti sunčate na plaži, na vaše tijelo stiže 800 W/m² solarne energije. Uz pretpostavku da se apsorbira 40% te energije, te da je izložena površina tijela 0.5 m², procijenite koliko vode treba znojenjem ishlapiti iz tijela za 1 sat sunčanja, da bi se utrošila apsorbirana energija. Latentna toplina isparavanja vode je $2.3 \cdot 10^6$ J/kg.*

Rješenje.

$I = \frac{P}{S} = 800\,\mathrm{W/m^2}$

$\mu = 40\% = 0.4$

$S = 0.5\,\mathrm{m^2}$

$t = 1\,\mathrm{h} = 3\,600\,\mathrm{s}$

$\lambda = 2.3 \cdot 10^6\,\mathrm{J/kg}$

$m = ?$

$F = E, \quad \lambda m = \mu P t,$

$\lambda m = \mu I S t, \quad m = \frac{\mu I S t}{\lambda},$

$$m = \frac{0.4 \cdot 800\,\mathrm{W/m^2} \cdot 0.5\,\mathrm{m^2} \cdot 3\,600\,\mathrm{s}}{2.3 \cdot 10^6\,\mathrm{J/kg}},$$

$m = 0.25\,\mathrm{kg}$

(E_S – solarna energija, Q_i – toplina potrebna za isparavanje)

Josip Gulin (2), Šibenik

Mala kombinacija

G	R	O	Š
R	E	L	I
A	N	A	L
L	A	K	O

2	7	0	8
7	1	3	6
5	4	5	3
3	5	9	0

Dvije grupe

Postupak pretakanja izgleda ovako: $(14, 0, 0) - (5, 9, 0) - (5, 4, 5) - (10, 4, 0) - (10, 0, 4) - (1, 9, 4) - (1, 8, 5) - (6, 8, 0) - (6, 3, 5) - (11, 3, 0) - (11, 0, 3) - (2, 9, 3) - (2, 7, 5) - (7, 7, 0)$.

Paketi

Neka su a, b, c i d traženi brojevi paketa. Vrijede jednakosti $a+b+c+d = 20$, $a+5b+10c+50d = 361$. Oduzimanjem prve jednadžbe od druge dobivamo $4b+9c+49d = 341$. Odavde je $b = \frac{341 - 9c - 49d}{4} = 85 - 2c - 11d + \frac{1-c-d}{4}$. Iz prethodne jednadžbe lako se zaključuje da mora biti $4 < d < 7$, odnosno, $d = 5$ ili $d = 6$. Obje mogućnosti omogućuju rješenje. Ta rješenja su $(a, b, c, d) = (1, 6, 8, 5), (6, 5, 3, 6)$. Sada je jasna i susjedova dilema.

Pet sedmica

$(7+7):7-7:7 = 1$, $(7+7):7-7+7 = 2$, $7+7-77:7 = 3$, $(7+7+7+7):7 = 4$, $7-7:7-7:7 = 5$, $7-77:77 = 6$, $7+77-77 = 7$, $7+77:77 = 8$, $7+7:7+7:7 = 9$, $77:7-7:7 = 10$.

Poligoni

Jednim potezom olovke mogu se nacrtati peterokut i sedmerokut.



9. mediteransko matematičko natjecanje – memorijal Petera O'Halorana

Željko Hanjš, Zagreb

Mediteransko matematičko natjecanje je lokalno međunarodno natjecanje koje se ove godine u Hrvatskoj održavalo 8. i 9. travnja. Na ovom natjecanju mogli su sudjelovati učenici koji su godinu dana ranije na Državnom natjecanju bili nagrađeni prvom, drugom ili trećom nagradom. Ove godine sudjelovalo je 19 učenika, koji su osvojili: jednu prvu nagradu (*Goran Dražić*), dvije druge (*Igor Čanadi* i *Luka Žunić*), tri treće (*Antonio Krnjak*, *Melkior Ornik* i *Josip Saratlija*), četiri pohvale (*Marko Popović*, *Luka Rimanić*, *Mirko Čorić* i *Sanja Miklin*), a sudjelovalo je još devet učenika (*Iva Kasum*, *Ines Marušić*, *Igor Boban*, *Marko Erceg*, *Ivan Gavran*, *Dijana Marinčić*, *Ivan Šandrk*, *Filip Lovriv* i *Žaklina Bisaga*).



Natjecatelji su rješavali zadatke, u trajanju od 4.5 sata, 8. travnja na Matematičkom odjelu Prirodoslovnog-matematičkog fakulteta u Zagrebu. U nedelju, 9. travnja proglašeni su rezultati ovog natjecanja i podijeljene nagrade najuspješnijim natjecateljima.

Ove godine na Mediteranskom matematičkom natjecanju sudjelovali su učenici iz Alžira, Austrije, Bosne i Hercegovine, Grčke, Hrvatske, Španjolske i Turske.

Zadaci

1. Svaka točka ravnine obojena je crvenom ili plavom bojom, pri čemu postoji barem jedna crvena i barem jedna plava točka. Da li je moguće da svaka kružnica

polumjera 1 sadrži točno:
a) jednu plavu točku;
b) dvije plave točke?

2. Neka je P unutrašnja točka trokuta ABC. Neka su A_1B_2, B_1C_2, C_1A_2 pravci kroz točku P, redom paralelni s AB, BC, CA, pri čemu točke A_1, A_2 leže na stranici $\overline{BC}$, točke B_1, B_2 na $\overline{CA}$ i točke C_1, C_2 na $\overline{AB}$. Dokaži da vrijedi

$$P(A_1A_2B_1B_2C_1C_2) \geqslant \frac{2}{3}P(ABC),$$

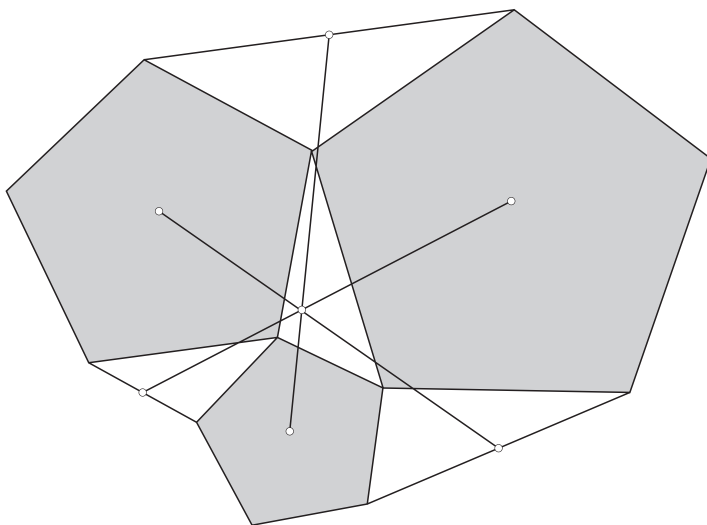
gdje je P površina odgovarajućeg lika.

3. Promatrajmo trokut ABC kod kojeg su duljine stranica a, b, c prirodni brojevi takvi da je $M(a, b, c) = 1$. Simetrala kuta $\sphericalangle BAC$ siječe $\overline{BC}$ u točki D.
a) Ako je trokut DBA sličan trokutu ABC, dokaži da je c potpuni kvadrat.
b) Za svaki potpuni kvadrat $c = n^2$, $n \geqslant 2$, nađi trokut ABC koji je sličan odgovarajućem trokutu DBA.

4. Neka su m, n prirodni brojevi i neka su $x_{i,j} \in [0, 1]$ za $i = 1, 2, \ldots, m$; $j = 1, 2, \ldots, n$.
Dokaži nejednakost

$$\prod_{j=1}^{n}\left(1 - \prod_{i=1}^{m} x_{i,j}\right) + \prod_{i=1}^{m}\left(1 - \prod_{j=1}^{n}(1 - x_{i,j})\right) \geqslant 1.$$

⋆ ⋆ ⋆



Još jedna točka presjeka iz knjige Hansa Walsera.

15. (48.) državni susret i natjecanje mladih matematičara Republike Hrvatske

Početkom svake godine u Republici Hrvatskoj kreću natjecanja učenika osnovnih i srednjih škola. Ovogodišnji ciklus susreta i natjecanja mladih matematičara započeo je školskim natjecanjima koja su se provodila tijekom siječnja i veljače. Na njima uvijek sudjeluje velik broj učenika. Najbolji učenici na školskim natjecanjima pozivaju se na općinska i gradska natjecanja. Ove godine ta su natjecanja održana 13. veljače u svih 20 županija i Gradu Zagrebu. Kriteriji za održavanje tih natjecanja su jedinstveni za cijelu zemlju i postavlja ih Državno povjerenstvo za matematička natjecanja. Ono priprema i zadatke za ta natjecanja.

Ove godine je po prvi puta za učenike srednjih škola Državno povjerenstvo za matematička natjecanja sastavilo dvije varijante zadataka za sve razine natjecanja izuzev školskih natjecanja.

Zadaci A varijante su složeniji i namijenjeni su učenicima prirodoslovno-matematičkih gimnazija, a za njih se može opredijeliti i svaki drugi učenik srednje škole. Zadaci B varijante namijenjeni su učenicima svih srednjih škola osim učenika iz prirodoslovno-matematičkih gimnazija.

⋆ ⋆ ⋆

Nakon održanih općinskih i gradskih natjecanja županijska povjerenstva za matematiku pregledala su pristigla izvješća općinskih povjerenstava i učenike s najboljim rezultatima pozvala na 11. županijsko natjecanje. Županijski susreti i natjecanja iz matematike održani su 14. ožujka, po jedinstvenim kriterijima za cijelu Republiku Hrvatsku. Na županijskim natjecanjima sudjeluje svake godine velik broj učenika srednjih škola. Tako je bilo i ove godine. I zadatke za ova natjecanja izradilo je Državno povjerenstvo. S rezultatima županijskih natjecanja možemo biti zadovoljni. Nešto slabije rezultate u nekim županijama postigli su učenici koji su rješavali zadatke B varijante.

⋆ ⋆ ⋆

Nakon održanih županijskih natjecanja županijska povjerenstva dostavila su svoja izvješća Državnom povjerenstvu. Državno povjerenstvo za matematička natjecanja pregledalo je sva pristigla izvješća sa županijskih natjecanja i na 15. državni susret i natjecanje pozvalo 86 učenika osnovnih škola i 166 učenika srednjih škola. Srednjoškolci: I. razred A program – 20, B program – 21; II. razred A program – 27, B program – 19; III. razred A program – 24, B program – 21; IV. razred A program – 25, B program – 21 učenik. Napominjemo da su na državno natjecanje B programa bili pozvani isključivo županijski prvaci, što nije bilo najbolje rješenje.

⋆ ⋆ ⋆

Susret i natjecanje održani su u Kraljevici od srijede 26. do subote 29. travnja 2006. godine pod pokroviteljstvom Ministarstva znanosti, obrazovanja i športa i u organizaciji Zavoda za školstvo i Hrvatskog matematičkog društva. Domaćin susreta bila je OŠ Kraljevica. Sudionici susreta bili su smješteni u hotelu *Uvala Scott*. Svečano otvaranje 15. državnog sureta mladih matematičara Republike Hrvatske s pozdravnim govorima i prigodnim programom održano je u hotelu u srijedu 26. travnja navečer.

Po treći puta u Kraljevici! Ovdje su održani 5. susret 1996. i 7. susret 1998. godine, pa je domaćin već stekao veliko iskustvo. I ovaj puta učenici, učitelji i ostali

djelatnici osnovne škole Kraljevica učinili su sve da sudionici susreta provedu u njihovoj sredini nekoliko ugodnih dana. Vrijeme nam nije bilo naklonjeno. Bilo je prohladno i povremeno kišovito, ali su more i lijepi krajolici uljepšali opći dojam. Sudionici susreta su se radno odužili svojim domaćinima.

Evo kratkog opisa tog dijela susreta:

1) Za nastavnike-mentore organiziran je tradicionalni dvodnevni seminar. Održano je devet predavanja. Predavači i teme su bili:

Vinko Bajrović, 48. općinsko/gradsko natjecanje iz matematike za učenike osnovnih škola u Splitu 2006.

Branimir Dakić, Suma $S_n = 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

Neven Elezović, Pravilni poliedri

Zdravko Kurnik, Zadaci s više načina rješavanja

Anđelko Marić, Neke osobitosti aritmetičkog niza

Petar Mladinić, T^3 i džepno računalo

Nikol Radović, Renata Svedrec, Statistika u osnovnoj školi

Renata Svedrec, Nikol Radović, Medijan, mod i raspon

Milan Šarić, "Čarobni" jednakostranični trokut.

Članci za seminar i pisani materijali za metodičke radionice objavljeni su u Biltenu seminara za nastavnike-mentore br. 15.

2) Glavni dio susreta bilo je 15. državno natjecanje mladih matematičara. Kao i uvijek, vrlo uzbudljivo. Matematičkim knjigama i drugim vrijednim predmetima nagrađeno je 22 učenika osnovnih škola i 49 učenika srednjih škola. Pohvaljeno je 15 osnovnoškolaca i 41 srednjoškolac.

Nagrade i pohvale

A program

I. razred

Sonja Žunar, SŠ Ivanec, Ivanec (I. nagrada); *Ana Kontrec*, V. gimnazija, Zagreb (I. nagrada); *Edi Ibriks*, Gimnazija A. Mohorovičića, Rijeka (II. nagrada); *Goran Žužić*, V. gimnazija, Zagreb (II. nagrada); *Ante Tojčić*, III. gimnazija, Split (II. nagrada); *Ivan Domladovec*, Gimnazija L. Vranjanina, Zagreb (II. nagrada); *Petar Mlinarić*, XV. gimnazija, Zagreb (III. nagrada); *Mirta Dvorničić*, Gimnazija A. Mohorovičića, Rijeka (III. nagrada); *Ivana Puklavec*, Gimnazija Čakovec, Čakovec (III. nagrada); *Ermin Zvizdić*, XV. gimnazija, Zagreb (pohvala); *Stjepan Šebek*, XV. gimnazija, Zagreb (pohvala); *Velimir Mihelčić*, Gimnazija A. Vrančića, Šibenik (pohvala); *Ana Radošević*, XV. gimnazija, Zagreb (pohvala); *Matej Ivanković*, Gimnazija L. Vranjanina, Zagreb (pohvala).

II. razred

Melkior Ornik, XV. gimnazija, Zagreb (I. nagrada); *Ines Marušić*, V. gimnazija, Zagreb (II. nagrada); *Ivan Gavran*, V. gimnazija, Zagreb (II. nagrada); *Sanja Miklin*, , XV. gimnazija, Zagreb (II. nagrada); *Ana Šušnjara*, V. gimnazija, Zagreb (III. nagrada); *Ivan Šandrk*, V. gimnazija, Zagreb (III. nagrada); *Filip Lavriv*, V. gimnazija, Zagreb (III.

nagrada); *Branimir Blašković*, Gimnazija Velika Gorica, Velika Gorica (III. nagrada); *Ivan Krijan*, Gimnazija Varaždin, Varaždin (pohvala); *Marina Slišković*, V. gimnazija, Zagreb (pohvala); *Ines Frančišković*, Gimnazija A. Mohorovičića, Rijeka (pohvala); *Bernard Ćosić*, Gimnazija L. Vranjanina, Zagreb (pohvala); *Mario Menix*, Gimnazija Metković, Metković (pohvala); *Stipe Skroče*, Gimnazija F. Petrića, Zadar (pohvala).

III. razred

Luka Rimanić, Gimnazija A. Mohorovičića, Rijeka (I. nagrada); *Nikola Adžaga*, V. gimnazija, Zagreb (II. nagrada); *Saša Stanko*, V. gimnazija, Zagreb (II. nagrada); *Marin Mišur*, Gimnazija Metković, Metković (III. nagrada); *Igor Čanadi*, XV. gimnazija, Zagreb (III. nagrada); *Antonio Krnjak*, Gimnazija Čakovec, Čakovec (pohvala); *Lenka Vukšić*, III. gimnazija, Split (pohvala); *Luka Žunić*, Gimnazija A. Mohorovičića, Rijeka (pohvala); *Daria Štefić*, Gimnazija Čakovec, Čakovec (pohvala); *Krešimir Mazur*, X. gimnazija, Zagreb (pohvala); *Krešimir Mišura*, V. gimnazija, Zagreb.

IV. razred

Goran Dražić, V. gimnazija, Zagreb (I. nagrada); *Josip Saratlija*, III. gimnazija, Split (II. nagrada); *Vedran Palajić*, V. gimnazija, Zagreb (II. nagrada); *Iva Kasum*, V. gimnazija, Zagreb (III. nagrada); *Filip Torić*, Gimnazija A. Vrančića, Šibenik (III. nagrada); *Antonija Novokmet*, SŠ T. Ujevića, Kutina (III. nagrada); *Damjan Pelc*, V. gimnazija, Zagreb (pohvala); *Ivica Ančić*, V. gimnazija, Zagreb (pohvala); *Mirko Čorić*, Gimnazija A. Vrančića, Šibenik (pohvala); *Tihomir Lolić*, III. gimnazija, Split (pohvala); *Ivica Cvrtila*, SŠ D. Stražimira, Sv. Ivan Zelina.

B program

I. razred

Barbara Plavčić, Gimnazija A. Mohorovičića, Rijeka (I. nagrada); *Denis Husadžić*, Gimnazija, Nova Gradiška (II. nagrada); *Ivan Vranjić*, Gimnazija A. G. Matoša, Đakovo (III. nagrada); *Manuela Činko*, GSŠ J. Dobrile, Pazin (III. nagrada); *Božana Marković*, SŠ fra A. Kačića Miošića, Ploče (III. nagrada); *Nikola Novak*, TIOŠ, Čakovec (pohvala); *Frane Burazer*, Gimnazija A. Vrančića, Šibenik (pohvala); *Frano Poljak*, Gimnazija D. Šimunovića, Sinj (pohvala); *Mirjana Prša*, Gimnazija, Gospić (pohvala); *Anamarija Fofonjka*, Gimnazija A. G. Matoša, Samobor (pohvala);

II. razred

Marta Topić, Gimnazija Varaždin, Varaždin (I. nagrada); *Tomislav Pozaić*, Srednja škola, Zlatar (II. nagrada); *Nevena Kereša*, Gimnazija Varaždin, Varaždin (III. nagrada); *Ante Dragelić*, Elektrotehnička škola, Split (III. nagrada); *Goran Šeketa*, Gimnazija, Karlovac (III. nagrada); *Dora Karmelić*, Prva sušačka hrvatska gimnazija, Rijeka (pohvala); *Ivan Blažeković*, Gimnazija Velika Gorica, Velika Gorica (pohvala); *Vedran Rafaelić*, SŠ V. Gortana, Buje (pohvala); *Krešimir Crljenko*, SŠ B. Kašića, Pag (pohvala).

III. razred

Marka Todorović, Srednja škola, Brač (I. nagrada); *Sanja Živić*, Srednja škola Mate Balote, Poreč (I. nagrada); *Matija Bakoš*, Gimnazija, Čakovec (II. nagrada); *Danijel Majdandžić*, Srednja škola, Novska (III. nagrada); *Melita Čališ*, Gimnazija A. G. Matoša, Đakovo (III. nagrada); *Sonja Sić*, Srednja škola, Pakrac (III. nagrada); *Sandra Stanišić*, Gimnazija, Nova Gradiška (pohvala); *Krunoslav Dropučić*, SŠ D. Stražimira, Sveti Ivan

Zelina (pohvala); *Ivana Lukčin*, Gimnazija F. Galovića, Koprivnica (pohvala); *Mato Tomić*, Tehnička škola, Pag (pohvala); *Darja Flegar*, Srednja škola, Ivanec (pohvala).

IV. razred

Marko Baržić, Srednja škola, Vrbovec (I. nagrada); *Dalibor Šamec*, Srednja Škola, Zlatar (II. nagrada); *Vedrana Janković*, I. gimnazija, Zagreb (II. nagrada); *Mare Mistrić*, SŠ J. Kaštelana, Omiš (II. nagrada); *Branimir Škugor*, Gimnazija A. Vrančića, Šibenik (III. nagrada); *Andrej Miškatović*, Tehnička škola, Požega (pohvala); *Martina Baretić*, Prva sušačka hrvatska gimnazija (pohvala); *Luka Bošković*, Pomorsko-tehnička škola, Dubrovnik (pohvala); *Josip Ninčević*, Gimnazija A. Mohorovičića, Rijeka (pohvala); *Davor Lisjak*, TIOŠ, Čakovec (pohvala).

Zadaci s državnog natjecanja – A varijanta

I. razred

1. Odredi troznamenkaste brojeve $\overline{xyz}$ (x, y, z su dekadske znamenke) koji su jednaki izrazu $x + y + z + xy + yz + zx + xyz$.
2. Neka su a, b, c, realni brojevi koji nisu svi jednaki, takvi da vrijedi
$$a + \frac{1}{b} = b + \frac{1}{c} = c + \frac{1}{a}.$$
Dokaži da je $a + \frac{1}{b} = -abc$.
3. Iz jednog vrha šiljastokutnog trokuta povučena je visina, iz drugog težišnica, a iz trećeg simetrala kuta. Ta tri pravca ne prolaze istom točkom, već njihove točke presjeka čine vrhove novog trokuta. Dokaži da novi trokut ne može biti jednakostraničan.
4. U polja kvadrata 3×3 treba upisati prirodne brojeve, tako da u svakom retku i svakom stupcu produkt upisanih brojeva bude 270. Na koliko je načina to moguće napraviti?

II. razred

1. Odredi sve cijele brojeve m, n za koje vrijedi
$$m^3 + n^3 = (m + n)^2.$$
2. Neka su x, y i z pozitivni realni brojevi takvi da je $xyz = 1$. Dokaži nejednakost
$$\frac{x-1}{y+1} + \frac{y-1}{z+1} + \frac{z-1}{x+1} \geqslant 0.$$
3. Kružnice C_1 i C_2 sijeku se u točkama A i B. Tangenta kružnice C_2 povučena iz točke A siječe kružnicu C_2 u točki D. Polupravac kroz točku A, koji leži unutar kuta $\sphericalangle CAD$, siječe kružnicu C_1 u točki M, kružnicu C_2 u točki N i kružnicu opisanu trokutu ACD u točki P. Dokaži da je udaljenost točaka A i M jednaka udaljenosti točaka N i P.
4. U polja kvadrata 3×3 treba upisati prirodne brojeve, tako da u svakom retku i svakom stupcu produkt upisanih brojeva bude 270. Na koliko je načina to moguće napraviti?

III. razred

1. Duljine stranica trokuta su a, b i $c=\dfrac{a^2-b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $a>b$. Dokaži da za kutove α i β, nasuprotne stranicama a i b, vrijedi $\alpha-\beta=90^\circ$.
2. U jednakokračnom trokutu ABC s krakovima $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$, D je polovište osnovice $\overline{BC}$. Neka je točka E nožiste okomice iz D na stranicu $\overline{AB}$, te F polovište dužine $\overline{DE}$. Dokaži da je AF okomito na EC.
3. Kružnice C_1 i C_2 sijeku se u točkama A i B. Tangenta kružnice C_2 povučena iz točke A siječe kružnicu C_2 u točki D. Polupravac kroz točku A, koji leži unutar kuta $\sphericalangle CAD$, siječe kružnicu C_1 u točki M, kružnicu C_2 u točki N i kružnicu opisanu trokutu ACD u točki P. Dokaži da je udaljenost točaka A i M jednaka udaljenosti točaka N i P.
4. Šest otoka povezano je linijama jednog trajektnog i jednog hidrogliserskog poduzeća. Svaka dva otoka povezana su (u oba smjera) linijom točno jednog od ova dva poduzeća. Dokaži da je moguće ciklički posjetiti četiri otoka koristeći samo linije jednog poduzeća (tj. da postoje četiri otoka A, B, C i D i poduzeće čiji brodovi plove na linijama $A\leftrightarrow B$, $B\leftrightarrow C$, $C\leftrightarrow D$, $D\leftrightarrow A$).

IV. razred

1. Dokaži da sjecište pravaca koji sadrže visine trokuta, kojeg tvore tri tangente parabole, leži na ravnalici te parabole.
2. Ako su k i n prirodni brojevi, dokaži da je izraz
$$(n^4-1)(n^3-n^2+n-1)^k+(n+1)n^{4k-1},$$
djeljiv s n^5+1.
3. Kružnice C_1 i C_2 sijeku se u točkama A i B. Tangenta kružnice C_2 povučena iz točke A siječe kružnicu C_2 u točki D. Polupravac kroz točku A, koji leži unutar kuta $\sphericalangle CAD$, siječe kružnicu C_1 u točki M, kružnicu C_2 u točki N i kružnicu opisanu trokutu ACD u točki P. Dokaži da je udaljenost točaka A i M jednaka udaljenosti točaka N i P.
4. Šest otoka povezano je linijama jednog trajektnog i jednog hidrogliserskog poduzeća. Svaka dva otoka povezana su (u oba smjera) linijom točno jednog od ova dva poduzeća. Dokaži da je moguće ciklički posjetiti četiri otoka koristeći samo linije jednog poduzeća (tj. da postoje četiri otoka A, B, C i D i poduzeće čiji brodovi plove na linijama $A\leftrightarrow B$, $B\leftrightarrow C$, $C\leftrightarrow D$, $D\leftrightarrow A$).

Zadaci s državnog natjecanja – B varijanta

I. razred

1. Neka je $x=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ i $y=\dfrac{(a-b+c)(a+b-c)}{(a+b+c)(b+c-a)}$.
Dokaži da je $(x+1)(z+1)=2$.
2. Za koje realne brojeve a jednadžba
$$|x-2|+|3-x|=a$$
ima točno dva rješenja?

3. U pravokutnom trokutu ABC $(\gamma = 90^\circ)$, središte upisane kružnice udaljeno je od vrhova A, B, C redom za $\sqrt{5}$, $\sqrt{10}$, $\sqrt{2}$ cm. Odredi polumjer tom trokutu opisane kružnice.
4. Dokaži da ne postoje neparni cijeli brojevi x, y, z za koje vrijedi
$$(x+y)^2 + (x+z)^2 = (y+z)^2.$$
5. Razred od 28 učenika dobio je za domaću zadaću 8 zadataka. Svaki učenik riješio je točno dva zadatka, a nikoj dva učenika nisu riješila ista dva zadatka. Pokaži da je svaki zadatak riješilo jednako mnogo učenika. Koliko?

II, razred

1. Ako je $z = \dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$, izračunajte zbroj $1 + z + z^2 + z^3 + \ldots + z^{2006}$.
2. Odredi koliko rješenja ima sustav jednadžbi
$$x^2 - y^2 = 0,$$
$$(x-a)^2 + y^2 = 1,$$
ovisno o vrijednosti realnog parametra a.
3. Na dužini $\overline{AB}$ odabrana je točka M i zatim su s iste strane dužine $\overline{AB}$ konstruirani jednakostranični trokuti AMD i MBC. Dokaži da četverokut $ABCD$ ima manju površinu ako je M polovište dužine $\overline{AB}$.
4. Neka su E i F točke na stranici $\overline{AB}$ pravokutnika $ABCD$ takve da je $|AE| = |EF|$. Okomica na AB u točki E siječe dijagonalu $\overline{AC}$ u točki G, a dužine $\overline{DF}$ i $\overline{BG}$ sijeku se u točki H. Dokaži da su površine trokuta FBH i GHD jednake.
5. Mogu li se bridovi tetraedra označiti brojevima 1, 2, 3, 4, 5 i 6 (svaki broj za točno jedan brid) tako da zbrojevi brojeva bridova na svakoj njegovoj strani budu međusobno jednaki?

III. razred

1. Ako vrijede jednakosti
$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\frac{z}{c} = 0 \quad \text{i} \quad \frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 1,$$
dokaži da vrijedi
$$\frac{a^2}{x^2} + \frac{b^2}{y^2} + \frac{c^2}{z^2} = 1.$$
2. Dokaži nejednakost
$$\left|\sqrt{1+\sin 2x} = \sqrt{1-\sin 2x}\right| \leqslant \sqrt{2}$$
vrijedi za sve realne brojeve x.
3. U kružnicu polumjera 1 upisan je četverokut $ABCD$, pri čemu je $\overline{AD}$ promjer kružnice.
Dokaži jednakost
$$|AB|^2 + |BC|^2 + |CD|^2 + |AB| \cdot |BC| \cdot |CD| = 4.$$

4. Oko polukugle polumjera r opisan je stožac duljine visine H, tako da su baze polukugle i stošca koncentrični krugovi. Izračunaj volumen onog dijela stošca koji ne pripada polukugli, tj. izrazi taj volumen pomoću r i H.
5. Između šest otoka uspostavljene su brodske veze. Svaki par otoka povezan je ili trajektom ili katamaranom. Dokaži da postoje tri otoka od koji su svaka dva od njih povezana istovrsnom brodskom vezom.

IV. razred

1. Niz (a_n) zadan je rekurzivno
$$a_0 = 0,$$
$$a_n = n + a_{n-1}, \quad n \in \mathbf{N}.$$
Kojem broju je jednak a_{2006}?
2. Dokaži da za svaki prirodan broj n vrijedi nejednakost
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \geqslant \sqrt{n}.$$
3. Valjkasta posuda polumjera osnovke $r = 4$ cm i duljine visine $v = 16$ cm napunjena je vodom. Odredi kut za koji treba nagnuti posudu prema ravnini osnovke tako da iz nje iscuri četvrtina vode.
4. Odredi tangens kuta koji zatvaraju zajedničke tangente krivulja $x^2 + 2y^2 = 2$ i $y^2 = 4x$.
5. Između šest otoka uspostavljene su brodske veze. Svaki par otoka povezan je ili trajektom ili katamaranom. Dokaži da postoje tri otoka od koji su svaka dva od njih povezana istovrsnom brodskom vezom.

⋆ ⋆ ⋆

Zadaci sa svih razina matematičkih natjecanja u Republici Hrvatskoj bit će tiskani u zasebnoj knjižici Matematička natjecanja 2005./2006.

Sigurno se pitate kako je prošao i izbor ekipe Republike Hrvatske za Međunarodnu matematičku olimpijadu. Nakon uzbudljivog Državnog natjecanja bilo je potrebno organizirati dodatno natjecanje da bi se konačno formirala ekipa od šest učenika za put u Sloveniju, zemlju domaćina. Putnici su:

Nikola Adžaga,

Goran Dražić,

Vedran Palajić,

Luka Rimanić,

Josip Saratlija,

Luka Žunić.

Svečano proglašenje najboljih natjecatelja i članova olimpijske ekipe obavljeno je u petak 28. travnja navečer, a 15. državni susret završen je okruglim stolom u subotu prije podne.

Međunarodni turnir mladih fizičara

Ana Smontara[1], *Zagreb*

Međunarodni turnir mladih fizičara (**IYPT** – International Young Physicist's Tournament) je međunarodno ekipno natjecanje učenika srednjih škola u znanju fizike, tijekom kojeg učenici pokazuju sposobnost, kako rješavanja složenih fizikalnih problema, tako i prezentacije rješenja kroz znanstveno utemeljenu raspravu.

Turnir je pokrenut 80-tih godina u Moskvi. Moskovsko državno sveučilište pripremilo je niz otvorenih problema iz različitih područja fizike koje su rješavale grupe učenika. Nakon nekoliko mjeseci priprema i rada na problemima, oni su se susreli i prezentirali, jedni drugima, svoja rješenja. Nisu samo prezentirali probleme drugima, nego su kroz raspravu podržavali i/ili osporavali prezentaciju rješenja drugih učenika. Nezavisni žiri sastavljen od profesora i akademika, donosio je odluku o najboljem timu. Turnir se proširio na učenike zemalja bivšeg Sovjetskog saveza i srednje Europe, a nakon promjena 1989., također i na učenike zapadnih zemalja. Dakle Turnir ima dugu tradiciju i na njemu već sudjeluju učenici iz cijelog svijeta, od Australije i Južne Koreje, preko NIS (Newly Independent States) i EU (European Union) država članica, Kenije i Brazila do SAD-a, a odvija se prema dobro utvrđenim pravilima objavljenim u Statutu i Pravilniku IYPT-a, koji se mogu naći na web adresi `www.iypt.org`.

Međunarodni organizacijski odbor sastavlja i odabire svake godine sedamnaest fizikalnih problema i šalje državama, sudionicama turnira, zajedno s pozivom za sudjelovanje i to već početkom školske godine. Tada se učenici počinju pripremati za rješavanje većine postavljenih problema. U ožujku ili travnju u zemlji sudionici turinira organizira se nacionalni turnir da bi se odabrali najbolji učenici za međunarodni turnir. Načini odabira grupe učenika se razlikuju od države do države. U zemljama gdje postoji veliki broj zainteresiranih učenika, nacionalni turiniri se odvijaju prema pravilima međunarodnog turnira, dok se u drugim zemljama samo odaberu dobri pojedninci za članove ekipe.

Na međunarodnom turniru, svaka zemlja ima pravo sudjelovati s jednom ekipom od pet učenika. Za vrijeme susreta, ekipe se sastaju u grupama od po tri, gdje prva ekipa prezentira probleme koje bira druga ekipa (ekipa izazivač), pri tome treba istaknuti da od sedamnaest problema ekipa koja prezentira može odabrati za izuzeće od prezentacije jedan problem, zatim druga ekipa prezentira rješenja problema kojeg bira prva ekipa, dok treća ekipa kritički sluša postavljanje problema i prezentaciju rješenja, te daje kratki prikaz obje prezentacije. Kratka diskusija o prezentaciji je dio nastupa. Nakon toga, žiri koji je prisutan od početka može komentirati i postavljati pitanja, te ocjenuje nastup svih ekipa. Organizira se pet krugova prezentacija tijekom susreta, tako da svaka ekipa ima mogućnost prezentirati riješenja pet različitih problema. Tri najbolje ekipe na kraju prezentiraju rješenja odabranog problema za vrijeme finala, a najbolja ekipa postaje pobjednik.

Ovogodišnji, 19. po redu Međunarodni turnir mladih fizičara održan je u Bratislavi (Slovačka), od 14. do 21. srpnja 2006., na kojem je sudjelovala i hrvatska ekipa. To je bilo šesto po redu sudjelovanje naše ekipe na IYPT-u. Početkom prošle školske godine stigao je poziv Hrvatskom fizikalnom društvu (organizatoru sudjelovanja hrvatske ekipe na IYPT-u) za ovogodišnje sudjelovanje s postavljenim problemima. Na temelju

[1] Voditeljica Laboratorija za istraživanje toplinske vodljivosti na Institutu za fiziku u Zagrebu, bila je pozvana za članicu Međunarodnog žirija IYPT-a 1995. godine.

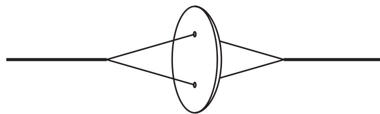
pristiglih radova krajem ožujka za predstavnika Hrvatske izabrana je ekipa učenika: *Damjan Pelc*, *Marin Lukas*, *Ivan Sudić* i *Joško Jeličić* (svi iz V. gimanzije u Zagrebu), te *Milan Marković* iz XV. gimnazije u Zagrebu i voditelji *Dario Mičić* (prof. V. gimnazije u Zagrebu) i dr. sc. *Željko Marohnić* (Institut za fiziku u Zagrebu). Učenici su pokazali zavidno znanje i postigli odličan rezultat. Naša ekipa je bila prva, a iza nje su ekipe Njemačke i Koreje, koje su bile kao najuspješnije od njih 25 koliko ih je bilo na turniru. Učenici su pobjedu u finalu odnijeli prezentacijom uređaja za mjerenje količine elektriciteta koji su sami izradili, a radi se o eksperimentu u kojem se krpom trlja plastično ravnalo dok se ne dobije gustoća naboja koja se očitava pomoću njihove sonde.

O pripremama i sudjelovanju na ovogodišnjem turniru najočitije se izrazio sudionik Turnira Marin Lukas. "Evo kako se već moglo vidjeti naš projekt IYPT 2006, u čiji uspjeh su mnogi često sumnjali, uspješno je završen osvajanjem prvog mjesta u Bratislavi. Taj uspjeh rezultat je višegodišnjeg rada učenika, kako naše tako i drugih škola, prof. Daria Mičića i njegovih suradnika. Učenici V. gimnazije na IYPT su prvi put nastupili 2004. u Australiji u sastavu: Marko Budić, Marin Lukas, Damjan Pelc. Ta ekipa probijala je led. U Švicarskoj 2005. nastupili su: Marin Lukas, Milan Marković, Damjan Pelc, Marko Popović i Ivan Sudić. Poučeni iskustvom iz Australije ekipa je osvojila 12. mjesto. U školskoj godini 2005./2006. slijedile su najopsežnije pripreme za IYPT ikad održane. Cijela ekipa radila je do iznemoglosti uz pomoć prof. Daria Mičića i dr. sc. Željka Marohnića. Naravno kada govorimo o IYPT 2006. nikako ne možemo zaboraviti pomoć koju su pružili pojedini učenici V. gimnazije kad je bilo najteže. Tako bi se posebno zahvalili G. Macutu za informatičko-elektroničku pomoć, Saši Stanku za povremena računanja i svima ostalima. Na kraju što reći osim da je beskonačan nered iz kabineta fizike V. gimnazije, koji često izaziva ljutnju pojedinaca, trenutno najbolji na svijetu."

Hrvatska (putem Hrvatskog fizikalnog društva koje organizira naše sudjelovanje) dobila je poziv za sudjelovanje na Turniru sljedeće godine zajedno s problemima za rješavanje. Radni jezik Turnira je engleski stoga i postavljene zadatke donosimo u originalnoj verziji na engleskom jeziku.

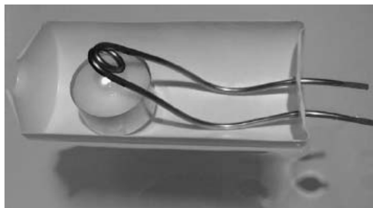
Postavljeni problemi za Turnir IYPT u 2007. godini.

1. **Filament.** There is a significant current surge when a filament lamp is first switched on. Propose a theoretical model and investigate it experimentally.
2. **Slinky.** Suspend a Slinky vertically and let it fall freely. Investigate the characteristics of the Slinky's free-fall motion.
3. **Water jets.** What can be observed when two water jets collide at different angles?
4. **Spring thread.** Pull a thread through the button holes as shown in the picture. The button can be put into rotating motion by pulling the thread. One can feel some elasticity of the thread. Explain the elastic properties of such a system.

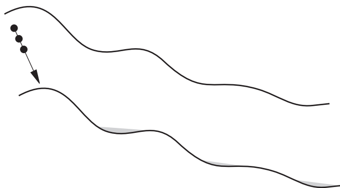


5. **Razor Blade.** A razor blade is placed gently on a water surface. A charged body brought near the razor makes it move away. Describe the motion of the razor if an external electric field is applied.

6. **Rheology.** It has been said that if you are sinking in soft mud, you should not move vigourously to try to get out. Make a model of the phenomenon and study its properties.
7. **Crickets.** Some insects, such as crickets, produce a rather impressive sound by rubbing together two parts of their body. Investigate this phenomenon. Build a device producing a sound in a similar way.
8. **Condensation.** Water droplets form on a glass filled with cold water. Explain the phenomenon and investigate the parameters that determine the size and number of droplets on the glass.
9. **Ink Droplet.** Place a droplet of ball pen ink on a water surface. The droplet begins to move. Explain the phenomenon.
10. **Steam Boat.** A boat can be propelled by means of a candle and metal tubing with two open ends (an example is shown in the picture). Explain how such a boat is propelled and optimize your design for maximum velocity.



11. **Water Ski.** What is the minimum speed needed to pull an object attached to a rope over a water surface so that is does not sink. Investigate the relevant parameters experimentally and theoretically.
12. **Fluid lens.** Develop a fluid lens system with adjustable focus. Investigate the quality and possible applications of your system.
13. **Balloon.** Measure the change of the optical properties of the skin of a balloon during its inflation.
14. **Earthquake.** Suggest a mechanism that makes buildings resistant to earthquakes. Perform experiments and explain the results.
15. **Blowpipe.** Investigate the motion of a projectile inside a blowpipe. Determine the conditions for maximum exit velocity when blown by mouth.
16. **Water Cascade.** Arrange a corrugated drainage pipe, or similar, on an incline. Allow water to flow through the pipe and then carefully stop the flow. Investigate the behaviour of the system when water is dropped into the pipe.



17. **Ice Bulge.** Fill a plastic tray with water. When frozen, under certain conditions, a bulge can appear on the surface. Investigate this phenomenon.

Pozivamo učenike da pokušaju riješiti neki od postavljenih problema koji, možda na prvi pogled, izgledaju jako lagani. Da li je zaista tako uvjerite se sami! Vaša rješenja objavit ćemo u nekom os sljedećih brojeva.

22. ljetna škola mladih fizičara Hrvatskog fizikalnog društva Labin, 18. – 24. lipnja 2006.

Ljetna škola mladih fizičara, dvadeset druga po redu, održana je u Labinu od 18. do 24. lipnja, a domaćin je bila Srednja škola Mate Blažine. Ove godine obilježavamo 150. obljetnicu rođenja Nikole Tesle, te je organizator škole, Hrvatsko fizikalno društvo, odabirom teme *Teslino nasljeđe u fizici* želio podsjetiti na iznimno nasljeđe koje je Tesla ostavio čovječanstvu i istaknuti koliko zapravo svakodnevni život ovisi o njegovim otkrićima i izumima, što je u samom Uvodu *Zbornika predavanja škole* istaknuo njezin voditelj dr. sc. Zlatko Vučić. Zato je većina predavanja bila posvećena životu i radu Nikole Tesle.

Evo popisa svih predavanja: Darko Androić (PMF Zagreb), *Nikola Tesla: vizije, život i postignuća*; Đuro Drobac (IF Zagreb), *Nikola Tesla i otkriće rotacijskog magnetskog polja*; Željko Marohnić (IF Zagreb), *Interaktivni ekesperimenti u magnetizmu – permanentni magneti u gibanju*; Hrvoje Skenderović (IF, Zagreb), *Nikola Tesla i plazma u vakuumskoj cijevi*; Lahorija Bistričić i Mile Baće (FER, Zagreb), *Teslin trafo i Kirlianova fotografija*; Zvonimir Šipuš (FER, Zagreb), *Svjetski bežični energetski i komunikacijski sustav u očima Nikole Tesle*; Nikola Poljak (PMF, Zagreb), *Nikola Tesla i Gugliegmo Marconi kontraverzna suradnja*; Tome Antičić (IRB, Zagreb), *Od Tesle do akceleratora TESLE*; Dario Hrupec (IRB, Zagreb), *Tesla i kozmičke zrake*; Nikša Krstulović (IF, Zagreb), *Spektroskopija: svjetlo novog doba*; Mario Novak (PMF, Zagreb), *Vodljivi polimer polianilin*; Željko Brenčić (SŠ, Labin), vježbe, *Oscilatori*.

Dio programa škole je i rješavanje problemskih zadataka iz fizike, koje su ove godine vodili studenti fizike na PMF-u *Neven Čaplar* i *Antonio Majdančić*, koji su kao učenici sudjelovali u radu prijašnjih ljetnih škola mladih fizičara.

Programom škole obuhvatio je i izvannastavne aktivnosti. U okviru njih polaznici su posjetili zvjezdarnicu Višnjan i Tićan, bili su na cjelodnevnom izletu u nacionalnom parku Brijuni, te posjetili termoelektranu Plomin. Tijekom posjete zvjezdarnici, organizirano je i popularno predavanje njenog voditelja Korada Korlevića o aktivnostima zvjezdarnice kao i planovima za proširenje istih u edukativnom i znanstvenom aspektu, kao izrada i postavljanje dodatne opreme (npr. 1-metarski teleskop).

Polaznici ovogodišnje ljetne škole odabrani su na temelju rezultata na Državnom natjecanju iz fizike, a tri sudionika bila su Hrvati iz Bosne i Hercegovine uz potporu Ureda za međunarodnu suradnju Ministarstva znanosti, obrazovanja i športa Republike Hrvatske. Evo popisa učenika koji su sudjelovali na školi; njih šest su učenici osnovne škole: *Marija Kranjčević*, *Petar Kunštek* i *Borna Miloš* (Zagreb); *Margaret Ružman* i *Martina Derežić* (Kloštar Podravski) i *Ivan Knežević* (Split), a ostali, njih četerdeset i jedan učenik, su iz srednje škole: *Zrinka Bočkaj* i *Marin Mišur* (Metković), *Danijel Pikutić* i *Slaven Mišak* (Varaždin); *Ivan Domaldovac*, *Petar Mlinarić*, *Nina Kamčev*, *Irma Telarović*, *Veronika Sunko*, *Zorana Ćurković*, *Tena Dupček*, *Leo Osvald*, *Stjepana Brzaj*, *Matija Varga*, *Igor Telalović*, *Mihita Cvitanović*, *Marko Popović*, *Stjepan Vučković*, *Ivan Habrka*, *Petra Bevandić*, *Domagoj Eršek*, *Petar Čuček* (Zagreb); *Stipe Vujić*, *Zlatan Živković*, *Grgo Đželalija*, *Lenka Vukšić* i *Boran Car* (Split); *Matija Vrhovec* (Zabok); *Marko Čolić* (Osijek); *Jurica Kundrata* (Sisak); *Karlo Griparić* i *Mauro Čekada* (Labin); *Slaven Mišak*, *Niko Boban*, *Velimir Mihelčić* i *Siniša Milović* (Šibenik); *Stanislav Uložnik* (Sarajevo, BiH), *Liljana Lukić* (Tuzla, BiH) i *Ana Ivšić* (Travnik, BiH), te nastavnici *Liljana Nemet* (XV. gimnazija, Zagreb) i *Nela Jokić* (Katolički školski centar, Travnik, BiH).

Više detalja o predavanjima i ostalim aktivnostima, kao i fotoalbum s ovogodišnje ljetne škole možete pronaći na `www.hfd.hr/ljskola`.

Ur.



Zasloni od savitljivih nanocjevčica

Ante Bilušić[1], *Split*

U trenucima kada gledamo televizijsku emisiju ili pak koristimo računalo ili mobitel, obično ne razmišljamo o zaslonu – ključnom sučelju bez kojega navedene uređaje ne bismo niti mogli koristiti. Zasloni koji trenutno postoje na tržištu mogu se podijeliti u dvije osnovne skupine: zaslone s katodnim cijevima i tanke zaslone.

Tehnologija katodnih cijevi je poznata već gotovo čitavo stoljeće. Stvaranje se slike temelji na sudarima brzih elektrona s fluorescentnim materijalom nanesenim na prednji dio cijevi. Elektroni su ubrzani snažnim električnim poljem (reda veličine kilovolta), a na željeno mjesto na zaslonu dovedeni nizom međusobno okomitih magnetskih polja. Svaka se točkica na fluorescentnom dijelu osvježava 50 do 100 puta u sekundi, što radi tromosti oka stvara dojam pokretne slike.

Zadnjih godina zasloni s katodnim cijevima svoje mjesto polako ustupaju takozvanim tankim zaslonima, čija se tehnologija temelji na korištenju tekućih kristala (LCD, od engl. *liquid crystal displays*) ili plazme. Tehnologija LCD-zaslona koristi činjenicu da dovođenjem napona na njegove krajeve tekući kristal polarizira svjetlost. Sloj se tekućih kristala postavi između svjetlosnog izvora i polarizatora s osi polarizacije okomitoj osi polarizacije sloja tekućeg kristala (korisnik zaslona gleda prema polarizatoru). Kontrolom se napona pojedinih djelića sloja tekućeg kristala kontrolira propuštanje svjetlosti kroz vanjski polarizator te time nadzire nastanak slike. LCD-zasloni se najčešće susreću kod prijenosnih računala.

Zaslone temeljene na plazmi često susrećemo na trgovima velikih gradova, željezničkim kolodvorima ili zrakoplovnim lukama. Fizičari i kemičari plazmom nazivaju ionizirani plin. Njegovim pobuđenjem (na primjer, visokim naponom) nastaje emisija fotona čija se valna duljina može regulirati sastavom plazme. Zasloni se sastoje od niza pravilno poredanih komorica ispunjenih plazmom, a nastanak slike se nadzire emisijom svjetlosti iz svake komorice.

Tržištu se polako nameću neke nove tehnologije proizvodnje tankih zaslona. Jedna od njih su i takozvane organske svijetleće diode – OLED (od engl., *organic light emitted diodes*). One se od "običnih" svijetlećih dioda (ili LED-a) razlikuju u korištenom poluvodičkom materijalu: umjesto anorganskih koriste se organski poluvodiči. Prednost zaslona s OLED-om prema onima s LCD-om je mnogo širi korisni kut gledanja (sigurno ste mijenjanjem kuta gledanja u zaslon s LCD-om uočili da slika poprima bitno drugačiji izgled). Loša je strana zaslona s OLED-om njihov relativno kratak vijek trajanja.

Tanki zasloni s ugljikovim nanocjevčicama su blizu komercijalne uporabe. Istraživači zaposleni u laboratorijima korejske tvrtke *Samsung* su proizveli takav zaslon raspona dijagonale 76 cm. Ugljikove nanocjevčice su dugačke cilindrične molekule nastale zavrtanjem jednog ili više slojeva grafita. Ovisno na načinu zavrtanja, nanocjevčice ugljika s gledišta njihove električne vodljivosti mogu biti izolirajuće ili metalne.

[1] Autor je docent na Fakultetu prirodoslovno-matematičkih znanosti i kineziologije Sveučilišta u Splitu (bilusic@pmfst.hr).

Znanstvenici trenutno još nemaju razvijen način kontrolirane proizvodnje izolirajućih ili metalnih nanocjevčica ugljika, što sprečava istraživanja njihove uporabe u polju mikro- i nanoelektronike. Iz toga je razloga pažnja izučavanja primjene nanocjevčica ugljika usmjerena prema područjima u kojima su njihova električna svojstva nevažna, poput, nanomotora, dijelova kompozitnih materijala iznimne čvrstoće, spremnika vodika velikog kapaciteta (koji bi se koristili u motorima pogonjenima vodikom) ili emisije elektrona uslijed kvantno-mehaničkog učinka tuneliranja. Upravo se ovo potonje svojstvo koristi pri konstrukciji zaslona: nanocjevčice ugljika se potaknu na emisiju elektrona koji potom, kao u katodnoj cijevi, međudjeluju s nekim fluorescentnim materijalom stvarajući sliku. U odnosu na katodnu cijev u kojima je za emisiju elektrona potreban napon od nekoliko tisuća volti, kod nanocjevčica ugljika se radi o naponu od svega nekoliko volti.

Sve gore navedene vrste zaslona imaju jednu zajedničku osobinu: nesavitljivost. Savitljivi bi zasloni imali veliko područje primjena: zamislite samo elektroničke novine čiji bi se sadržaj učitao putem bežične mreže te potom savile i spremile u džep ili prozirni podatkovni zaslon zalijepljen na prednje staklo automobila, kao u filmovima o tajnom agentu 007! Za sada su najozbiljniji kandidati savitljivih zaslona oni temeljeni na OLED-u ili ugljikovim nanocjevčicama. Prodor u tome polju je napravila skupina američkih znanstvenika koja je uspjela poslagati snopiće nanocjevčica ugljika na bazu od savitljivog polimera dobivenog od dimetil-siloksana. Savitljivost zaslonu osigurava savršeno močenje dimetil-siloksana i snopića ugljikovih nanocjevčica zbog čega se snopići pri savijanju ne lome niti dolazi do međusobnog poništavanja električnih polja pojedinih snopića (što bi spriječilo emisiju elektrona). Ipak, to je samo prvi korak do savitljivog zaslona: sljedeći je nastojati proizvesti savitljivi fluorescentni sloj koji bi se savijao na potpuno jednak način kao i polimer s nanocjevčicama ugljika. Svaka nejednakost u savijanju polimera i flurescentnog sloja bi dovela do ozbiljnih izobličenja slike.

Literatura

[1] Lásló Forró, Nature, 441 (2006) 414.

⋆ ⋆ ⋆

PAŽNJA! — STARI BROJEVI — U našem skladištu ima starih brojeva, i to: god. XVI, br. 4; god. XXXII, br. 3; god. XXXIII, br. 4; god. XXXIV, br. 3, 4; god. XXXV, br. 3; god. XXXVI, br. 1, 2, 3, 4; god. XXXVII, br. 1, 4; god. XXXIX, br. 1, 2, 3, 4; god. XL, br. 2, 3, 4; god. XLI, br. 1, 2, 3, 4; god. XLII, br. 3-4; god. XLIV, br. 1, 2, 3, 4; god. XLV, br. 1, 2, 3, 4; god. XLVI, br. 1, 2, 3, 4; god. XLVII, br. 1, 2, 3, 4; god. XLVIII, br. 1, 2, 3, 4; god. XLIX, br. 1, 2, 3, 4; god. L, br. 1, 2, 3, 4; god. LI, br. 1, 2, 3, 4; god. LII, br. 1, 2, 3, 4; god. LIII, br. 1, 2, 3, 4; god. LIV, br. 1, 2, 3, 4; god. LV, br. 1, 2, 3, 4; god. LVI, br. 1, 2, 3, 4.

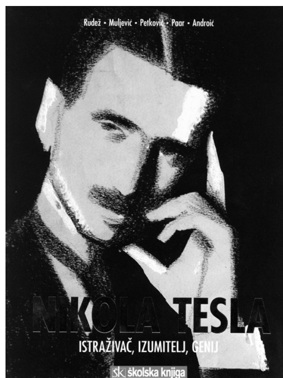
Cijena pojedinog broja je 5 kuna.

Izvanredni broj (E) – zadaci iz matematike (cijena 20 kn); Izvanredni broj (F) – Rječnik matematičkih naziva – hrvatski, engleski, njemački (cijena 30 kn); Izvanredni broj (H) – zadaci iz matematike (cijena 25 kn).



NOVE KNJIGE

Rudež-Muljević-Petković-Paar-Androić, Nikola Tesla, istraživač, izumitelj, genij, Školska knjiga, Zagreb.



Ova godina je godina Nikole Tesle kojom se obilježava 150. obljetnica njegovog rođenja. Naša nacionalna izdavačka kuća "Školska knjiga" se pridružila obilježavanju te obljetnice knjigom *Nikola Tesla, istraživač, izumitelj, genij* autora profesora emeritusa Vladimira Muljevića, akademika Vladimira Paara, profesora Tomislava Petkovića, docenta Darka Androića i novinarke Tanje Rudež, naših poznatih stručnjaka i popularizatora znanosti.

Knjiga je podijeljena u sedam odvojenih poglavlja: *Djetinjstvo i školovanje*; *Patenti i izumi*, *Vrhunac Teslinoga djelovanja u SAD-u* (autor V. Muljević); *Teslini izumi u fizici i njegove inženjerske intuicije* (T. Petković); *Vizije, život i postignuća* (D. Androić); *Nikola Tesla u fizici* (V. Paar) i *Život vizionara* (T. Rudež) i otkriva i neke zanimljive, do sada nepoznate podatke o životu tog genijalnog čovjeka.

Svako poglavlje (ili više) je pogled njenog autora na tog vizionara 21. stoljeća. Profesor Muljević u svojim prilozima (poglavlja 1. do 3.) upoznaje čitaoca s rodoslovljem obitelji Tesla, njegovim školovanjem, prvo u Gospičkoj realki a potom u realki u Rakovcu, školi u kojoj je nastava fizike bila na visokoj razini. Sam Tesla kaže u svojoj autobiografiji: "Veoma sam se zainteresirao za elektricitet, potaknut utjecajem svojeg profesora fizike koji je bio genijalan čovjek, a često je demonstrirao osnovne zakone aparaturama koje je sam konstruirao. Sjećam se jedne sprave u obliku staklenog balona, obavijenog staniolom, koji se brzo okretao kad bi bio spojen s električnom strujom. Ne mogu vam izraziti ni približno objasniti svoje uzbuđenje dok sam prisustvovao njegovim pokusima s ovim tajanstvenim fenomenom. Svaki dojam proizveo je tisuće odjeka u mom mozgu. Želio sam o toj izvanrednoj snazi saznati više. Žudio sam za pokusom, za istraživanjem, ali predao sam se teška srca sudbini", to je odigralo bitnu ulogu u Teslinoj odluci da se posveti elektrotehnici.

U četvrtom poglavlju Tomislav Petković s Fakulteta elektrotehnike i računarstva u Zagrebu, se osvrće na: *Teslino nasljeđe u suvremenoj znanosti i kulturi*, *Teslin inženjerski duh* koji je poput Faradayevog i Michelsonovog dokazan u jedinstvenom eksperimentalnom zanosu cijelog Teslinog života, *Teslin transformator-izvor RF polja velike snage i temeljni uređaj za bežični prijenos energije, te rasvjetu na daljinu*, te na *Tesline izume u svjetlu suvremene elektromagnetske kulture*.
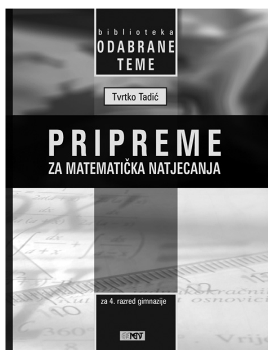
Darko Androić s Prirodoslovno-matematičkog fakulteta u Zagrebu u petom *poglavlju Vizije, život i postignuća* posebno obrađuje: *Fundamentalne sile u prirodi*; *elektromagnetska sila*, *eksperimenti i spoznaje i AC/DC rat struja. O doprinosima Nikole Tesle u fizici* kritički se osvrće u šestom poglavlju akademik Vladimir Paar.

Svoj pogled, utemeljen na vlastitim istraživanjima života i rada Nikola Tesle, u posljednjem sedmom poglavlju knjige *Život vizionara Nikole Tesle* daje fizičarka – popularizatorica prirodnih znanosti Tanja Rudež.

Knjiga je specifična po tome što sadržajem zadire u same temelje Teslinih znanstvenih propitivanja raščlanjujući njegovu fizikalnu ostavštinu, bogato je ilustrirana i bez sumnje, svaki stručnjak ali i nestručnjak u polju fizike, elektrotehnike i njihovih primjena poželio bi je imati u svojoj biblioteci.

Ana Smontara, Institut za fiziku, Zagreb

Tvrtko Tadić, Pripreme za matematička natjecanja za 4. razred gimnazije, Element, Zagreb, 2006.



U nakladi Elementa izašla je knjiga *Pripreme za matematička natjecanja za 4. razred gimnazije*. Autor je dugogodišnji natjecatelj i olimpijac, a sada i student matematike, Tvrtko Tadić.

Knjiga je nastala na osnovi materijala koje je autor priredio dok je držao grupu iz matematike za učenike četvrtog razreda u V. gimnaziji školske godine 2004./05. Osnovno bogatstvo ove knjige je u brojnim, raznovrsnim i dobro odabranim zadacima i rješenjima. Njih je autor, poučen svojim natjecateljskim iskustvom, izabrao iz vrlo opsežne strane literature. Na hrvatskom jeziku se o nekim temama zastupljenim u ovoj knjizi može naći vrlo malo literature prilagođene srednjoškolskim natjecateljima.

Knjiga ima 277 stranica, šest poglavlja i dva dodatka:

1. Matematička indukcija,
2. Kompleksni brojevi u geometriji,
3. Funkcije,
4. Nizovi i zbrojevi,
5. Odabrane teme prebrojavanja,
6. Alati matematičke analize,

A. Izlet u teoriju grafova,

B. Pripremni zadaci za natjecanja.

U ovako kratkom prikazu ne možemo napraviti pregled obimne građe ove knjige. Zato ćemo samo spomenuti ustrojstvo poglavlja. U prvom dijelu svakog poglavlja navode se uz potrebnu teoriju mnogobrojni detaljno riješeni primjeri natjecateljskog tipa koji je ilustriraju. U drugom dijelu poglavlja nalazi se lista od dvadesetak zadataka s različitih natjecanja koju slijede lijepa i poučna rješenja. Posebno je pohvalno što je autor uz gotovo svaki zadatak i rješenje naveo godinu natjecanja te ime rješavača (ukoliko je poznato). U posljednjem poglavlju navodi se oko 200 zadataka bez rješenja s različitih stupnjeva (pa zato i težina) natjecanja, složenih u tri skupine. Knjiga je obogaćena brojnim crtežima

Ovu knjigu ne samo da preporučujem svim natjecateljima četvrtih (ali i nižih) razreda srednje škole i njihovim mentorima, nego vjerujem da će zbog velikog broja zadataka i rješenja te izbora tema postati nezaobilazan priručnik za svakog tko se bavi srednjoškolskim natjecanjima u Hrvatskoj.

Tomislav Pejković, Zagreb

Zadaci s prijemnih ispita na Matematičkom odjelu i Fizičkom odsjeku Prirodoslovno-matematičkog fakuteta u Zagrebu

Kao dio razredbenog postupka u prvom upisnom roku, 13. srpnja 2006. godine održan je test provjere znanja na PMF – Matematičkom odjelu i PMF – Fizičkom odsjeku. Uz dozvolu ovih institucija, donosimo zadatke koji su bili zadani na tom testu.

Test na PMF – Matematičkom odjelu sadržavao je zadatke M-1 – M-20, I-1 – I-5 i F-1 – F-8, a test na PMF – Fizičkom odsjeku zadatke M-1 – M-20 i F-1 – F-13.

Kod zadataka iz fizike možete uzeti da je $g = 10\ \mathrm{m/s^2}$, $c = 300\,000\ \mathrm{km/s}$, $e = 1.6 \cdot 10^{-19}$ C.

Zadaci iz matematike

M-1. Dvanaestorici radnika za obaviti neki posao treba 10 dana. Ako se nakon dva dana razbolio jedan radnik, a nakon 8 dana (od početka) još jedan, tada je obavljanje posla trajalo ukupno:
A. 10 dana **B.** 11 dana **C.** 12 dana **D.** 13 dana **E.** 17 dana

M-2. Vrijednost sume $\dfrac{1}{2\cdot 6}+\dfrac{1}{6\cdot 10}+\dfrac{1}{10\cdot 14}+\ldots+\dfrac{1}{2002\cdot 2006}$ jednaka je
A. $\dfrac{501}{4012}$ **B.** $\dfrac{603}{5012}$ **C.** $\dfrac{503}{4028}$ **D.** $\dfrac{527}{4018}$ **E.** $\dfrac{607}{4018}$

M-3. Broj troznamenkastih prirodnih brojeva kojima je umnožak znamenaka jednak 0 je
A. 81 **B.** 90 **C.** 100 **D.** 171 **E.** 190

M-4. Operacija $*$ definirana je na skupu svih racionalnih brojeva formulom $x * y = x + \left(y + \dfrac{1}{2}\right)$. Ta operacija je
A. nekomutativna i neasocijativna **B.** komutativna, ali ne asocijativna
C. asocijativna, ali ne komutativna **D.** komutativna i asocijativna
E. nedefinirana za neke $x, y \in \mathbf{Q}$

M-5. Dani su polinomi $P(x) = x^n \cdot (x-1)$ i $Q(x) = (x^2 + x + 1)^m$. Kojeg je stupnja produkt $P(x) \cdot Q(x)$?
A. $2mn$ **B.** $m+n+1$ **C.** $2m(n+1)$ **D.** $2m+n+1$ **E.** $m+n$

M-6. Dan je niz $a_n = n - \cos(n\pi)$, $n \in \mathbf{N}$. Broj članova niza koji su manji od a_{2006} je
A. 2003 **B.** 2004 **C.** 2005 **D.** 2006 **E.** 2007

M-7. Vrijednost izraza $\left(\dfrac{1}{\log_{3/2} 2} - \dfrac{1}{\log_{2/3} 3}\right) \cdot \dfrac{1}{\log_2 3 + \log_2 2}$ leži unutar intervala
A. $\left\langle \dfrac{1}{2}, 1 \right\rangle$ **B.** $\left\langle -\dfrac{1}{2}, 0 \right\rangle$ **C.** $\left\langle 0, \dfrac{1}{2} \right\rangle$ **D.** $\left\langle 1, \dfrac{3}{2} \right\rangle$ **E.** $\left\langle \dfrac{3}{2}, 2 \right\rangle$

M-8. Za rješenja jednadžbe $\left(\frac{2}{3}\right)^{x-1}\left(\frac{27}{8}\right)^{\frac{2}{x}}=\frac{9}{4}$ vrijedi

A. zbroj rješenja je 5 **B.** zbroj rješenja je 1 **C.** umnožak rješenja je 1 **D.** zbroj rješenja je -1 **E.** umnožak rješenja je 12

M-9. Broj nultočaka funkcije $f(x)=|x-5+|x-2||-|x-1|$ je

A. 1 **B.** 3 **C.** 4 **D.** 6 **E.** 8

M-10. Rješenje nejednadžbe $\frac{x}{x-2}\leqslant\frac{6}{x-1}$ je skup

A. $\langle-\infty,3\rangle\cup\langle 4,+\infty\rangle$ **B.** $[3,4]$ **C.** $\emptyset$ **D.** $\langle-\infty,1]\cup[2,3\rangle\cup\langle 4,+\infty\rangle$ **E.** $\langle 1,2\rangle\cup[3,4]$

M-11. Koliko ima realnih brojeva x za koje je $\sqrt{3}\sin x+\cos x=2$ i $x^2+4x-5<0$?

A. 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 3 **E.** 4

M-12. Koliko ima uređenih parova brojeva (i,j) takvih da je $i,j\in\{1,\ldots,20\}$ i $|i-j|\leqslant 2$?

A. 67 **B.** 68 **C.** 94 **D.** 95 **E.** 100

M-13. Površine dvaju sličnih trokuta su $25\,\text{cm}^2$ i $400\,\text{cm}^2$. Ako je opseg manjeg trokuta $25\,\text{cm}$, opseg većeg iznosi

A. 75 cm **B.** 100 cm **C.** 200 cm **D.** 400 cm **E.** 625 cm

M-14. Da bi trokuti ABC i $A'B'C'$ bili sukladni, **nije dovoljno** da bude

A. $|AB|=|A'B'|,\ |BC|=|B'C'|,\ \sphericalangle BAC=\sphericalangle B'A'C'$
B. $|AB|=|A'B'|,\ |BC|=|B'C'|,\ |CA|=|C'A'|$
C. $|AB|=|A'B'|,\ \sphericalangle CAB=\sphericalangle C'A'B',\ \sphericalangle ABC=\sphericalangle A'B'C'$
D. $|AB|=|A'B'|,\ |BC|=|B'C'|,\ \sphericalangle ABC=\sphericalangle A'B'C'$
E. $|AB|=|A'B'|,\ \sphericalangle ABC=\sphericalangle A'B'C',\ \sphericalangle BCA=\sphericalangle B'C'A'$

M-15. Dvije stranice trokuta odnose se kao $2:1$, a odgovarajući kutovi kao $3:1$. Ako je površina tog trokuta $\frac{3\sqrt{3}}{2}$, onda je njegov opseg

A. $2+2\sqrt{3}$ **B.** 6 **C.** $3+3\sqrt{3}$ **D.** $2\sqrt{3}$ **E.** $\frac{3+3\sqrt{2}}{2}$

M-16. Duljine osnovica trapeza su 20 i 6, a duljine njegovih krakova 13 i 15. Površina trapeza iznosi

A. 156 **B.** 168 **C.** 182 **D.** 195 **E.** nemoguće je odrediti

M-17. U koordinatnoj ravnini zadane su točke $A(1,1)$, $B(1,3)$, $C(3,4)$, $D(3,2)$. Te točke čine

A. pravokutnik **B.** kvadrat **C.** romb **D.** paralelogram **E.** peterokut

M-18. U koordinatnom sustavu zadane su točke $A(-1,0)$ i $B(4,0)$. Zbroj površina svih pravokutnih trokuta kojima je $\overline{AB}$ hipotenuza, a vrh pravog kuta leži na pravcu $y=x+2$ iznosi

A. $\frac{35}{4}$ **B.** $\frac{15}{4}$ **C.** 5 **D.** $\frac{15}{2}$ **E.** 7

M-19. Za koliko treba povećati volumen kugle da bi se njeno oplošje povećalo za 125%?

A. za 337.5% **B.** za 237.5% **C.** za 139.75% **D.** za 39.75% **E.** za 125%

M-20. Pobočni bridovi pravilne uspravne četverostrane piramide sukladni su dijagonalama osnovice. Ako je duljina brida osnovice 6, onda volumen kugle opisane toj piramidi iznosi
A. $72\sqrt{2}\,\pi$ **B.** $96\,\pi$ **C.** $64\,\pi$ **D.** $144\,\pi$ **E.** $64\sqrt{6}\,\pi$

Zadaci iz informatike

I-1. Što je od ponuđenog operacijski sustav?
A. Windows **B.** Word **C.** Excell **D.** Pascal **E.** Google

I-2. $(12345)_6$ je jednako
A. $(12101112)_3$ **B.** $(2000212)_3$ **C.** $(2120002)_3$ **D.** $(1222012)_3$ **E.** $(2102221)_3$

I-3. Ako niz znamenki u **binarnom** zapisu broja $(FEDCBA)_{16}$ zapišemo obrnutim redom, dobit ćemo broj
A. $(12345)_{16}$ **B.** $(5D3B7F)_{16}$ **C.** $(F7B3D5)_{16}$ **D.** $(ABCDEF)_{16}$ **E.** $(7F6E5D)_{16}$

I-4. Na koliko načina možemo izabrati istinitosne vrijednosti varijabli A, B, C tako da logička formula $A \to (B \to C)$ bude istinita?
A. 15 **B.** 8 **C.** 7 **D.** 6 **E.** 0

I-5. Koji će broj ispisati sljedeći algoritam za ulaz $n = 12345$?

```
ulaz (n);
i := 1 ;
dok je i * i < n
    | i := i + 1 ;
izlaz (i) ;
```

A. 112 **B.** 111 **C.** 110 **D.** 12544 **E.** 109

Zadaci iz fizike

F-1. Automobil prijeđe u prva dva sata 120 km, a u sljedeća tri sata još 150 km. Kolika mu je bila prosječna brzina na cijelom putu?
A. 54 km/h **B.** 55 km/h **C.** 135 km/h **D.** 56 km/h **E.** 58 km/h

F-2. U posljednjoj sekundi slobodnog pada tijelo prijeđe 35 m. Koliko dugo tijelo pada?
A. 5 s **B.** 4 s **C.** 3 s **D.** 2 s **E.** 1 s

F-3. Homogena greda mase 60 kg duljine 2 m obješena je 50 cm daleko od jednog svog kraja. Kolikom će silom drugi kraj grede pritiskati na ruku ako želimo da greda bude u horizontalnom položaju?
A. 20 N **B.** 150 N **C.** 200 N **D.** 300 N **E.** 450 N

F-4. Šuplja metalna sfera polumjera 12 cm nabijena je količinom naboja 10 nC. Koliki je iznos električnog polja na mjestu udaljenom 5 cm od središta sfere?
A. $0.36 \cdot 10^6$ N/C **B.** 36 kV/m **C.** 0 V/m **D.** $2.8 \cdot 10^{-5}$ N/C **E.** $1.8 \cdot 10^3$ V/m

F-5. Tri jednaka kondenzatora kapaciteta $30\,\mu$F spojena su u seriju i priključena na napon gradske mreže (220 V, 50 Hz). Koliki najmanji osigurač trebamo upotrijebiti, a da ne pregori?
A. 0.32 A **B.** 10 A **C.** 1 A **D.** 3.2 A **E.** 6 A

F-6. Brzina longitudinalnih valova u Zemljinom omotaču je $13.8\,\mathrm{km/s}$, a u Zemljinoj jezgri $8.8\,\mathrm{km/s}$. Odredite kut loma vala, koji upada iz omotača na granicu omotač–jezgra pod kutom od $45°$. Omotač obavija Zemljinu jezgru.
A. $26.8°$ **B.** $63.2°$ **C.** $53.6°$ **D.** $15.2°$ **E.** nema loma valova

F-7. Aktivnost nekog izvora se za deset dana smanji tri puta. Kolika će biti aktivnost izvora nakon sto dana, ako je početna aktivnost $14 \cdot 10^{12}$ raspada u minuti?
A. $5.1 \cdot 10^6\,\mathrm{Bq}$ **B.** $3.9 \cdot 10^6\,\mathrm{Bq}$ **C.** $11.2 \cdot 10^5\,\mathrm{Bq}$ **D.** $8.3 \cdot 10^5\,\mathrm{Bq}$ **E.** $2.3 \cdot 10^5\,\mathrm{Bq}$

F-8. Željeznu kocku vučemo po vodoravnoj podlozi na putu od $100\,\mathrm{m}$ i pola razvijene topline prenosi se na kocku, a pola na podlogu. Za koliko će porasti temperatura kocke ako je koeficijent trenja 0.2, a specifični toplinski kapacitet željeza je $460\,\mathrm{J/(kg\,K)}$?
A. $0.21\,\mathrm{K}$ **B.** $0.43\,\mathrm{K}$ **C.** $1.9\,\mathrm{K}$ **D.** $5.3\,\mathrm{K}$ **E.** $0.87\,\mathrm{K}$

F-9. Mjehurić zraka u jezeru ima na dubini $55\,\mathrm{m}$ volumen $0.5\,\mathrm{cm}^3$. Ako je temperatura na toj dubini 14 °C, a pri vrhu 24 °C, koliki će biti volumen mjehurića neposredno prije izranjanja? Atmosferski tlak je $1013\,\mathrm{hPa}$, a gustoća vode $1000\,\mathrm{kg/m^3}$.
A. $3.3\,\mathrm{cm}^3$ **B.** $20\,\mathrm{cm}^3$ **C.** $13\,\mathrm{cm}^3$ **D.** $7.7\,\mathrm{cm}^3$ **E.** $5.6\,\mathrm{cm}^3$

F-10. Motorist vozi po kružnom zidu polumjera zakrivljenosti $3\,\mathrm{m}$. Koliku minimalnu brzinu mora razviti da ne padne, ako je koeficijent trenja između zida i kotača 0.2?
A. $3\,\mathrm{m/s}$ **B.** $10\,\mathrm{m/s}$ **C.** $5.48\,\mathrm{m/s}$ **D.** $12.25\,\mathrm{m/s}$ **E.** $2.45\,\mathrm{m/s}$

F-11. Zavojnica bez jezgre priključena je na izvor istosmjernog napona. Omski (radni) otpor zavojnice je takav da kroz nju teče struja jakosti $1\,\mathrm{A}$. Kolika će struja teći kroz zavojnicu ako u nju stavimo feromagnetsku jezgru relativne permeabilnosti 10?
A. $3.16\,\mathrm{A}$ **B.** $10\,\mathrm{A}$ **C.** $0.01\,\mathrm{A}$ **D.** $0.1\,\mathrm{A}$ **E.** $1\,\mathrm{A}$

F-12. Intenzitet svjetlosnog zračenja s udaljene zvijezde iznosi $2.7 \cdot 10^{-16}\,\mathrm{W/m^2}$. Pretpostavljajući da je valna duljina zvjezdanog svjetla $550\,\mathrm{nm}$, izračunajte koliko fotona u 15 minuta padne u zjenicu oka, koja je promjera $6\,\mathrm{mm}$. Planckova konstanta je $6.625 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{Js}$.
A. 150 **B.** 18 **C.** 250 **D.** 1.5 **E.** 52

F-13. Razmak između prvog i četvrtog čvora stojnog vala je $30\,\mathrm{cm}$. Kolika je valna duljina?
A. $7.5\,\mathrm{cm}$ **B.** $10\,\mathrm{cm}$ **C.** $15\,\mathrm{cm}$ **D.** $20\,\mathrm{cm}$ **E.** $25\,\mathrm{cm}$

M-1	B	M-2	A	M-3	D	M-4	D	M-5	D
M-6	B	M-7	C	M-8	D	M-9	B	M-10	E
M-11	A	M-12	C	M-13	B	M-14	A	M-15	C
M-16	A	M-17	D	M-18	A	M-19	B	M-20	E
I-1	A	I-2	C	I-3	B	I-4	C	I-5	A
F-1	A	F-2	B	F-3	C	F-4	C	F-5	C
F-6	A	F-7	B	F-8	A	F-9	A	F-10	D
F-11	E	F-12	B	F-13	D				



Danas će izvođač sjediti na poziciji **W** (zbog uštede prostora u ovim stupcima). On će nastojati ostvariti kontrakt 3NT, devet štihova u igri bez aduta. Ataka dolazi od igrača na poziciji **N**. Karte na stolu, svima vidljive, su na poziciji **E**.

ataka: ♠ 4

W		E
♠ 9 2	N	♠ A 8 5
♡ A K 5 3	W E	♡ 6 4
♢ A 6 4 2		♢ K 8 5
♣ Q 10 6	S	♣ A J 9 5 3

Napravite plan igre.

Izvođač ima 6 visokih štihova. Da bi ostvario kontrakt, mora osvojiti još barem tri dodatna štiha, a njih može dobiti u tref boji. Opasnost leži u tome što tref kralj može biti kod **S**-a, pa će obrana, kad uzme štih tref kraljem, osvojiti sve preostale štihove u piku.

Ipak, ovaj je kontrakt 100% siguran, uz logičnu pretpostavku da je igrač na ataci imao u početku barem četiri karte u piku. (Ta je pretpostavka temeljena na uobičajenoj taktici da igrač obrane atakira iz svoje najdulje boje.) Jedino što izvođač mora napraviti jest da *propusti prva dva štiha u piku* i uzme asa u trećem štihu!

Nakon toga preći će u ruku s karonom ili hercom, odigrati damu tref i propustiti. Recimo da taj štih uzme **S**. Sad su dvije situacije moguće: **N** je u početku imao pet pikova. Onda u ovom trenutku S više nema nijednog i obrana je nemoćna. Ako je **N** imao četiri pika, jedan je preostao kod **S**-a, ali to ne može ugroziti kontrakt. Obrana će uzeti tri pik štiha i tref asa.

Napravite plan igre u ovom primjeru:

ataka: ♠ 4

W		E
♠ A 2	N	♠ K 8 5
♡ J 10 4 2	W E	♡ K Q 3
♢ A K 4 2		♢ 8 5
♣ Q 10 6	S	♣ A J 9 5 3

Izvođač ima četiri visoka štiha u piku i karonu. On može ostvariti još četiri ili pet štihova u trefu. Ali, odigra li tref impas prerano i taj ne uspije, njegov je kontrakt propao. Zavirimo u sva četiri lista:

W		E
	♠ Q 9 7 4 3	
	♡ A 9 7	
	♢ Q 7 3	
	♣ 8 4	
♠ A 2	N	♠ K 8 5
♡ J 10 4 2	W E	♡ K Q 3
♢ A K 4 2		♢ 8 5
♣ Q 10 6	S	♣ A J 9 5 3
	♠ J 10 6	
	♡ 8 6 5	
	♢ J 10 9 6	
	♣ K 7 2	

Jedan pik štih (prvi ili drugi) opet se mora propustiti! (Uvjerite se sami zašto.) Ako izvođač, kad uzme štih pik asom, odigra damu tref, **S** će uzeti tref i nastaviti pik. Izvođač je sad nemoćan. On može uzeti osam štihova, prije nego preda protivnicima preostale štihove.

I ovaj je kontrakt siguran, uz pretpostavku da izvođač *prije impasa tref* odigra herc. Na taj će način eliminirati herc asa kod **N**-a, kao ulaz do preostalih pikova. Ako **N** ne uzme odmah herc štih (što je bolja obrana), izvođač nakon toga može bez straha odigrati tref impas.

Ispravna igra je: propustiti prvi pik i odigrati prema herc kralju u trećem štihu. Ako **N** propusti, slijedi ponovo "ponuda": herc dama. Propusti li **N** ponovo, izvođač igra karo do asa i zatim damu tref.

Ova se tehnika igre naziva *prekid komunikacija*.

Za "domaću zadaću" napravite plan igre u sljedećem primjeru:

kontrakt 3NT
ataka: ♣ 3

W		E
♠ A K 5	N	♠ Q 8 6
♡ A J 5 2	W E	♡ Q 6
♢ J 4 3		♢ Q 10 9 5 2
♣ K 8 5	S	♣ A 6 4

Neven Elezović, Zagreb

Rješenje nagradnog natječaja br. 174

Prvo rješenje. Redom dobivamo:

$$\begin{aligned}1342\sqrt{167}+2005 &= 1336\sqrt{167}+2004+6\sqrt{167}+1\\ &= 8\cdot 167\sqrt{167}+12\cdot 167+6\cdot\sqrt{167}+1\\ &= (2\sqrt{167})^3+3\cdot(2\sqrt{167})^2+3\cdot(2\sqrt{167})+1\\ &= (2\sqrt{167}+1)^3.\end{aligned}$$

Dakle traženi broj je $2\sqrt{167}+1$.

Drugo rješenje. Tražimo broj u obliku $a\sqrt{167}+b$. Tada mora biti

$$(a\sqrt{167}+b)^3 = 1342\sqrt{167}+2005,$$

ili ekvivalentno

$$167a^3\sqrt{167}+3\cdot 167a^b2+3ab^2\sqrt{167}+b^3 = 1342\sqrt{167}+2005.$$

Brojevi a i b moraju zadovoljavati sistem jednadžbi:

$$\begin{aligned}167a^3+3ab^2 &= 1342,\\ 501a^2b+b^3 &= 2005.\end{aligned}$$

Druga jednadžba se može zapisati u obliku $(501a^2+b^2)b = 2005$. Kako su a i b različiti od 0 a broj $501a^2+b^2$ mora biti djelitelj broja 2005 i veći od 501, jedina mogućnost je $501a^2+b^2 = 2005$, odakle slijedi $b = 1$, $a = 2$. Lako se provjeri da $a = 2$, $b = 1$ zadovoljava prvu jednadžbu. Dakle, $(2\sqrt{167}+1)^3 = 1342\sqrt{167}+2005$.

Knjigom su nagrađeni sljedeći učenici:

1. *Igor Boban* (2), III. gimnazija, Split; 2. *Vlatka Kos Grabar* (2), Srednja škola Zlatar, Zlatar; 3. *Marin Mišur* (3), Gimnazija Metković, Metković; 4. *Sara Muhvić* (2), III. gimnazija, Osijek; 5. *Ivan Papić* (2), III. gimnazija, Osijek; 6. *Blaženka Petričević* (1), Gospodarska škola Čakovec, Čakovec; 7. *Tomislav Pozaić* (2), Srednja škola Zlatar, Zlatar; 8. *Goran Šeketa* (2), Gimnazija Karlovac, Karlovac.

Riješili zadatke iz br. 3/223

(Broj u zagradi označava razred–godište srednje–osnovne škole.)

a) Iz matematike: *Marko Čolić* (2), III. gimnazija, Osijek, 2979, 2983, 2984, 2988; *Marina Furkes* (2), Gimnazija Frana Galovića, Koprivnica, 2979, 2983; *Vlatka Kos Grabar* (2), Srednja škola Zlatar, Zlatar, 2983; *Dijana Marinčić* (2), Gimnazija Varaždin, Varaždin, 2988, 2991; *Sara Muhvic* (2), III. gimnazija, Osijek, 2979–2984, 2988; *Ivan Papić* (2), III. gimnazija, Osijek; 2979, 2980, 2982–2984, 2988; *Tomislav Pozaić* (2), Srednja škola Zlatar, Zlatar; 2983, 2986, 2988; *Goran Šeketa* (2), Gimnazija Karlovac, Karlovac; 2979, 2983, 2988; *Barbara Štimac* (2), Gimnazija Antuna Vrančića, Šibenik; 2979; *Vanja Ubović* (8, OŠ), OŠ Ivana Gorana Kovačića, Gornje Bazje; 2983.

b) Iz fizike: *Marija Čelar* (8), OŠ Fausta Vrančića, Šibenik, 242–245; *Silvija Konjić* (8), OŠ Augusta Šenoe, Krapina, 242–245; *Goran Tomac* (8), OŠ Ivana Gorana Kovačića, Delnice, 242–245; *Vanja Ubović* (8), OŠ Ivana Gorana Kovačića, Gornje Bazje, 242–245; *Petar-Šime Čepo* (4), Klasična gimnazija, Zagreb, 1329–1335; *Marko Čolić* (2), III. gimnazija, Osijek, 1329–1332; *Josip Gulin* (2), Gimnazija Antuna Vrančića, Šibenik, 1329–1335; *Barbara Štimac* (2), Gimnazija Antuna Vrančića, Šibenik, 1329–1331.

Nagradni natječaj br. 176

Novčići

Marko je obećao Ivici da će mu sljedećih nekoliko dana davati po jedan novčić dnevno ako točno izračuna koliko novčića mu je namjeravao dati. I kaže Marko Ivici:

– Nakon prvih nekoliko dana dat ću ti još četiri puta toliko novčića koliko si dobio do tada. Nakon sljedeća dva dana dat ću ti još dva puta toliko koliko si dobio do tada. Koliko ćeš ukupno dobiti novčića?

– Ivica je uzeo papir i olovku i za kratko vrijeme točno je izračunao. Koliko će novčića dobiti?

SVIM SURADNICIMA

U Matematičko-fizičkom listu objavljuju se članci iz matematike, fizike i informatike, s malim prilogom iz astronomije, zadaci i rješenja, prikazi natjecanja i ljetnih škola iz matematike i fizike, zanimljivosti u obliku članaka i zadataka od učenika, profesora i ostalih matematičara, novosti iz znanosti, zadaci s razredbenih (kvalifikacijskih) ispita, zabavna matematika i nagradni natječaj.

Prilozi trebaju biti napisani računalom (Word, Tex, Latex) ili pisaćim strojem sa širokim proredom na formatu A-4. Uz kopiju pošaljite i disketu.

Slike trebaju biti jasno nacrtane na posebnom papiru i pogodne za presnimavanje. Slike crtane računalom (eps, tif, gif, jpg i sl.) pošaljite i na disketi.

Članci neka ne budu dulji od osam stranica, a ako je to potrebno neka budu napisani u nastavcima.

Pozivaju se učenici da pošalju članak o nekoj od spomenutih tema, originalne zadatke s rješenjima ili prikaze nekih manifestacija (ljetne škole, susreti učenika, rad školske grupe).

Kako se rukopisi ne vraćaju, sačuvajte original a pošaljite kopiju na papiru formata A-4.

Svi rukopisi podliježu recenziji redakcije ili neke stručne osobe za određeno područje.

Prilozi se šalju na adresu ovog časopisa koja je na drugoj stranici omota.

RJEŠAVATELJIMA ZADATAKA

Svako rješenje neka bude napisano na **posebnom** papiru (formata A-4 ili A-5) i to samo na **jednoj** strani papira. Uz svako rješenje na vrhu papira treba potpuno ispisati tekst zadatka. Svako rješenje treba čitljivo potpisati (ime i prezime), naznačiti razred, školu i mjesto.

MATEMATIČKO–FIZIČKI LIST (MFL) za učenike i nastavnike.
Izlazi u četiri broja tokom školske godine. Izdaju:
HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO i HRVATSKO FIZIKALNO DRUŠTVO
Pretplata za 2006./ 2007. je 60 kuna, pojedini broj stoji 15 kuna.
Za inozemstvo pretplata je 16 EUR, a pojedini broj 4 EUR.
(Uplata se može obaviti u kunama ili devizama po tečaju u trenutku plaćanja.)
Adresa lista je: "Matematičko–fizički list, Ilica 16/ III, 10001 Zagreb,
tel./ fax (01) 4833-891.
Uplate na žiro račun: *Hrvatsko fizikalno društvo,* Zagreb, br. 2360000-1101301202 (kune),
ZBZ d.d. SWIFT ZABA HRXX 70313-978-3239853 (EUR).
Na uplatnici kao svrhu uplate molimo naznačite "za MFL"!
**Molimo Vas da kod svake uplate pošaljete (foto)kopiju uplatnice
ili da nas obavijestite telefonom ili elektronskom poštom o uplati.**
URL: http:/ / www.math.hr/ mfl

SADRŽAJ

List financijski pomaže Ministarstvo znanosti, obrazovanja i športa Republike Hrvatske.

Slog i prijelom: Element, Zagreb, Menčetićeva 2
Tisak: Sveučilišna tiskara d.o.o., Zagreb, Trg maršala Tita 14
Naklada ovog broja 4000 primjeraka

Otkriće mreškanja svemirskog pozadinskog mikrovalnog zračenja putem satelita COBE dobilo je zapanjujuće objašnjenje: vidljivi astronomski svemir preslika je kvantnog mreškanja sa samog početka nastanka svemira.

Dragi čitatelji!

Velik je broj naših svjetski poznatih znanstvenika, među kojima je mnogo matematičara koji potječu iz naših krajeva, koji su svoj plodonosni znanstveni rad ostvarili u inozemstvu. Jedan od njih je Vilim Feller, rodom iz Zagreba, koji vrlo rano, nakon studija odlazi u Götingen, da bi za godinu dana obranio doktorsku disertaciju. Kasnije odlazi u Sjedinjene Američke Države gdje se bavi teorijom vjerojatnosti. Napisao je opsežnu knjigu u dva dijela o tom području, koja je bila prevedena na neke strane jezike. Stalno je održavao vezu sa svojom domovinom, zalažući se da se našim mladim matematičarima omogući odlazak u Ameriku na doktorski studij. Uz 100-godišnjicu rođenja Vilima Fellera željeli smo ga se prisjetiti i sačuvati od zaborava.

Jedan od zanimljivih članaka je prilog "Složeni kamatni račun" studentice Sanele Jukić i profesora Boška Šege s Ekonomskog fakulteta u Zagrebu. Profesor Zvonko Čerin s Matematičkog odjela Prirodoslovno-matematičkog fakulteta završava priču o greškama na koje je naišao u nekim knjigama namijenjenim učenicima srednjih škola. Tu je i zanimljiva priča, zadatak "Pauk u sobi".

Nobelova nagrada iz fizike ove godine je dodijeljena dvojici fizičara s Kalifornijskog sveučilišta u Berkeleyu SAD koji su svojim otkrićima otvorili eru moderne kozmologije, o čemu nas upoznaje profesor Ivica Picek s Fizičkog odsjeka Prirodoslovno-matematičkog fakulteta. Poučan je prilog "Period titranja elektrostatskog njihala" studenta elektrotehnike Stjepana Vučkovića u rubrici *Iz moje radionice i laboratorija*. Docent Matko Milin s Fizičkog odsjeka Prirodoslovno-matematičkog fakulteta u prilogu "Navigacijska astronomija" upoznaje nas o tehnici određivanja položaja na Zemlji upotrebom nebeskih objekata. U redovnoj rubrici *Novosti u znanosti* dr. Ante Bilušić, docent na Fakultetu prirodoslovno-matematičkih znanosti i kineziologije Sveučilišta u Splitu piše u svom prilogu o pojmu "nanotehnologije".

Uz zadatke za razonodu u rubrici *Zabavna matematika*, zadatke i rješenja iz matematike i fizike, o prošlogodišnjoj Međunarodnoj matematičkoj olimpijadi, Državnoj smotri i natjecanju mladih fizičara, zadatke s kvalifikacijskih ispita na Fakultetu elektrotehnike i računarstva, kao i mali tečaj bridža, naći ćete i zadatak za nagradi natječaj. Nadamo se da će svatko naći nešto interesantno.

Uredništvo lista

VILIM FELLER (Zagreb 1906. – New York 1970.)

u povodu stote obljetnice rođenja istaknutog hrvatsko-američkog matematičara

Željko Hanjš i Darko Žubrinić, Zagreb

U svakom znanstvenom području treba pažljivo razlučiti tri aspekta teorije: (a) formalno-logički sadržaj, (b) intuitivnu pozadinu, (c) primjene.

William Feller



Sika 1. Kada je imao oko 40 godina.

Vilim Feller jedan je od nekolicine najistaknutijih matematičara u povijesti teorije vjerojatnosti. Rođen je 7. srpnja 1906. u Zagrebu. Njegov otac, Eugen Viktor Feller, bio je ljekarnik i uspješan poduzetnik koji je imao ljekarnu i tvornicu higijenskih i kozmetičkih preparata u Donjoj Stubici. Uspjeh tvornice zasnivao se na ljekarničkom proizvodu poznatom pod nazivom Elsa-fluid. On se prodavao u čitavoj Europi, u Aziji (u Japanu i Kini), SAD-u, pa čak i u Africi. Kasnije se obitelj seli u Zagreb, gdje živi u prekrasnoj secesijskoj vili u Jurjevskoj ulici 31a, poznatoj pod nazivom Feller Haus, okruženoj veoma kultiviranim parkom s rijetkim cvijećem i raslinjem, koju je dao izgraditi Vilimov otac. Zanimljivo je da je kuća imala i ovalnu sobu za glazbu i koncerte. Danas je ta kuća u žalosnom stanju. Vilimov otac dao je izgraditi i sadašnju zgradu Europskog doma na uglu Jelačićeva trga i Jurišićeve ulice, koja se zvala Elsa-fluid dom, a bila je u svoje vrijeme najviša zgrada u Zagrebu. Vilim je rođen u velikoj, sretnoj i marljivoj obitelji s dvanaestero djece, kao najmlađe muško dijete. Imao je još sedmero braće i četiri sestre.

Dr. Stanko Vlögl, profesor matematike i građevne mehanike na Sveučilištu u Zagrebu, bio mu je privatni učitelj matematike kad je bio u dobi srednjoškolca (ovaj podatak dugujemo dr. Mirni Vlögl-Mršić, profesorici biokemije na Sveučilištu u Zagrebu). Godine 1923. upisao je studij matematike u Zagrebu na Mudroslovnom (sada Filozofskom) fakultetu. Godine 1925., kao devetnaestogišnjak, tj. za samo dvije godine studija, prema podatcima u članku poznatog američkog matematičara J. L. Dooba, stekao je titulu koja odgovara današnjem magistru matematike! Već kao student izlagao je svoje orginalne znanstvene radove na tadašnjem Seminaru za geometriju koji je vodio Marije Kiseljak, njegov profesor matematike.

Na studiju u Zagrebu predavali su mu naši najbolji matematičari i fizičari iz tog doba: dr. Vladimir Varićak (međunarodno poznati stručnjak za teoriju relativnosti), dr. Stjepan

Bohniček (stručnjak za teoriju brojeva), dr. Marije Kiseljak (koji ga je još kao studenta zainteresirao za temu na kojoj će malo kasnije i doktorirati u Göttingenu), dr. Stanko Hondl (eksperimentalni fizičar i popularizator teorije relativnosti), dr. Milan Šenoa, i drugi.

Odmah nakon magistriranja u Zagrebu, godine 1925. odlazi u Njemačku u Göttingen, gdje je u to vrijeme bilo najjače matematičko središte u svijetu. Tamo je Feller doktorirao već iduće, 1926. godine, u dobi od samo dvadeset godina! Točnije, dne 3. studenoga 1926. obranio je *summa cum laude* (lat. "s najvišom počašću") svoju doktorsku disertaciju *Über algebraisch rektifizierbare transzendente Kurven* (O algebarski rektifikabilnim transcendentnim krivuljama), pod vodstvom profesora Richarda Couranta. Imenom tog veoma poznatog matematičara zove se danas Matematički institut na Sveučilištu u New Yorku, tj. Courant Institute of Mathematical Sciences. Nema sumnje da je dio Fellerove disertacije nastao još tijekom studija u Zagrebu.

Iste godine kada je doktorirao postaje asistentom Richarda Couranta, učenika znamenitog Davida Hilberta, jednog od najvećih matematičara u povijesti. Feller je također poznavao i Davida Hilberta, i on mu je bio najveći uzor. Sljedeće dvije godine proveo je na Sveučilištu u Kielu, gdje je habilitirao 1928. i postao docentom. Ostaje u tom gradu do 1933. g., kada napušta Njemačku zbog dolaska nacista na vlast, odbivši položiti službenu zakletvu lojalnosti prema novome režimu. Feller odlazi u Kopenhagen, glavni grad Danske, gdje ostaje do 1934. radeći na matematičkom institutu, a nakon toga predaje u Švedskoj na Sveučilištima u Stockholmu i Lundu.

Feller je svoje ime pisao na razne načine: Vilim, William, Willy, Willi, Will, a u njegovoj obitelji u Zagrebu su ga zvali kratko Vili.

Vlastoručni potpis slušača:

Vilim Feller.

Slika 2. Fellerov potpis.

Dr. V. Varićak

"

Dr. Stj. Bohniček

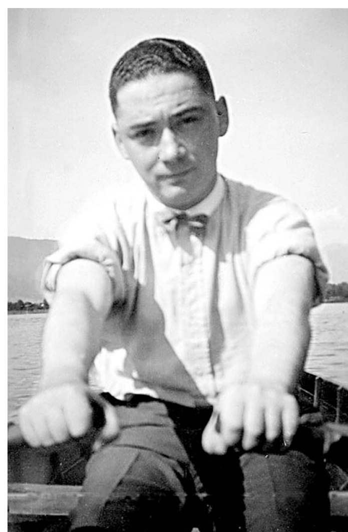
Dr. M. Kiseljak

Dr. S. Hondl

Slika 3. Popis profesora napisan njegovom rukom; s ljubaznim dopuštenjem prof. Marte Zdenković, Zagreb.

Godine 1938. Feller se oženio s Clarom Nielsen, koja je bila njegova studentica u vrijeme dok je radio u Kielu. Već iduće godine emigrirali su u Sjedinjene Američke Države. Tamo postaje docentom matematike na Sveučilištu Brown (Providence, Rhode Island). Feller je primio američko državljanstvo 1944., i sljedećih godina bio je profesor na Sveučilištu Cornell, gdje se sprijateljio s poznatim matematičarom Markom Kacom, koji je emigrirao u SAD pod sličnim okolnostima. Godine 1950. postaje redovitim profesorom matematike na znamenitom Sveučilištu u Princetonu, gdje ostaje do kraja života. Umro je 14. siječnja 1970. u Memorial Hospital u New Yorku.

Fellerov znanstveni opus sastoji se od 104 znanstvena rada i dvije znamenite knjige. Vrlo je važan njegov doprinos matematičkoj analizi, teoriji mjere, geometriji, funkcionalnoj analizi i diferencijalnim jednadžbama, ali je svoje najveće rezultate postigao u teoriji vjerojatnosti. Proučavao je i primjene teorije vjerojatnosti u prirodnim znanostima, osobito u genetici. Feller je u razdoblju od 1935. do 1960. dao veliki doprinos matematičkoj teoriji Brownovog gibanja i teoriji difuzijskih procesa.



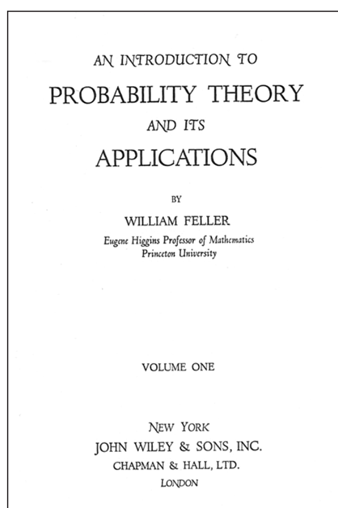
Slika 4. Feller 1925.; s ljubaznim dopuštenjem prof. Marte Zdenković, Zagreb.

Malo je poznato da je 1934. i 1938., kao mladi znanstvenik, objavio i dva znanstvena rada, na hrvatskom jeziku, u časopisu Rad JAZU (danas Rad HAZU) u Zagrebu (*Prilog teoriji mjera u apstraktnim prostorima* i *O Kolmogoroff – P. Lévyjevu predočivanju beskonačno djeljivih funkcija reparticije*).

Moderna matematička teorija vjerojatnosti može velikim dijelom zahvaliti svoju današnju važnost Vilimu Felleru, jednom od njezinih utemeljitelja.

Poznati francuski matematičar J. Dieudonné u jednoj svojoj knjizi objavljenoj 1982. daje popis matematičara od kojih potječu glavne ideje u teoriji vjerojatnosti. To su: J. Bernoulli, A. de Moivre, P. Laplace, D. Poisson, P. Čebišev, A. Markov, E. Borel, N. Winer, P. Lévy, A. Kolmogorov, A. Hinčin, **W. Feller**, J. Doob i G. Hunt.

Mnogi pojmovi u teoriji vjerojatnosti danas nose Fellerovo ime, kao npr.: Fellerovi procesi, Fellerove prelazne funkcije, Fellerov eksplozijski test, Fellerove polugrupe, Fellerovo Brownovo gibanje, Lindeberg-Fellerov teorem, Fellerovo svojstvo, jednadžba Feller-Kolmogorova.



AN INTRODUCTION TO

PROBABILITY THEORY

AND ITS

APPLICATIONS

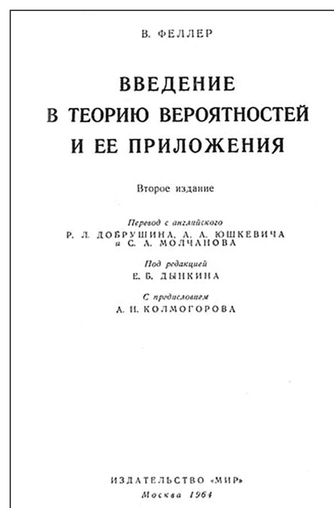
BY

WILLIAM FELLER

Eugene Higgins Professor of Mathematics
Princeton University

VOLUME ONE

NEW YORK
JOHN WILEY & SONS, INC.
CHAPMAN & HALL, LTD.
LONDON



В. ФЕЛЛЕР

ВВЕДЕНИЕ
В ТЕОРИЮ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Второе издание

Перевод с английского
Р. Л. ДОБРУШИНА, А. А. ЮШКЕВИЧА
и С. А. МОЛЧАНОВА

Под редакцией
Е. Б. ДЫНКИНА

С предисловием
А. Н. КОЛМОГОРОВА

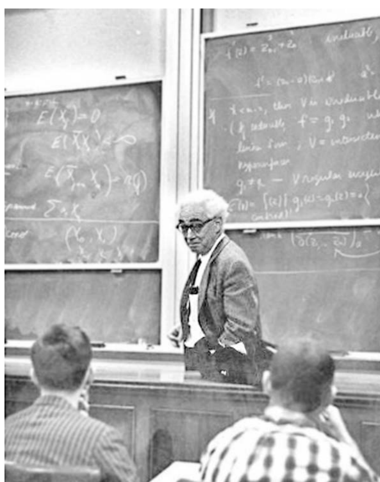
ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»
Москва 1964

Slika 5. Englesko i rusko izdanje.

Njegov najpoznatiji rad je knjiga *Introduction to Probability Theory and its Applications* (Uvod u teoriju vjerojatnosti i njene primjene), objavljena u dva dijela (I. dio 1950., II. dio 1966.), a koja je u više novih izdanja bila dorađivana i dopunjavana s novim spoznajama, primjerima i primjenama. Prvi dio ima više od petsto stranica, a drugi dio više od šesto. Te su knjige znatno utjecale na širenje suvremenih ideja teorije vjerojatnosti, pa se ubrajaju među najuspješnije matematičke knjige objavljene tijekom dvadesetog stoljeća. Zanimljivo je da su obje prevedne na ruski jezik već godinu dana nakon objavljivanja u SAD-u, a postoje i prijevodi na kineski, poljski, španjolski i mađarski jezik, možda i na još koji. Prijevod na hrvatski još ne postoji, ali vjerujemo da će se i on u budućnosti pojaviti. Predgovor drugom ruskom izdanju prvog dijela knjige, objavljenog 1964. u Moskvi, pisao je A. N. Kolmogorov, jedan od najistaknutijih matematičara dvadesetog stoljeća.

Vrlo je malo poznato da je upravo Vilim Feller godine 1934. pisao prikaz o znamenitoj knjizi A. N. Kolmogorova "Osnovni pojmovi teorije vjerojatnosti", objavljene prethodne, 1933. godine. Prikaz je pisan za poznati njemački referativni časopis Zentralblatt für Mathematik. U spomenutoj su knjizi među inim dani aksiomatski temelji teorije vjerojatnosti.

William Feller bio je izvrstan predavač, kojega su studenti veoma cijenili, osobito radi toga jer je na duhovit i jednostavan način znao objasniti zakučaste matematičke rezultate. Pod njegovim vodstvom doktoriralo je sedamnaest matematičara.



Sika 6. S predavanja; s dopuštenjem prof. J.R. Goldmana, SAD.

Feller je zadužio matematički svijet i sudjelovanjem u pokretanju danas vodećeg matematičkog referativnog časopisa *Mathematical Reviews*, u kojem se objavljuju sažetci matematičkih knjiga i znanstvenih radova odmah po njihovu objavljivanju. Prvi broj objavljen je siječnja 1940., a William Feller bio je prvi urednik tog časopisa, koji izlazi i danas, a nezaobilazan je priručnik u radu svakog matematičara u svijetu.

Na Svjetskom matematičkog kongresu održanom godine 1958. u Manchesteru u Engleskoj održao je jedno od jednosatnih plenarnih predavanja koje je bilo veoma zapaženo. Svjetski matematički kongres održava se svake četiri godine.

Godine 1966., uoči održavanja Svjetskog matematičkog kongresa u Moskvi, pripala mu je čast biti članom odbora za odabir dobitnika *Fieldsove medalje*. Ostali članovi odbora bili su Georges de Rham (predsjednik odbora), Harold Davenport, Max Deuring, Michael Lavrentiev, Jean-Pierre Serre, Donald C. Spencer i René Thom, svi redom veoma poznati matematičari. Te godine Fieldsovom su medaljom okićeni Michael Francis Atiyah, Alexander Grothendieck i Stephen Smale.

Od mnogobrojnih priznanja koja je Feller primio za svoga života, spomenimo članstvo u Nacionalnoj akademiji znanosti u Washingtonu, Američkoj akademiji umjetnosti i znanosti u Bostonu, Danskoj akademiji znanosti, Kraljevskom statističkom društvu u Londonu, da bi pred kraj života postao počasni član Londonskog matematičkog društva. Još od 1937. je dopisni član JAZU (danas HAZU, Hrvatska akademija znanosti i umjetnosti).

Godine 1969. donijeta je odluka predsjednika SAD-a o dodjeljivanju najvišeg američkog priznanja, Nacionalne medalje za znanost, Williamu Felleru. U obrazloženju se veli da je Vilim Feller odlikovan za originalne i definitivne doprinose čistoj i primijenjenoj matematici, zatim što je račun vjerojatnosti učinio pristupačnijim onima koji su ga koristili i radi toga jer je obavio početni posao osnivanja časopisa "Mathematical Reviews" namijenjenog znanstvenicima. Na žalost, umro je samo mjesec dana prije uručenja medalje, koju je 16. veljače 1970. na državnoj svečanosti održanoj u Bijeloj kući u Washingtonu primila Fellerova udovica Clara. Medalju joj je osobno uručio tadašnji američki predsjednik Richard Nixon.

U povodu njegove smrti ugledni znanstveni časopis Annals of Mathematical Statistics cijeli je jedan broj posvetio uspomeni na Williama Fellera, a opsežan uvod o njemu kao čovjeku i znanstveniku, s popisom svih radova, priredila je redakcija časopisa. U tom prikazu nalazi se i podatak da je Feller na Zagrebačkom sveučilištu, tijekom samo dvije godine, dovršio studij matematike s titulom ekvivalentnom magistru znanosti.

Vilim Feller bio je u stalnoj vezi sa svojom rodbinom u Zagrebu, kao i sa svojim kolegama na Sveučilištu u Zagrebu. Prema Vladimiru Vraniću, profesoru matematike na Sveučilistu u Zagrebu, Vilim Feller ne samo da nije tajio svoje hrvatsko podrijetlo, nego ga je i isticao. Dopisivao se s prijateljima iz Zagreba s kojima je zajedno studirao od 1923. do 1925. Založio se za akademika Sibu Mardešića, tada mladog hrvatskog matematičara, da provede dvije školske godine, od 1957. do 1959., na Institute of Advanced Study u Princetonu u SAD-u.

Zanimljivo je da je u Princetonu Feller živio u ulici koja je nosila ime “RANDOM ROAD” (tj. Slučajni put!). Ime Vilima Fellera uklesano je u prekrasnu obiteljsku grobnicu u Arkadama na zagrebačkom Mirogoju, sjeverno od glavnog ulaza, gdje su pokopani njegovi roditelji i mnogobrojna rodbina.

Poznati američki matematičar Joseph Doob, stručnjak za teoriju vjerojatnosti, zapisao je o W. Felleru:

. . . Oni koji su Fellera osobno poznavali sjećaju ga se po njegovom entuzijazmu, radosti s kojom je pristupao životu, živosti s kojom je pripovijedao mnogobrojne dogodovštine o životu i njegovim besmislicama, posebice o onima oko matematike i matematičara. Slušanje njegovih predavanja bilo je poseban doživljaj, jer nitko nije umio predavati s takvim oduševljenjem. . . . Njegovim odlaskom svijet matematike je izgubio jednu od svojih najjačih osobnosti, kao i jednog od svojih najjačih istraživača.

Istaknuti američki matematičar Mark Kac napisao je u povodu smrti svojeg kolege i prijatelja Williama Fellera:

William Feller, jedan od najizvornijih, najizobraženijih i najslikovitijih matematičara našeg vremena, umro je nakon duge bolesti 14. siječnja 1970. Čitava matematička zajednica žali za njegovom smrću, ali na ovom simpoziju njegov gubitak osjećat će se još dublje, jer je na sve nas utjecao svojim radom i svojom osobnošću. . . . Fellera je izvan matematike i znanosti osobito zanimala antička povijest – i u tom očaravajućem području njegovo znanje i potkovanost bili su na granici stručnjaka. . .

Na koji način djelo Vilima Fellera živi danas? Evo samo nekoliko primjera. Doron Zeilberger, dobitnik ugledne matematičke nagrade Steel Prize za godinu 1998., piše u svojoj kratkoj biografskoj crtici nešto što samo matematičar može napisati (prenosimo iz izvornika):

Doron Zeilberger was born on July 2, 1950, in Haifa, Israel, to Ruth (Alexander) and Yehudah Zeilberger. He received his Ph.D. in 1976, from the Weizmann Institute of Science (as a student of Harry Dym (a student of Henry McKean (a student of **William Feller** *(a student of Richard Courant (a student of David Hilbert))))).*

Mladi Indijac Vamsikrishna Kalapala obranio je godine 2005. svoj magistarski rad u području računalnih znanosti na Sveučilištu New Mexico u SAD-u. Na drugoj stranici, cijelom visinom, nalazi se velikim slovima zapisano ovo (prenosimo iz izvornika): **Dedication** *To Dr. William Feller, for writing such a wonderful book on Probability Theory (referring to volume 1 of his Introduction to Probability Theory).*

Zahvala. Zahvaljujemo prof. Marti Zdenković iz Zagreba na pomoći u pripremi članka, te na dopuštenju da se objave neke od fotografija iz obiteljske zbirke. Njezin djed Ferdinand bio je najstariji brat Vilima Fellera. Također zahvaljujemo na pomoći i prof. J. R. Goldmanu iz SAD-a, koji je doktorirao kod Vilima Fellera, te prof. Paulu C. Kettleru iz Norveške, koji je bio student Vilima Fellera na Sveučilištu u Princetonu.

Literatura

Za podrobniji prikaz s više pojedinosti o životu Vilima Fellera vidi:

[1] J. L. Doob, *William Feller and twentieth century probability*. Proceedings of the Sixth Berkeley Symposium on Mathematical Statisics and Probability (Univ. California, Berkeley, Calif., 1970/ 1971), Vol. II: Probability theory, pp. xv–xx. Univ. California Press, Berkeley, Calif., 1972.
http://www.ams.org/online_bks/hmath3/hmath3-science.pdf

[2] M. Kac, *William Feller, in memoriam*. Proceedings of the Sixth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability (Univ. California, Berkeley, Calif., 1970/ 1971), Vol. II: Probability theory, pp. xxi-xxiii. Univ. California Press, Berkeley, Calif., 1972.

[3] *William Feller, 1906. – 1970.*, Annals of Math. Statistics, 41: 6 (1970) iv–xiii.

[4] V. Vranić, *Vilim Feller* (1906. – 1970.), Ljetopis HAZU 75 (1971) 347–352.

[5] S. Mardešić, *Vilim Feller*, http://jagor.srce.hr/zuh/velikani/fellerk.htm

[6] D. Žubrinić, *William Feller* (1906. – 1970.), http://www.hr/darko/etf/feller.html

⋆ ⋆ ⋆

Kalendar natjecanja u matematici za učenike srednjih škola 2007. g.

— Školska natjecanja	— 29. siječnja
— Županijska natjecanja	— 9. ožujka
— “Klokan bez granica”	— 15. ožujka
— Mediteransko matematičko natjecanje	— 23. i 24. travnja
— Državno natjecanje	— od 2. do 5. svibnja
— Regionalna natjecanja	— 11. svibnja
— Međunarodna matematička olimpijada	— od 19. do 31. srpnja

Složeni kamatni račun

Eva Pavić[1] *i Boško Šego*[2], *Zagreb*

U prethodnom broju MFL-a obradili smo jednostavni kamatni račun. Vidjeli smo da je temeljna karakteristika tog *kamatnog računa* činjenica da se kamate izračunavaju na *istu*, početnu glavnicu za *svako* razdoblje ukamaćivanja. Kada bi se jednostavni kamatni račun uvijek primjenjivao u gospodarskoj praksi, onda bi se, primjerice i formula za izračunavanje ukupnih jednostavnih kamata,

$$K = \frac{C \cdot p(G) \cdot n}{100}, \tag{1}$$

gdje je C iznos glavnice, $p(G)$ nepromjenjivi godišnji kamatnjak, a n broj godina ukamaćivanja iznosa C, koristila uvijek pri izračunu kamata bez obzira je li riječ o ukamaćivanju tijekom jedne godine (to jest u slučaju kada je $n = 1$) ili u razdoblju koje nije jedna godina. Koristeći se upravo logikom koja je imanentna jednostavnom kamatnom računu, najprije ćemo riješiti *primjer* 1, a zatim ukazati na pogrešku koju smo pri tome učinili.

Primjer 1. Kojim iznosom će raspolagati štediša 31. prosinca 2008. godine na temelju iznosa 20 000 kn koje je uložio u poslovnu banku 31. prosinca 2005. godine ako banka u navedenom trogodišnjem razdoblju koristi godišnji nepromjenjivi kamatnjak 10?

Podsjetimo se: pri obračunu kamata prvi dan štednje ne uzima se u obzir, ali se uzima posljednji dan. U razmatranom primjeru to znači da je iznos $C_0 = 20\,000$ kn štediša u poslovnoj banci imao točno tri godine, pa nije bitno što je u tom razdoblju jedna godina prijestupna. Koristeći formulu (1), nalazimo da bi na temelju početnog iznosa $C_0 = 20\,000$ kn štediša u poslovnoj banci na dan 31. prosinca 2008. godine trebao raspolagati iznosom

$$C_3\,(j) = C_0 + K = C_0\left(1 + \frac{p(G)\cdot n}{100}\right) = 20\,000\left(1 + \frac{10\cdot 3}{100}\right) = 26\,000 \text{ kn}. \tag{2}$$

Razmotrimo sada kojim iznosom bi raspolagao štediša da je na kraju svake kalendarske godine podigao ukupnu ušteđevinu (glavnicu uvećanu za kamate) i odmah (to jest istoga dana) taj iznos uložio u poslovnu banku uz neizmjenjene uvjete. Dakle, 31. prosinca 2006. godine raspolagao bi iznosom

$$C_1 = C_0 + K_1 = C_0\left(1 + \frac{p(G)}{100}\right) = 20\,000\left(1 + \frac{10}{100}\right) = 22\,000 \text{ kn}, \tag{3}$$

koji bi istog dana uložio, pa bi na temelju iznosa C_1 31. prosinca 2007. godine raspolagao iznosom

$$C_2 = C_1 + K_2 = C_1\left(1 + \frac{p(G)}{100}\right) = 22\,000\left(1 + \frac{10}{100}\right) = 24\,200 \text{ kn}. \tag{4}$$

---

[1] Studentica Ekonomskog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu.

[2] Redoviti profesor na istom fakultetu.

Budući da će iznos C_2 uložiti odmah, na temelju tog iznosa će 31. prosinca 2008. godine raspolagati iznosom

$$C_3 = C_2 + K_3 = C_2\left(1 + \frac{p(G)}{100}\right) = 24\,200\left(1 + \frac{10}{100}\right) = 26\,620\ kn. \tag{5}$$

Prema tome, štediša je podižući krajem svake godine štednje ukupni iznos i odmah ga stavljajući na štednju za tri godine dobio više

$$26\,620 \text{ kn} - 26\,000 \text{ kn} = 620 \text{ kn}.$$

Naravno, bilo bi potpuno pogrešno zaključiti da ga je tim iznosom poslovna banka nagradila za trud uložen za podizanje i odmah zatim stavljanje na štednju cjelokupnog iznosa! Jednostavno, ovdje se radi o drugoj vrsti *kamatnog računa* od onog što ga simbolički izražava formula (1), a nazivamo ga jednostavnim kamatnim računom. U svakom vremenskom razdoblju na koje se odnosi kamatnjak p kamate se računaju na glavnicu koja je uvećana za kamate za sva prethodna razdoblja. Drugim riječima, kamate smo za svako razdoblje računali ne samo na glavnicu nego i na prethodno izračunane kamate. Ovakav kamatni račun nazivamo *složenim kamatnim računom*.

Definicija 1. *Složeni kamatni račun* je postupak izračunavanja kamata na glavnicu uvećanu za prethodno obračunate kamate u *svakom* prethodnom vremenskom razdoblju ukamaćivanja.

Uočimo da smo konačnu vrijednost iznosa C_0 u primjeru 1 mogli izračunati kako slijedi:

$$C_3 = C_2\left(1 + \frac{p(G)}{100}\right) = C_1\left(1 + \frac{p(G)}{100}\right)\left(1 + \frac{p(G)}{100}\right) = C_1\left(1 + \frac{p(G)}{100}\right)^2 =$$
$$= C_0\left(1 + \frac{p(G)}{100}\right)\left(1 + \frac{p(G)}{100}\right)^2 = C_0\left(1 + \frac{p(G)}{100}\right)^3.$$

Dakle, na kraju treće godine štednje štediša će na temelju (jedne) uplate u iznosu C_0, uz uvjet da je (godišnji) kamatnjak fiksan, raspolagati iznosom

$$C_3 = C_0\left(1 + \frac{p(G)}{100}\right)^3.$$

Postavlja se pitanje može li se navedeni rezultat poopćiti, to jest je li na kraju n-te godine štednje konačna vrijednost (jedne) uplate C_0 uz uvjet da je (godišnji) kamatnjak fiksan

$$C_n = C_0\left(1 + \frac{p(G)}{100}\right)^n? \tag{6}$$

Koristeći princip matematičke indukcije, dokažimo ispravnost formule (6). Neka je C_0 sadašnja vrijednost glavnice, $p(G)$ godišnji kamatnjak nepromjenjiv u svih n godina ukamaćivanja. Potrebno je izračunati vrijednost glavnice C_n na kraju n-te godine (računajući od trenutka uplate iznosa C_0) pretpostavljajući da se kamate pripisuju glavnici krajem svake godine ukamaćivanja.

Kako se po definiciji složenog kamatnog računa kamate izračunavaju na glavnicu koja je uvećana za prethodno obračunate kamate u svakom prethodnom vremenskom

razdoblju kapitalizacije, to su kamate za i-to razdoblje

$$I_i = \frac{C_{i-1}\, p\,(G)}{100}, \qquad i \in \{1, 2, ..., n\}\,,$$ [3]

pri čemu je C_{i-1} iznos glavnice C_0 na kraju $(i-1)$-og razdoblja ili, što je ekvivalentno, na početku i-tog razdoblja. Konkretno, to znači da su kamate za prvo (jedinično) vremensko razdoblje

$$I_1 = \frac{C_0\, p\,(G)}{100},$$

drugo

$$I_2 = \frac{C_1\, p\,(G)}{100},$$

i tako dalje. No, budući da je

$$C_1 = C_0 + I_1 = C_0 + \frac{C_0\, p\,(G)}{100} = C_0\left(1 + \frac{p\,(G)}{100}\right) = C_0\, r,$$

gdje je $r = 1 + \frac{p(G)}{100}$ dekurzivni kamatni faktor, vrijednost glavnice C_0 na kraju drugog razdoblja je

$$C_2 = C_1 + I_2 = C_1 + \frac{C_1\, p\,(G)}{100} = C_1\left(1 + \frac{p\,(G)}{100}\right) = C_1\, r = C_0\, r^2.$$

Pretpostavimo da je vrijednost glavnice C_0 na kraju i-1. razdoblja

$$C_{i-1} = C_0 r^{i-1}.$$

Koristeći se matematičkom indukcijom, pokazat ćemo da se vrijednost glavnice C_0 na kraju i-tog razdoblja uz navedenu pretpostavku o nepromjenjivosti kamatnjaka može izračunati formulom

$$C_i = C_0 r^i.$$

Doista, kako su kamate za i-to razdoblje

$$I_i = \frac{C_{i-1}\, p\,(G)}{100},$$

vrijednost glavnice C_0 na kraju i-tog razdoblja je

$$C_i = C_{i-1} + I_i = C_{i-1} + \frac{C_{i-1}\, p\,(G)}{100} = C_{i-1}\left(1 + \frac{p\,(G)}{100}\right) = C_{i-1} r,$$

pa zbog pretpostavke indukcije, nalazimo da je

$$C_i = C_{i-1} r = C_0 r^{i-1} r = C_0 r^i,$$

što je i valjalo pokazati.

Dekurzivni kamatni faktor r predstavlja vrijednost novčane jedinice (to jest iznosa $C_0 = 1$) zajedno s kamatama na kraju jediničnog razdoblja uz primjenu složenog kamatnog računa i dekurzivni način obračuna kamata[4], jer je tada $C_1 = 1 \cdot r^1 = r$. Uočimo da konačna vrijednost novčane jedinice na kraju n-tog jediničnog razdoblja uz navedene pretpostavke iznosi $C_n = r^n$.

---

[3] Uobičajeno je da kada koristimo složeni kamatni račun, kamate označavamo s I, pa ćemo u nastavku koristiti ovaj simbol da bismo istakli da rabimo složeni kamatni račun.

[4] Dekurzivni *način* obračuna kamata znači da se kamate obračunavaju i(ili) pripisuju glavnici na kraju razdoblja ukamaćivanja.

Veličinu r^n nazivamo *faktorom akumulacije*, a jednaka je konačnoj vrijednosti novčane jedinice na kraju n-tog jediničnog razdoblja (za nas u ovom radu to je jedna godina) uz dekurzivni način obračuna kamata.

Naravno, *sadašnju* (*aktualnu*) *vrijednost jednog iznosa* ako je poznata konačna vrijednost tog iznosa uz navedeni uvjet računamo formulom

$$C_0 = \frac{C_n}{\left(1 + \frac{p(G)}{100}\right)^n},$$

odnosno

$$C_0 = \frac{C_n}{r^n} \quad . \tag{7}$$

Primjer 2. Koliki iznos je morao štediša uložiti u poslovnu banku 31. prosinca 2005. godine ako želi 31. prosinca 2008. godine na temelju te jedne uplate raspolagati iznosom 25 000 kn ako se banka u navedenom trogodišnjem razdoblju koristi godišnjim nepromjenljivim kamatnjakom 7?

Budući da je dekurzivni kamatni faktor

$$r = 1 + \frac{p\,(G)}{100} = 1 + \frac{7}{100} = 1.07,$$

koristeći formulu (7), nalazimo traženi iznos

$$C_0 = \frac{C_n}{r^n} = \frac{25\,000}{1.07^3} \approx 20\,407.45 \text{ kn}.$$

Primjer 3. Uz koliki godišnji nepromjenjivi kamatnjak treba oročiti 40 000 kn ako se želi na temelju tog iznosa za 4 godine od ulaganja raspolagati sa 70 000 kn?

Uočimo da je sada $C_0 = 40\,000$ kn, $C_4 = 70\,000$ kn, a $n = 4$ godine. Uvrstimo li navedene vrijednosti u formulu (6), dolazimo do sljedeće jednadžbe:

$$70\,000 = 40\,000\, r^4,$$

odnosno

$$70\,000 = 40\,000 \left(1 + \frac{p(G)}{100}\right)^4 .$$

Traženi godišnji kamatnjak je

$$p(G) = 100 \left(\sqrt[4]{\frac{7}{4}} - 1\right) \approx 100 \cdot (1.15016 - 1) = 15.016\,.$$

Za vježbu pokažite da ako su poznate sadašnja C_0 i konačna vrijednost C_n jednog iznosa i broj razdoblja ukamaćivanja n, nepromjenjivi godišnji kamatnjak možemo izračunati koristeći formulu

$$p(G) = 100 \left(\sqrt[n]{\frac{C_n}{C_0}} - 1\right). \tag{8}$$

Primjer 4. Na koliko godina treba oročiti 50 000 kn ako se želi na temelju tog iznosa raspolagati sa 75 000 kn ako poslovna banka u cijelom razdoblju oročavanja koristi nepromjenjivi godišnji kamatnjak $p(G) = 6.99132$?

Uočimo da je sada $C_0 = 50\,000$ kn, $C_n = 75\,000$ kn, a $p(G) = 6.99132$. Budući je kamatnjak dan na godišnjoj razini, broj razdoblja ukamaćivanja predstavlja broj godina

na koji je iznos C_0 oročen. Uvrstimo li navedene vrijednosti u formulu (6), dolazimo do eksponencijalne jednadžbe:

$$75\,000 = 50\,000 \cdot \left(1 + \frac{6.99132}{100}\right)^n,$$

odnosno

$$75\,000 = 50\,000 \cdot 1.0699132^n,$$

Logaritmiranjem prethodne jednadžbe, dolazimo do linearne jednadžbe

$$\log 75\,000 = \log 50\,000 + n \log 1.0699132,$$

čije rješenje je

$$n = \frac{\log 75\,000 - \log 50\,000}{\log 1.0699132} = \frac{\log 1.5}{\log 1.0699132},$$

odnosno

$$n \approx 6.$$

Dakle, iznos od 50 000 kn treba uz navedene uvjete oročiti na šest godina.

Za vježbu pokažite da ako su poznate sadašnja C_0 i konačna vrijednost C_n jednog iznosa i nepromjenjivi godišnji kamatnjak $p(G)$, broj razdoblja ukamaćivanja n možemo izračunati koristeći formulu

$$n = \frac{\log\left(\frac{C_n}{C_0}\right)}{\log r}. \tag{9}$$

Ukupne (*složene*) *kamate* predstavljaju razliku konačne i sadašnje vrijednosti, pa ih možemo izračunati koristeći formulu

$$I = C_n - C_0 = C_0\left(1 + \frac{p(G)}{100}\right)^n - C_0 = C_0\left[\left(1 + \frac{p(G)}{100}\right)^n - 1\right]. \tag{10}$$

Pokažimo da su ukupne složene kamate I veće od ukupnih jednostavnih kamata K ako je $n > 1$. Doista, koristeći binomni razvoj i uvažavajući da su svi pribrojnici u razvoju nenegativni, nalazimo

$$\begin{aligned}\left(1 + \frac{p\,(G)}{100}\right)^n &= 1^n + \binom{n}{1}1^{n-1}\cdot\frac{p\,(G)}{100} + \binom{n}{2}1^{n-2}\cdot\left(\frac{p\,(G)}{100}\right)^2 \\ &\quad + \ldots + \binom{n}{n-1}1\cdot\left(\frac{p\,(G)}{100}\right)^{n-1} + \left(\frac{p\,(G)}{100}\right)^n \\ &\geqslant 1 + \frac{n\,p\,(G)}{100},\end{aligned}$$

jer za $n > 1$ i $p(G) > 0$ (a kamatnjak mora biti nenegativan!) su pribrojnici u binomnom razvoju, počevši od trećega, nenegativni. Dakle,

$$I = C_0\left(\left(1 + \frac{p\,(G)}{100}\right)^n - 1\right) \geqslant C_0\left(1 + \frac{n\,p\,(G)}{100} - 1\right) = \frac{C_0\;n\,p\,(G)}{100} = K,$$

što je i valjalo pokazati.

Upravo dokazani rezultat u suglasju je s rezultatom iz *primjera* 1. Naime, u tom primjeru smo vidjeli da su ukupne jednostavne kamate

$$K = 26\,000 \text{ kn} - 20\,000 \text{ kn} = 6000 \text{ kn},$$

a ukupne složene

$$I = 26\,620 \text{ kn} - 20\,000 \text{ kn} = 6620 \text{ kn}.$$

Dakle, upravo u skladu s netom dokazanim rezultatom $I \geqslant K$ (u ovom slučaju vrijedi stroga nejednakost, to jest $I > K$).

Primjer 5. Koji iznos je oročen na pet godina uz nepromjenjivi godišnji kamatnjak $p(G) = 6$ ako je poznato da oročenjem štediša na temelju tog nepoznatog iznosa na kamatama dobiva 7000 kn?

Dakle, imamo da je $r = 1 + \frac{6}{100} = 1.06$, $n = 5$ i $I = 7000$ kn. Kako je

$$C_5 = C_0 \cdot 1.06^5 \qquad \text{i} \qquad C_5 - C_0 = 7000,$$

imamo sljedeću linearnu jednadžbu po C_0:

$$C_0 \cdot 1.06^5 - C_0 = 7000,$$

odnosno

$$C_0 \cdot \left(1.06^5 - 1\right) = 7000,$$

pa je

$$C_0 = \frac{7000}{1.06^5 - 1} \approx 20\,696.25 \text{ kn.}$$

Primjer 6. Kojim iznosom raspolaže štediša nakon pet godina oročenja uz nepromjenjivi godišnji kamatnjak $p(G) = 6$ ako je poznato da oročenjem štediša na temelju tog nepoznatog iznosa na kamatama dobiva 7000 kn?

Vidjeli smo u prethodnom primjeru da je $r = 1 + \frac{6}{100} = 1.06$, $n = 5$, $I = 7000$ kn i $C_0 = 20\,696.25$ kn. Dakle, štediša će nakon pet godina oročenja raspolagati iznosom

$$C_5 = 20\,696.25 + 7000 = 27\,696.25 \text{ kn.}$$

Ako ne želimo (ili ne možemo!) koristiti rezultat iz *primjera* 5, postupamo na sljedeći način. Iz jednadžbi

$$C_5 = C_0 \cdot 1.06^5 \qquad \text{i} \qquad C_0 = C_5 - 7000,$$

dobivamo sljedeću linearnu jednadžbu po C_5:

$$C_5 = (C_5 - 7000) \cdot 1.06^5,$$

pa je

$$C_5 = \frac{7000 \cdot 1.06^5}{1.06^5 - 1} \approx 27\,696.25 \text{ kn.}$$

Do sada smo pretpostavljali da je godišnji kamatnjak nepromjenjiv u svim razdobljima ukamaćivanja. Kako treba postupiti ako ova pretpostavka nije ispunjena? Prije nego što izvedemo formulu koja daje odgovor na postavljeno pitanje, sljedećim primjerom ukazat ćemo kako treba postupati.

Primjer 7. Kojim iznosom raspolaže štediša nakon pet godina oročenja iznosa 10 000 kn ako mu je poslovna banka u prve tri godine kamate obračunavala uz godišnji kamatnjak 6, a posljednje dvije uz godišnji kamatnjak 8?

Uočimo da kamatnjak nije fiksan u cijelom razdoblju ukamaćivanja. Petogodišnje razdoblje ukamaćivanja možemo razdvojiti na 2 podrazdoblja u kojima je kamatnjak bio nepromjenjiv: prvo podrazdoblje predstavljaju prve tri godine i tada je kamatnjak također fiksan i iznosi $p_1(G) = 6$, a drugo podrazdoblje predstavljaju posljednje dvije godine kada je kamatnjak fiksan i iznosi $p_2(G) = 8$. Koristeći formulu (6), nalazimo da početni iznos C_0 zajedno s ukupnim složenim kamatama na kraju prvog podrazdoblja iznosi

$$C_3 = C_0 \cdot 1.06^3 = 10000 \cdot 1.06^3 = 11\,910.16 \text{ kn.}$$

Dakle, na *početku* drugog podrazdoblja štediša raspolaže iznosom C_3 koji se ukamaćuje iduće dvije godine po stopi $p_2(G)$, pa je vrijednost početnog iznosa na *kraju* drugog

podrazdoblja (to jest na kraju pete godine oročenja)

$$C_5 = C_3 \cdot 1.08^2 = 11\,910.16 \cdot 1.08^2 \approx 13\,892.01 \text{ kn.}$$

Uočimo da smo iznos C_5 mogli izračunati odjednom, a ne u dva koraka na sljedeći način:

$$C_5 = C_3 \cdot 1.08^2 = C_0 \cdot 1.06^3 \cdot 1.08^2 = 10000 \cdot 1.06^3 \cdot 1.08^2 \approx 13\,892.01 \text{ kn.}$$

Prethodno razmatranje sad ćemo poopćiti. Naime, vrijedi sljedeći rezultat:

Vrijednost (jednog) iznosa C_0 na kraju n-te godine uz pretpostavku da se kamate obračunavaju po *složenom kamatnom računu* uz *promjenjivu* godišnju kamatnu stopu $p_i(G)$, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, u i-toj godini iznosi

$$C_n = C_0 \cdot r_1 \cdot r_2 \cdot \ldots \cdot r_n, \tag{11}$$

što možemo skraćeno pisati i ovako:

$$C_n = C_0 \cdot \prod_{i=1}^{n} r_i,$$

pri čemu je $r_i = 1 + \frac{p_i(G)}{100}$, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, dekurzivni kamatni faktor za i-tu godinu.

Po definiciji složenog kamatnog računa kamate za i-tu godinu iznose

$$I_i = \frac{C_{i-1}\, p_i\,(G)}{100}, \qquad i \in \{1, 2, ..., n\},$$

pri čemu je C_{i-1} iznos glavnice C_0 na kraju $(i-1)$. godine ili, što je ekvivalentno, na početku i-te godine. Konkretno, to znači da su kamate za prvu godinu

$$I_1 = \frac{C_0\, p_1\,(G)}{100},$$

drugu

$$I_2 = \frac{C_0\, p_2\,(G)}{100}$$

i tako dalje. No, kako je

$$C_1 = C_0 + I_1 = C_0 + \frac{C_0\, p_1\,(G)}{100} = C_0 \left(1 + \frac{p_1\,(G)}{100}\right) = C_0 r_1,$$

gdje je

$$r_1 = 1 + \frac{p_1\,(G)}{100}$$

dekurzivni kamatni faktor za prvu godinu, vrijednost glavnice C_0 na kraju druge godine je

$$C_2 = C_1 + I_2 = C_1 + \frac{C_1\, p_2\,(G)}{100} = C_1 \left(1 + \frac{p_2\,(G)}{100}\right) = C_1 r_2 = C_1 r_1 r_2,$$

pri čemu je sada

$$r_2 = 1 + \frac{p_2\,(G)}{100}$$

dekurzivni kamatni faktor za drugu godinu. Pretpostavimo da je vrijednost glavnice C_0 na kraju $(i-1)$. godine

$$C_{i-1} = C_0 r_1 r_2 \ldots r_{i-1}.$$

Koristeći princip matematičke indukcije, pokazat ćemo da je tada vrijednost glavnice C_0 na kraju i-te godine

$$C_i = C_0 r_1 r_2 \dots r_{i-1} r_i.$$

Doista, kako su kamate za i-tu godinu

$$I_i = \frac{C_{i-1}\, p_i\,(G)}{100},$$

vrijednost glavnice C_0 na kraju i-te godine je

$$C_i = C_{i-1} + I_i = C_{i-1} + \frac{C_{i-1}\, p_i\,(G)}{100} = C_{i-1}\left(1 + \frac{p_i\,(G)}{100}\right) = C_{i-1} r_i,$$

pa je zbog pretpostavke indukcije zaista

$$C_i = C_{i-1} r_i = C_0 r_1 r_2 \dots r_{i-1} r_i = C_0 \prod_{k=1}^{i} r_k.$$

Posebno, ako je $i = n$, imamo formulu za vrijednost iznosa C_0 na kraju n-te godine

$$C_n = C_0 \cdot \prod_{i=1}^{n} r_i,$$

što je i valjalo pokazati.

Uočimo da su ukupne kamate u slučaju da se kamata obračunava složenim kamatnim računom uz varijabilnu kamatnu stopu

$$I = C_n - C_0 = C_0\,(r_1\, r_2 \dots r_n - 1)\,, \tag{12}$$

odnosno

$$I = C_0 \left(\prod_{i=1}^{n} r_i - 1 \right). \tag{13}$$

Primjer 8. Koliko iznose ukupne složene kamate na iznos od 1000 kn za razdoblje od pet godina ako je godišnji kamatnjak u prvoj godini 6, a u svakoj idućoj za 1 veći od onog u prethodnoj godini?

Uočimo da je $p_1(G) = 6$, $p_2(G) = 6+1 = 7$, $p_3(G) = 7+1 = 8$, $p_4(G) = 8+1 = 9$, $p_5(G) = 9 + 1 = 10$ i $C_0 = 1000$ kn. Prema tome, $r_1 = 1.06$, $r_2 = 1.07$, $r_3 = 1.08$, $r_4 = 1.09$, $r_5 = 1.1$, pa koristeći formulu (12), nalazimo ukupne složene kamate

$$I = 1000\,(1.06 \cdot 1.07 \cdot 1.08 \cdot 1.09 \cdot 1.1 - 1) \approx 468.70 \text{ kn}.$$

Na kraju, mladim čitateljima predlažemo da provjere jesu li doista usvojili izloženo gradivo rješavajući zadatke koje dajemo u nastavku.

Zadaci za vježbu

1. Kojim iznosom će raspolagati štediša 31. prosinca 2010. godine na temelju iznosa 20 000 kn koje je oročio u poslovnoj banci 31. prosinca 2004. godine ako banka u navedenom šestogodišnjem razdoblju koristi godišnji nepromjenjivi kamatnjak 5.5?

Rješenje: 27 576.86 kn

2. Koliki iznos je morao štediša uložiti u poslovnu banku 31. prosinca 2004. godine ako želi 31. prosinca 2018. godine na temelju te jedne uplate raspolagati iznosom

30 000 kn? Banka u navedenom razdoblju koristi godišnji nepromjenjivi kamatnjak 3.75.

Rješenje: 17 917.93 kn

3. Koliko iznose ukupne složene kamate na iznos od 12 000 kn za razdoblje od devet godina ako je godišnji kamatnjak u svim razmatranim godinama nepromjenjiv i iznosi 3.25?

Rješenje: 4002.65 kn

4. Koji iznos za dvadeset godina uz godišnji kamatnjak 4.75 donese ukupno 100 000 kn složenih kamata?

Rješenje: 65 369.4 kn

5. Štediša je oročio u poslovnu banku neki iznos na petnaest godina uz nepromjenjivi godišnji kamatnjak $p(G) = 4$. Ako je poznato da je oročenjem na temelju tog iznosa na kamatama dobio 10 000 kn, kolikim iznosom je štediša raspolagao na kraju oročenja?

Rješenje: 22 485.28 kn

6. Uz koliku godišnju kamatnu stopu je dužnik posudio 30 000 kn ako je vjerovniku nakon sedam godina u cijelosti podmirio dug iznosom 44 444 kn? Kamate se obračunavaju po složenom kamatnom računu.

Rješenje: 5.7754 godišnje

7. Za koliko godina iznos od 100 000 kn donese uz godišnji kamatnjak 3.75 ukupno 24 718 kn složenih kamata?

Rješenje: 6 godina

8. Neka osoba je 31. prosinca 2002. godine uložila u poslovnu banku 100 000 kn. Ako je ona na temelju navedene uplate 31. prosinca 2006. podigla 133 298.5 kn, uz koji godišnji kamatnjak je banka obračunavala kamate?

Rješenje: 7.45 godišnje

9. Koliko iznose ukupne složene kamate na iznos 5000 kn za razdoblje od 6 godina ako je godišnji kamatnjak u prvoj godini 5, a u svakoj idućoj za 0.5 veći od onog u prethodnoj godini?

Rješenje: 7192.16 kn

10. Koliko iznose ukupne složene kamate na iznos od 5000 kn za razdoblje od 6 godina ako je godišnji kamatnjak u prvoj godini 5, a u svakoj idućoj za 20% veći od onog u prethodnoj godini?

Rješenje: 8043.03 kn

Literatura

[1] B. RELIĆ, (2002), *Gospodarska matematika*, Hrvatska zajednica računovođa i financijskih djelatnika, Zagreb

[2] Đ. SALAMON, B. ŠEGO, (2006), *Matematika* 3 – udžbenik sa zbirkom zadataka za treći razred ekonomske škole, Alka script, Zagreb

[3] B. ŠEGO, (2005), *Matematika za ekonomiste*, Narodne novine, Zagreb

[4] B. ŠEGO, T. ŠIKIĆ, (2006), *Četiri računa za ekonomiste*, VŠPU "Baltazar Adam Krčelić", Zaprešić

Problemi s ortocentrom, II

Zvonko Čerin[1], *Zagreb*

U ovom drugom dijelu članka pokazuje se da grešaka poput onih iz knjige [9] koje smo razmotrili u prvom dijelu [1] ima i u nekim drugim knjigama i člancima pa i na Internetu.

Johnsonovi problemi s ortocentrom

Greška iz teorema 11.12 knjige [9] pojavljuje se i u mnogo starijoj i u svijetu poznatijoj knjizi Rogera A. Johnsona [7] gdje je formula (12) na stranici 190 dana u tvrdnji f. i formula (11) na stranici 191 opet kao tvrdnja f. Na toj stranici ima još dosta pogrešaka tako da ćemo sada opisati kako ih popraviti.

Teorem 9. (Popravak tvrdnje b iz [7, str. 191] *(a) Trokut ABC nije tupokutan onda i samo onda ako je opseg njegovog ortičkog trokuta DEF jednak kvocijentu dvostruke površine i polumjera opisane kružnice trokuta ABC, tj.* $|EF| + |FD| + |DE| = \frac{2S}{R}$.

(b) Kut C u trokutu ABC nije šiljast onda i samo onda ako vrijedi $|EF| + |FD| - |DE| = \frac{2S}{R}$.

Dokaz. Odaberimo pravokutni koordinatni sustav tako da je $A(0, 0)$, $B(r(f+g), 0)$ i $C\left(\frac{(f^2-1)gr}{fg-1}, \frac{2fgr}{fg-1}\right)$. Parametri f i g su kotangensi polovica kuteva A i B dok je r radijus upisane kružnice trokuta ABC. Primijetimo da su f, g i r povezani s duljinama stranica a, b i c ovako

$$f = \frac{(a+b+c)(b+c-a)}{4S}, \quad g = \frac{(a+b+c)(a-b+c)}{4S}, \quad r = \frac{2S}{a+b+c},$$

gdje je $S = \frac{\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}}{4}$. Obrnuto,

$$a = \frac{rf(g^2+1)}{fg-1}, \quad b = \frac{rg(f^2+1)}{fg-1}, \quad c = r(f+g).$$

Ovakav odabir koordinata točaka i način dokazivanja uz pomoć računala koji ćemo stalno koristiti detaljno su objašnjeni u člancima [2], [3], [4] i [5].

Kao i u dokazu teorema 8 možemo uzeti $f > 1$ i $g > 1$. Lagano se izračuna $|EF| = \frac{rf(f^2-1)(g^2+1)}{(f^2+1)(fg-1)}$, $|FD| = \frac{rg(f^2+1)(g^2-1)}{(g^2+1)(fg-1)}$, $|DE| = \frac{r(f+g)(fg+f+g-1)|fg-f-g-1|}{(f^2+1)(g^2+1)}$ i $S = \frac{fgr^2(f+g)}{fg-1}$.

(a) Ako trokut ABC nije tupokutan, onda je prema lemi 3 stranica $|DE|$ jednaka $\frac{r(f+g)(fg+f+g-1)(f+g-fg+1)}{(f^2+1)(g^2+1)}$. Sada se uvrštavanjem gornjih prikaza lagano provjeri da je $|EF| + |FD| + |DE| = \frac{2S}{R}$.

---

[1] Autor je redoviti profesor na Matematičkom odjelu Prirodoslovno-matematičkog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu

Obrnuto, ako se u jednakost $|EF| + |FD| + |DE| = \frac{2S}{R}$ za $|EF|$, $|FD|$, R i S uvrste gornje vrijednosti i riješi po $|DE|$ dobije se

$$|DE| = \frac{r\,(f+g)\,(g+f+f\,g-1)\,(f+g-f\,g+1)}{(f^2+1)(g^2+1)}.$$

Usporedbom s gornjim izrazom za $|DE|$ vidimo da izraz $f\,g-f-g-1$ nije pozitivan pa prema lemi 3 slijedi da kut C nije tup (tj. da trokut ABC nije tupokutan).

(b) Ako kut C nije šiljast, prema lemi 3 je stranica $|DE|$ jednaka $\frac{r\,(f+g)(f\,g+f+g-1)(f\,g-f-g-1)}{(f^2+1)(g^2+1)}$. Sada odmah slijedi

$$|EF| + |FD| - |DE| = \frac{2\,S}{R}.$$

Obrnuto, ako se u jednakost $|EF| + |FD| - |DE| = \frac{2S}{R}$ za $|EF|$, $|FD|$, R i S uvrste gornje vrijednosti i riješi po $|DE|$ dobije se

$$|DE| = \frac{r\,(f+g)\,(g+f+f\,g-1)\,(f\,g-f-g-1)}{(f^2+1)(g^2+1)}.$$

Jer je $|DE| \geq 0$ imamo $f\,g-f-g-1 \geq 0$. Ako je $f\,g-f-g-1 = 0$ onda je $c^2 = a^2 + b^2$ pa je prema Pitagorinom teoremu kut C pravi.

Ako je $f\,g-f-g-1 > 0$ onda prema lemi 3 slijedi da je kut C tupi (tj. da je trokut ABC tupokutan).

Dakle, u svakom slučaju, kut C nije šiljast. □

Teorem 10. (Popravak tvrdnje c iz [7, str. 191].) *(a) Trokut ABC nije tupokutan onda i samo onda ako je udaljenost nožišta ortogonalnih projekcija točke D na pravce CA i AB jednaka polovici opsega njegovog ortičkog trokuta DEF.*

(b) Kut A u trokutu ABC nije šiljast onda i samo onda ako je udaljenost nožišta ortogonalnih projekcija točke D na pravce CA i AB jednaka $\frac{|FD|+|DE|-|EF|}{2}$.

Teorem 11. (Popravak tvrdnje d iz [7, str. 191.) *(a) Trokut ABC nije tupokutan onda i samo onda ako je produkt duljina visina tog trokuta jednak produktu njegove površine i opsega njegovog ortičkog trokuta DEF,*

$$|AD| \cdot |BE| \cdot |CF| = S\,(|EF| + |FD| + |DE|).$$

(b) Kut A u trokutu ABC nije šiljast onda i samo onda ako je

$$|AD| \cdot |BE| \cdot |CF| = S\,(|FD| + |DE| - |EF|).$$

U dijelu g na stranici 191 u [7] razmatra se polumjer ϱ upisane kružnice ortičkog trokuta DEF. Prvo se tvrdi da je

$$\varrho = |HD|\,\cos A = 2\,R\,\cos A\,\cos B\,\cos C$$

što očigledno nije istinito kada je kut A tup jer je tada $\cos A$ negativan.

Što je onda $|HD| \cdot |\cos A|$ kada je kut A tup? Taj produkt nije polumjer upisane kružnice ortičkog trokuta DEF već polumjer ϱ_a njegove pripisane kružnice nasuprot vrha D. Tada je vrh A središte upisane kružnice trokuta DEF, a ne ortocentar H (koji je to kada je kut A šiljast i koji za tupi A prelazi u središte njegove D-pripisane kružnice).

Dalje se tvrdi da je $|AH| \cdot |HD| = 2\,R\,\varrho$. Opet je to točno samo kada trokut ABC nije tupokutan. Ako je trokut ABC tupokutan onda je $|AH| \cdot |HD| = 2\,R\,\varrho_a$. Slične tvrdnje vrijede za produkte $|BH| \cdot |HE|$ i $|CH| \cdot |HF|$.

Slijedi Johnsonova tvrdnja da je omjer površina ortičkog trokuta DEF i osnovnog trokuta ABC jednaka $\frac{\varrho}{R}$. To isto vrijedi samo za trokute koji nisu tupokutni. Ako je trokut ABC tupokutan taj omjer je jednak $\frac{\varrho_a}{R}$, $\frac{\varrho_b}{R}$ ili $\frac{\varrho_c}{R}$ već prema tome koji je kut trokuta ABC tup.

Interesantno je da istu pogrešku nalazimo i u zadatku 52(c) na strani 273 talijanske knjige [6] iz 2001. godine kada su programi za dinamičku geometriju poput Cabri, Cindarella i Sketchpad već dosta rasprostranjeni. I prethodni zadatak 52(b) tamo pogrešno tvrdi da za sve trokute vrijedi

$$|AH| \cdot |AD| + |BH| \cdot |BE| + |CH| \cdot |CF| = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}.$$

I ta formula je istinita samo za trokute koji nisu tupokutni, a ako je npr. kut C tup onda ona glasi:

$$|AH| \cdot |AD| + |BH| \cdot |BE| - |CH| \cdot |CF| = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}.$$

I na kraju, Johnson izvodi zaključak da je

$$a^2 + b^2 + c^2 = 8\,R^2 + 4\,\varrho\,R.$$

Kao i gore, ta formula je istinita samo za trokute koji nisu tupokutni. Ako trokut ABC ima tupi kut desna strana mora biti $8\,R^2 - 4\,\varrho_a\,R$, $8\,R^2 - 4\,\varrho_b\,R$ ili $8\,R^2 - 4\,\varrho_c\,R$ ovisno o tome koji je kut trokuta ABC tup.

Zatim dolazi tvrdnja h koja glasi:

$$|AH|^2 + |BH|^2 + |CH|^2 = 4\,R^2 - 4\,\varrho\,R.$$

I ovdje za tupokutne trokute desna strana je zapravo $4\,R^2 + 4\,\varrho_a\,R$, $4\,R^2 + 4\,\varrho_b\,R$ ili $4\,R^2 + 4\,\varrho_c\,R$ već prema tome koji je kut trokuta ABC tup.

Postoji još jedan način kako ukloniti neke od Johnsonovih poteškoća iz g. Bolje je s ϱ označiti (zajedničku) udaljenost ortocentra H od pravaca EF, FD i DE. Onda je

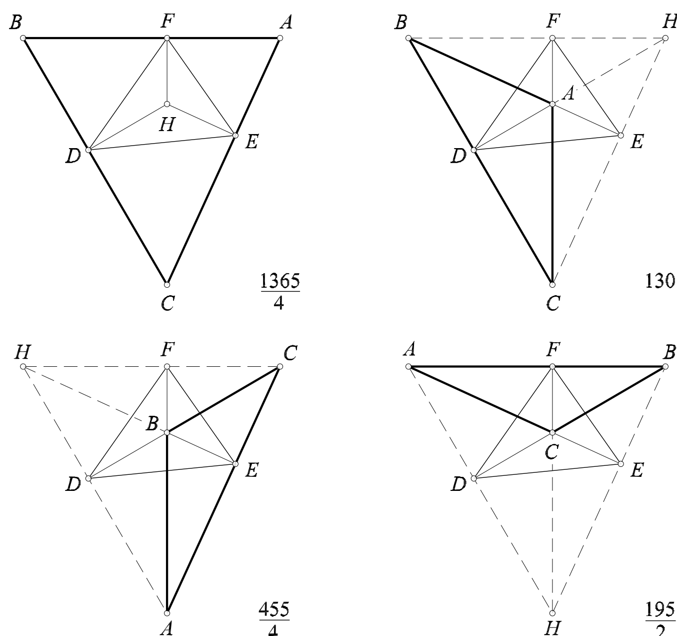
$$\varrho = |HD| \cdot |\cos A| = 2\,R \cdot |\cos A\,\cos B\,\cos C|,$$

$|AH| \cdot |HD| = 2\,R\,\varrho$ i omjer površina trokuta DEF i ABC jednak $\frac{|DEF|}{|ABC|} = \frac{\varrho}{R}$ bez ikakvih ograničenja na trokut ABC.

Primijetimo da je nedavno u članku [8] analizirano rješavanje problema određivanja površine trokuta ABC čiji ortički trokut DEF ima stranice 13, 14 i 15. Izvodi se formula $\frac{|DEF|}{|ABC|} = \frac{\varrho}{R}$ i primjećuje da ona vrijedi jedino za trokute koji nisu tupokutni. Posljednji paragraf glasi ovako:

"Kod tupokutnog trokuta nožišta dviju visina, kao i ortocentar, su izvan trokuta i očito ništa od navedenog ne vrijedi (jer smo u svim dokazima koristili da je ortički trokut dio polaznog trokuta, što sada nije). Može se pokazati da i u ovom slučaju postoje zanimljivi odnosi među elementima tih dvaju trokuta. Ali, o tome, možda drugom prigodom."

Nažalost ne primjećuje se da tvrdnja može biti istinita iako neka posebna metoda njenog dokazivanja nije provediva i da navedene napomene o posebnosti tupokutnih trokuta imaju kao posljedicu da razmatrani problem, pored rješenja $|ABC| = \frac{1365}{4}$, ima još tri rješenja. To su $|ABC| = 130$, $|ABC| = \frac{455}{4}$ i $|ABC| = \frac{195}{2}$. Sva četiri rješenja su prikazana na slici 4.



Slika 4. Četiri rješenja problema.

U programu Maple V u dokazu se najprije odredi rješenje $f = 2$, $g = \frac{7}{4}$ i $r = 4$ sistema $\left\{13 = \frac{rf\left(g^2+1\right)}{fg-1},\ 14 = \frac{rg\left(f^2+1\right)}{fg-1},\ 15 = r\,(f+g)\right\}$ i onda te vrijednosti uvrsti u koordinate središta upisane i tri pripisane kružnice $I\,(f\,r,\, r)$, $A_e\left(\frac{(f+g)f\,g\,r}{f\,g-1},\ \frac{(f+g)\,g\,r}{f\,g-1}\right)$, $B_e\left(\frac{r(f+g)}{1-f\,g},\ \frac{r(f+g)f}{f\,g-1}\right)$ i $C_e\,(g\,r\,,\, -f\,g\,r)$. I na kraju, koristi se formula $\frac{|(b-c)x+(c-a)y+(a-b)z|}{2}$ za površinu trokuta čiji vrhovi imaju koordinate $(x,\, a)$, $(y,\, b)$ i $(z,\, c)$. Tražene površine su $|A_eB_eC_e| = \frac{1365}{4}$, $|IB_eC_e| = 130$, $|A_eIC_e| = \frac{455}{4}$ i $|A_eB_eI| = \frac{195}{2}$.

Ortocentar na Internetu

Ako na Internetu tražimo dokumente koji sadrže riječ "Orthocenter" (engleski za ortocentar) pojavljuje se više desetaka tisuća mogućnosti. Neke od njih su iz zubarstva ali one iz matematike uglavnom ponavljaju samu definiciju ortocentra kao presjeka visina i / ili opisuju najjednostavnija njegova svojstva.

Naprimjer, na adresi `http://www.pballew.net/orthocen.html` anonimni autor ponavlja pogrešnu tvrdnju da je opseg ortičkog trokuta $\frac{2S}{R}$ (vidi teorem 9).

Ugledna kolekcija sadržaja iz matematike namijenjena korisnicima programa Mathematica (koji je dostupan svim učenicima u Hrvatskoj) koju uređuje Eric W. Weisstein na adresi `http://mathworld.wolfram.com/Orthocenter.html` navodi neke od rezultata koje smo razmatrali, ali samo uz pretpostavku da je promatrani trokut šiljastokutan.

I na kraju, na adresi
http://jwilson.coe.uga.edu/em1725/OrthoRatio/OrthocenterRatioSum.html
Jim Wilson daje dva rezultata o sumi omjera nekih duljina dužina vezanih uz ortocentar i najavljuje da oni ovise o tome kakve kutove ima trokut. Mi ih ovdje sada dajemo u nešto poboljšanom obliku kao sljedeća dva teorema. Dokaze prepuštamo čitateljima za vježbu.

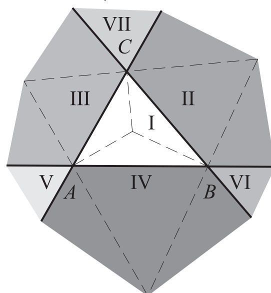
Teorem 12. *(a) Trokut ABC nije tupokutan onda i samo onda ako je* $\frac{|AH|}{|AD|}+\frac{|BH|}{|BE|}+\frac{|CH|}{|CF|}=2$.

(b) Trokut ABC ima tupi kut u vrhu C onda i samo onda ako je $\frac{|AH|}{|AD|}+\frac{|BH|}{|BE|}-\frac{|CH|}{|CF|}=2$.

Teorem 13. *(a) Trokut ABC nije tupokutan onda i samo onda ako je* $\frac{|HD|}{|AD|}+\frac{|HE|}{|BE|}+\frac{|HF|}{|CF|}=1$.

(b) Trokut ABC ima tupi kut u vrhu C onda i samo onda ako je $\frac{|HF|}{|CF|}-\frac{|HD|}{|AD|}-\frac{|HE|}{|BE|}=1$.

Wilson također spominje da zadnji teorem ima poopćenje kada se promatraju omjeri $\frac{|PP_a|}{|AD|}$, $\frac{|PP_b|}{|BE|}$ i $\frac{|PP_c|}{|CF|}$ gdje su P_a, P_b i P_c nožišta okomica iz točke P na pravce BC, CA i AB. Naš sljedeći teorem je još jedno poboljšanje u kojem ne moramo imati okomice. U njegovoj formulaciji koristimo sedam područja na koje tri pravca, koja nisu kopunktulna, dijele ravninu (vidi sliku 5).



Slika 5. Sedam područja ravnine određenih trokutom ABC.

Teorem 14. *Neka točka P nije vrh trokuta ABC, a pravci AP, BP i CP sijeku pravce BC, CA i AB u točkama U, V i W. Za točku Q različitu od točke P neka paralele kroz Q s pravcima AP, BP i CP sijeku pravce BC, CA i AB u točkama X, Y i Z.*

(a) Ako je točka Q u području I onda je $\frac{|QX|}{|AU|}+\frac{|QY|}{|BV|}+\frac{|QZ|}{|CW|}=1$.

(b) Ako je točka Q u području II onda je $\frac{|QY|}{|BV|}+\frac{|QZ|}{|CW|}-\frac{|QX|}{|AU|}=1$.

(c) Ako je točka Q u području III onda je $\frac{|QX|}{|AU|}-\frac{|QY|}{|BV|}+\frac{|QZ|}{|CW|}=1$.

(d) Ako je točka Q u području IV onda je $\frac{|QX|}{|AU|}+\frac{|QY|}{|BV|}-\frac{|QZ|}{|CW|}=1$.

(e) Ako je točka Q u području V onda je $\frac{|QX|}{|AU|}-\frac{|QY|}{|BV|}-\frac{|QZ|}{|CW|}=1$.

(f) Ako je točka Q u području VI onda je $\frac{|QY|}{|BV|}-\frac{|QZ|}{|CW|}-\frac{|QX|}{|AU|}=1$.

(g) Ako je točka Q u području VII onda je $\frac{|QZ|}{|CW|}-\frac{|QX|}{|AU|}-\frac{|QY|}{|BV|}=1$.

Dokaz. Ako trokut ABC ima koordinate vrhova kao i u dokazu teorema 8 i ako je $P(p, q)$ i $Q(u, v)$, onda je lagano naći koordinate točaka U, V, W, X, Y i Z i izračunati $\frac{|QX|}{|AU|} = \frac{|2\,g\,u+(g^2-1)\,v-2\,g\,r\,(f+g)|}{2\,g\,r\,(f+g)}$, $\frac{|QY|}{|BV|} = \frac{|-2f\,u+(f^2-1)\,v|}{2f\,r\,(f+g)}$ i $\frac{|QZ|}{|CW|} = \frac{v\,(f\,g-1)}{2f\,g\,r}$. Primijetite da koordinata p i q točke P u tim izrazima nema.

Budući da su funkcije u brojnicima tih kvocijenata jednadžbe pravaca stranica trokuta, pažljivom analizom predznaka njihovih vrijednosti lagano se potvrđuju relacije (a) – (g). □

Završne napomene

Poteškoće u teoremima 11.10, 11.11 i 11.12 iz [9] otkrivene su na predavanjima autora u sklopu kolegija "Matematika računalom" na studiju matematike na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu Sveučilišta u Zagrebu gdje se studenti podučavaju kako koristiti računala u rješavanju matematičkih problema. Poteškoće iz Johnsonove knjige su otkrivene jednostavnom provjerom što o sličnim temama pišu drugi jer sam pretpostavljao da su pogreške naslijeđene. Primjeri koje smo spomenuli pokazuju da tupokutni trokuti ipak nisu zanemareni iako su malo problematičniji od šiljastokutnih i pravokutnih trokuta.

Dakle, knjige i članke iz matematike treba pažljivo čitati i svaku tvrdnju detaljno analizirati i po mogućnosti za svaku nacrtati slike u nekom od programa za dinamičku geometriju da se vidi kako se tvrdnja ponaša za različite položaje promatranih objekata.

Isto tako, knjige i članke pišu ljudi pa je prirodno očekivati da ponekad imaju grešaka.

Literatura

[1] Z. ČERIN, *Problemi s ortocentrom, I*, Matematičko-fizički list (Zagreb), 57 br. 1, (2006./ 2007.), 8–14.

[2] M. BATOR, Z. ČERIN, M. ČULAV, *Analitička geometrija ravnine računalom*, Matematičko-fizički list (Zagreb), 54 br. 1, (2003./ 2004.), 26–36.

[3] Z. ČERIN, S. VLAH, *Rješavanje zadataka računalom*, Matka (Zagreb), 10 (2001./ 2002.), br. 39, 198–202.

[4] Z. ČERIN, S. VLAH, *Primjeri upotrebe računala kod rješavanja zadataka*, Matematičko-fizički list (Zagreb), 52 br. 4, (2001./ 2002.), 254–261

[5] Z. ČERIN, S. VLAH, *Još jedno rješenje drugog zadatka na 42. MMO 2001 g.*, Matematičko-fizički list (Zagreb), 53 br. 1, (2002./ 2003.), 55–56.

[6] I. D'IGNAZIO, E. SUPPA, *Il Problema Geometrico – Dal compasso al Cabri*, Interlinea Editrice, Teramo, 2001.

[7] R. A. JOHNSON, *Advanced Euclidean Geometry*, Dover Publications, New York, 1960.

[8] ANĐELKO MARIĆ, *Analiza jednog geometrijskog problema*, Bilten seminara iz matematike za nastavnike-mentore, 13. državni susret, Trogir 5. – 8. svibnja 2004., HMD, str. 86–95.

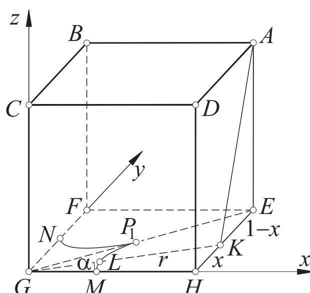
[9] DOMINIK PALMAN, *Trokut i kružnica*, Element, Zagreb 1994.

Pauk u sobi

Željko Hanjš, Zagreb

Pauk se nalazi u jednom kutu posude oblika kocke, brida duljine 1 cm. Može se gibati po zidovima brzinom 1 cm/ s. Nađite geometrijsko mjesto točaka unutar kocke do kojih pauk može doći za dvije sekunde.

Pretpostavimo da pauk kreće iz kuta A kocke $ABCDEFGH$. Radi simetrije dovoljno je odrditi jednadžbu luka $\overset{\frown}{PM}$, npr. na podu kutije, unutar trokuta EGH, do koje može doći za dvije sekunde. Postavimo Kartezijev koordinatni sustav s vrhom u točki G. Pauk će biti prikazan točkom. On ne može doći unutar područja GMP. Da bi došao najdalje, mora ici iz vrha A do brida $\overline{HE}$, tj. do točke K. Neka je $\sphericalangle KGH = \alpha$. Da bi došao do najudaljenije točke, mora se po svakoj strani gibati po pravcu. Pretpostavimo da se gibao po dužini $\overline{AK}$ i zatim po pravcu KG do točke L.



Ako je $x = |HK|$, a kako je $|GH| = 1$, dobivamo $x = \operatorname{tg} \alpha$. Sada redom dobivamo:

$$|AK| = \sqrt{1 + (1 - x)^2} = \sqrt{1 + (1 - \operatorname{tg} \alpha)^2},$$
$$|GK| = \sqrt{1 + x^2} = \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha},$$
$$|KL| = 2 - |AK| = 2 - \sqrt{1 + (1 - \operatorname{tg} \alpha)^2},$$
$$r = |GL| = |GK| - |KL| = \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} + \sqrt{1 + (1 - \operatorname{tg} \alpha)^2} - 2,$$
$$0 \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{4}.$$

Ovo je jednadžba luka $\overset{\frown}{PM}$ u polarnim koordinatama.

$$\text{Za} \quad \alpha = 0 \quad \text{je} \quad r = \sqrt{2} - 1,$$
$$\text{za} \quad \alpha = \frac{\pi}{4} \quad \text{je} \quad r = \sqrt{2} - 1,$$
$$\text{za} \quad 0 \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{4} \quad \text{je} \quad r \leqslant \sqrt{2} - 1. \qquad (*)$$

Lako se provjeri nejednakost $(*)$.

Uz pretpostavku $\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} + \sqrt{1 + (1 - \operatorname{tg} \alpha)^2} - 2$ dobivamo $\operatorname{tg} \alpha < 1$, a kako je ova nejednakost ispunjena za $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$, vrijedi i gornja nejednakost. Pauk može doći do svih točaka za koje je $r \geqslant \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} + \sqrt{1 + (1 - \operatorname{tg} \alpha)^2} - 2$, i simetrično na ostala područja.



NASTUPANJE ERE PRECIZNIH KOZMOLOŠKIH MJERENJA

Nobelova nagrada za otkriće prirode pozadinskog zračenja putem satelita COBE

Ivica Picek[1], *Zagreb*

Nobelovu nagradu iz fizike za 2006. godinu podijelili su *John C. Mather* iz NASA-inog Goddard Space Flight centra i *George F. Smoot* s Kalifornijskog sveučilišta u Berkeleyu u SAD, "za otkriće da kozmička mikrovalna pozadina ima oblik zračenja crnog tijela, te za otkriće njezine anizotropije". Riječ je o dvojici fizičara elementarnih čestica, koji su na samom početku svoje znanstvene karijere uočili da im se svemir nudi kao prirodni laboratorij za pokuse. Otkrićima do kojih su pri tome došli, otvorili su eru moderne kozmologije kao discipline u kojoj su moguća precizna mjerenja.

Era koja je prethodila pokusima satelita COBE

Konačna potvrda svemira "Velikog praska" došla je neočekivanim otkrićem Arnoa Penziasa i Roberta Wilsona iz 1964. godine. Riječ je o otkriću signala u mikrovalnom području, koji do nas dolazi podjednako iz svih smjerova neba, kozmičkoj mikrovalnoj pozadini (**CMB**, od engl. Cosmic Microwave Background), za što su Penzias i Wilson 1978. nagrađeni Nobelovom nagradom iz fizike. Iako je na takvo zračenje kao "jeku" Velikog praska u kojem započinje naš svemir ukazao George Gamow još 1948. godine, do otkrića se došlo slučajno. Dogodilo se da je rad Gamowa i njegovih studenata Alphera i Hermana u međuvremenu previđen ili zaboravljen. Naime, Robert Dicke i Jim Peebles s Princetona, koji su se početkom 60-tih upustili u nezavisnu potragu za tim zračenjem, uskoro su ustanovili da je stvar riješena otkrićem Penziasa i Wilsona, kojima su jedino mogli objasniti što je u stvari otkriveno. "Mjerenje temperature antene na 4080 MHz" grupe s Bell Labs, objavljeno je istovremeno s (ponovljenim!) teorijskim predviđanjem grupe s Princetona. Otkriće koje se posrećilo odjeknulo je na naslovnici New York Timesa i stavljeno je uz bok Hubbleovog otkrića širenja svemira, a čitava epizoda slučajnog otkrića svjedoči o tome da još sredinom prošlog stoljeća kozmologija nije uzimana ozbiljno. No to je otkriće označilo prvu prekretnicu u kozmologiji i povuklo je za sobom nove projekte.

Prvo što je još trebalo nezavisno potvrditi bilo je kozmičko porijeklo otkrivenog zračenja. Ukoliko je riječ o "jeki" Velikog praska, zračenje mora biti termičko (zračenje crnog tijela): ono je opisano poznatom Planckovom krivuljom zračenja, gdje valna

[1] Autor je redoviti profesor teorijske fizike. Bavi se problemima fizike elementarnih čestica u pristupu teorije polja te dodirnim točkama fizike čestica i kozmologije, http:/ / www.phy.hr/ ˜picek/ .

duljina na kojoj je intenzitet maksimalan ovisi o temperaturi zračenja. Za zračenje temperature 3 K krivulja intenziteta ima vrh kod 2 mm, s time da je mjerenje Penziasa i Wilsona učinjeno u samo jednoj točki, na 7.35 cm. Uslijedila su i mjerenja na drugim valnim duljinama većim od 2 mm, koja su se uz neka odstupanja podudarala sa zračenjem crnog tijela. Problem je nastao s mjerenjima na strmijem dijelu krivulje, jer te kratke valne duljine apsorbira atmosfera. Pomoću rakete, u okviru američko-japanske kolaboracije, 1987. godine su konačno učinjena mjerenja na kratkim valnim duljinama. Rezultati mjerenja odstupali su od spektra zračenja crnog tijela i time izazvali niz spekulacija i potrebu za nezavisnim mjerenjima.

Drugi problem odnosio se na mjerenje mogućih anizotropija pozadinskog zračenja. Naime, ono bi se trebalo pokazivati nešto toplijim (na razini mK) u smjeru u kojem se gibamo kroz kozmičku pozadinu. To odgovara poznatom Dopplerovom učinku porasta frekvencije koji se opaža kad nam se izvor valova približava. Uz to, zamisliva su i dodatna mala odstupanja od izotropnosti zračenja, koja bi ukazivala na postojanje nehomogenosti u prošlosti svemira. Bez njih ne bi mogli objasniti kako je došlo do nakupljanja tvari u zvijezde i galaktike u svemiru. Sićušne varijacije u temperaturi odgovarale bi područjima koja su sjeme začetka nakupljanja tvari, da bi se to nakupljanje nastavilo gravitacijskim privlačenjem. Sve to skupa pozivalo je na preciznija izučavanja CMB-a, kakva bi se mogla provesti jedino putem satelitskih mjerenja. Prilika se ukazala 1974. godine, kad je američka svemirska agencija NASA obznanila otvoreni poziv za "nespecificirani astrofizički projekt", iz kojega je rođen COBE.

Satelit COBE

COBE (COsmic Background Explorer) je zamišljen kao NASA-in prvi satelit namijenjen kozmološkim istraživanjima. Na NASA-in otvoreni poziv odazvale su se tri grupe fizičara sa svojim prijedlozima za tri instrumenta koja bi satelit trebao ponijeti;

FIRAS (Far InfraRed Absolute Spectrometer), koji bi provjerio da CMB ima spektar crnog tijela;

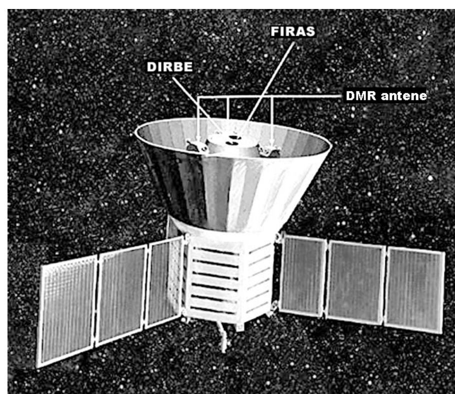
DMR (Differential Microwave Radiometer), koji bi uz "dipolnu asimetriju" uslijed opisanog gibanja u odnosu na apsolutni sustav Velikog praska, provjerio i postojanje drugih mogućih anizotropija;

DIRBE (Differential InfraRed Background Experiment), koji bi u infracrvenoj svjetlosti potražio prvotne objekte u svemiru (prve zvijezde i galaktike). S obzirom na broj izvora i količinu infracrvenog zračenja posvuda u svemiru, to se pokazalo najtežom misijom. No ipak je rasvijetljen niz pojava, od strukture Mliječne staze do difuzne svjetlosti Sunčevog sustava.

U ovom napisu ograničit ćemo se na dva instrumenta, FIRAS i DMR, koja su dovela do ovogodišnje Nobelove nagrade.

Za glavnog istraživača pokusa FIRAS imenovan je John Mather, rođen 1946. Nakon što je doktorirao iz fizike elementarnih čestica i kod Paula Richardsa na Berkeleyu stekao iskustvo na mjerenjima CMB-a pomoću balona, dobio je postdoktorsku poziciju na Goddardovom institutu za svemirska istraživanja. Tamo je, na sugestiju svojeg savjetnika Pata Thaddeusa, NASA-i predložio satelitsko mjerenje kozmičke mikrovalne pozadine. On je s vremenom postao ključna osoba i istinski pokretač cijelog tog poduhvata, u kojem je sudjelovalo više od tisuću ljudi širokog spektra zanimanja. Za glavnog istraživača pokusa DMR imenovan je George Smoot, rođen 1945. godine. Studij fizike i doktorat

iz fizike elementarnih čestica obavio je na Sveučilištu MIT, gdje je kod nobelovca Luisa Alvareza isprva radio na traženju antimaterije u kozmičkom zračenju. Nakon što je izvjesno vrijeme izučavao anizotropiju CMB-a na letovima NASA-inog špijunskog zrakoplova U-2, on zajedno s Alvarezom predlaže satelitsko mjerenje anizotropije.

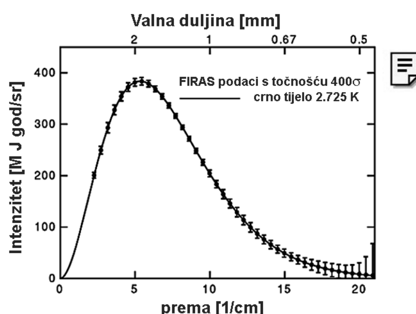


Slika 1. Prikaz satelita COBE i položaja njegovih instrumenata FIRAS, DMR i DIRBE.

Bilo je zamišljeno da sva tri prihvaćena instrumenta budu smještena na gornjem dijelu satelita COBE (slika 1). Pri tome su FIRAS i DIRBE smješteni unutar kriostata koji pomoću tekućeg helija održava temperaturu od 1.4 K, dok je DMR smješten na vanjskom dijelu satelita. Originalno je satelit u kružnu orbitu na visini od 560 milja trebala ponijeti raketa Delta, da bi NASA tražila promjenu dizajna satelita, kako bi se u orbitu lansirao putem Shuttlea. Konačno, nakon obustavljanja letova Shuttlea uslijed tragedije izazvane eksplozijom Challengera u siječnju 1986. godine, satelit je trebalo znatno olakšati da bi se projekt mogao vratiti na raketu Delta, i to na zadnji let te rakete. Nakon svih peripetija i rizika lansiranja, nakon ukupno 15 godina priprema, COBE je konačno sa zebnjom lansiran u studenom 1989. Njegova uspješna misija trajala je po planu do 1993. godine.

COBE-ovi rezultati i njihov značaj

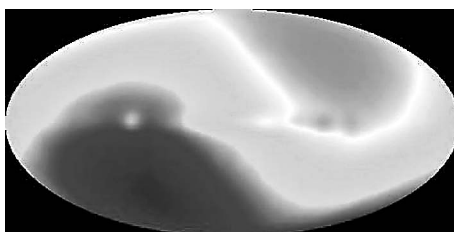
Pri dizajniranju projekta, velika je pažnja posvećena smještanju satelita u kružnu polarnu orbitu iz koje bi se moglo precizno izučavati cijelo nebo. Nakon što je to uspješno obavljeno, instrumentu FIRAS trebalo je samo devet minuta da isporuči mjerenje spektra zračenja crnog tijela (slika 2), najsavršenijeg do tada izmjerenog, temperature 2.725 $\pm$ 0.002 K. Takvu preciznost omogućilo je FIRAS-ovo referentno crno tijelo velike apsorptivne moći, od preko 99.99% (crno tijelo po definiciji apsorbira svu svjetlost koja do njega dođe). FIRAS je pokrivao spektar od 0.1 mm do 10 mm i radio je sve dok je bilo dovoljno tekućeg helija (do rujna 1990., do kada je prošao cijelim nebom 1.6 puta).



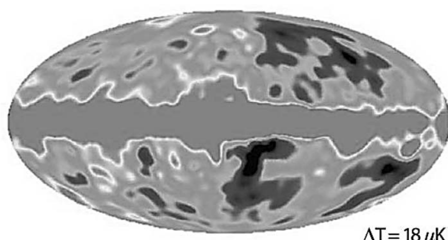
Spektar FIRASa (frekvencija u odnosu na intenzitet)
s pogreškama mjerenja uvećanim 400 puta

Slika 2. Spektar pozadinskog zračenja kojega je izmjerio COBE-ov instrument FIRAS, najsavršeniji je ikad izmjereni spektar crnog tijela (pogreške mjerenja povećane su na slici 400 puta).

Za izučavanje anizotropija trebalo je više vremena. Na temelju podataka skupljanih tijekom prvih šest mjeseci izmjerena je savršena dipolna anizotropija (slika 3). No kad je ona izuzeta iz pozadine, preostatak je bio izotropan. Tek nakon analize jednogodišnjih podataka počela se nazirati dodatna anizotropija (slika 4). Opažene temperaturne varijacije od 18 μK u skladu su s očekivanjem temeljenim na modelu Velikog praska, ukoliko uz "običnu" tvar postoji i nevidljiva "nebarionska" tvar. Važnost ovih mjerenja očituje se posebno u mogućnosti da se, u kombinaciji s ostalim mjerenjima, neizravno odrede gustoće različitih tvari i energije u svemiru. To je učinilo COBE prekretnicom prema kozmologiji kao preciznoj znanosti: teorijski kozmološki proračuni su se mogli usporediti sa stvarnim mjerenjima! Mjerenja su provođena kroz četiri godine opažanja, tijekom kojih je DMR u različitom poretku šest puta oslikao cijelo nebo. Podaci COBE-a skupljani su kroz šest "rogova" koji su brisali po svim smjerovima neba. Istodobnom uporabom nekoliko rogova, moglo se mjeriti nekoliko smjerova od po sedam lučnih stupnjeva, tako da se moglo usporediti njihove temperature međusobno, ali i s prosječnom temperaturom cijelog neba. U kasnijem pokusu WMAP (Wilkinson Microwave Anisotropy Probe) upotrijebljeni su rogovi s manjim kutom otvora, koji su omogućili bolju rezoluciju. Tople i hladne mrlje koje je na karti neba iscrtalo mjerenje DMR-a ocijenjene su kao najstarije opažene strukture. Uočljivo je da njihove dimenzije znatno premašuju one od jednog lučnog stupnja, unutar kojega bi to područje u prošlosti moglo biti kauzalno povezano i gdje bi temperatura bila izjednačena. Odgovor na ovu zagonetku nudi Veliki prasak praćen inflacijom ("inflacijski svemir"): Eksponencijalno brza ekspanzija iz ranog svemira preslikava ga na područja neba koja su prividno kauzalno nepoveziva.



Slika 3. Izmjerena dipolna anizotropija, koja dolazi od gibanja Zemlje, odnosno Sunčevog sustava, kroz pozadinsko zračenje stvoreno tijekom Velikog praska.



Slika 4. DMR-om izmjerene temperaturne varijacije otvorile su novu eru kozmoloških mjerenja. Na slici je isključeno područje galaktičkog diska Mliječne staze. Kao zanimljivost navedimo da je u galaktičkom području McKellar još 1941. godine našao pobuđena stanja CN molekule koja odgovaraju temperaturi 2.3 K, no nije bio svjestan značenja tog otkrića.

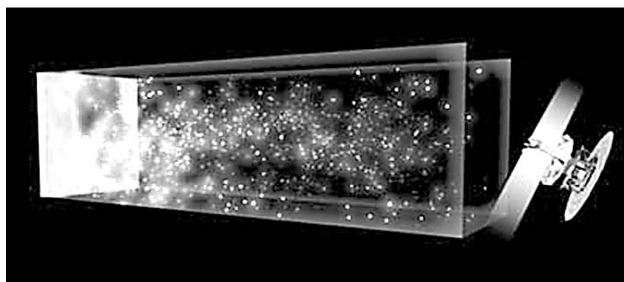
Da bi bilo jasno značenje tih rezultata, podsjetimo se osnovnih činjenica vezanih uz CMB kao potvrdu Velikog praska. Porijeklo CMB-a je u ekstremno vrućoj i gustoj ranoj fazi svemira, u kojoj se fotoni stvaraju u anihilacijama čestica i antičestica. Tako stvorena fotonska kupelj ekspanzijom svemira se hladi. Pri tome je ona neznatno kontaminirana neizanihiliranom materijom. Naime, mjerena entropija svemira S dana je opaženim omjerom bariona i fotona, $S = 5 \cdot 10^{-10}$. To govori da na svakih pet milijardi antikvarkova imamo višak od jednog kvarka, što daje preostalu tvar od koje će se formirati zvijezde i galaktike. Važni kozmički trenutak odnosi se na otprilike 380 000 godina starosti svemira, kad temperatura fotonske kupelji padne na 3000 K. Tu, naime, dolazi do vezanja elektrona i protona u električki neutralne vodikove atome pa se fotoni konačno mogu slobodno širiti. CMB dolazi od te kozmičke fotosfere u potpunoj analogiji s fotonima koji dolaze tek s površine Sunca, unutar kojeg u "raspršenjima" prosječno lutaju stotinu tisuća godina. Svemirska površina "zadnjih raspršenja" predstavlja zid neprozirnosti koji nas sprječava da putem fotona gledamo u raniji svemir. No same mrlje, koje je po prvi put razotkrio COBE, ipak otvaraju pogled u raniji svemir. One potječu otprilike iz vremena 100 000 godina starosti svemira, s tim da bi ta slika varijacija mogla biti zapisana još u prvim trenucima stvaranja svemira.

Ne čudi da je takvo COBE-ovo otkriće povuklo za sobom kako teorijska istraživanja mogućnosti testiranja kozmoloških modela i određivanja kozmoloških parametara, tako i nove eksperimentalne misije. Posebice su pokusi s balonima (MAXIMA i BOOMERANG) nastavili s izučavanjima anizotropija na manjim kutovima. Ustanovljeni "prvi akustični vrh", na jednom lučnom stupnju, svojom je lokacijom utvrdio do na nekoliko postotaka da je geometrija svemira ravna (da se paralelni pravci neće presjeći ni na kozmološkim udaljenostima). Širina tog vrha dala je potporu inflacijskom ranom svemiru (da se Veliki prasak na samom početku odvija ekstremno brzom ekspanzijom). Dodatni opaženi vrhovi odgovaraju teorijski izučenim mehanizmima gravitacijskih nestabilnosti i ukazuju da barionska tvar u svemiru predstavlja samo 5% tvari potrebne da svemir učini ravnim. Još spektakularniji rezultati dolaze sa spomenute NASA-ine WMAP misije, koja je po osoblju i dizajnu izravni sljedbenik COBE-ovog DMR-a. Analize prve godine (vidjeti dolje citirani članak K. Kumeričkog) odnosile su se na dvostruko prolaženje cijelim nebom, koje se kao sfera opisuje tzv. sfernim funkcijama:

- Najniža, $l = 0$ "monopolna" komponenta odgovara srednjoj temperaturi CMB-a 2.725 ± 0.001 K, što po Planckovom zakonu zračenja odgovara gustoći broja fotona $n_\gamma = 411\ \mathrm{cm}^{-3}$ i gustoći energije $\rho_\gamma = 0.260\ \mathrm{eV\,cm}^{-3}$.
- Najveća anizotropija, dipol $l = 1$ s amplitudom 3.346 ± 0.017 mK, odgovara spomenutom gibanju Sunca kroz CMB, brzinom $v = 368 \pm 2\ \mathrm{km\,s}^{-1}$.

Viši multipoli se mogu povezati s raznim kozmološkim parametrima i nakon prvih analiza objavljenih u veljači 2003., s nestrpljenjem se čekalo do ožujka ove godine na objavljivanje rezultata za tri godine WMAP-a. U kombinaciji s rezultatima drugih eksperimenata, određeni su glavni kozmološki parametri u scenariju koji uključuje i tamnu materiju i kozmološku konstantu:

- Starost svemira je 13.8 milijardi godina, a njegovo širenje je dano Hubbleovom konstantom, $H_0 = 71 \pm 2$ km/ s/ Mpc.
- U sastav svemira ulazi $4.4 \pm 0.3\%$ obične (barionske) materije koju uglavnom čine atomi, a ostatak materije otpada na hladnu tamnu tvar nepoznate prirode ($22 \pm 2\%$).
- Ostatak inventara sačinjava još zagonetnija tamna energija ($74 \pm 2\%$), za koju istraživanja supernova daju uvjet na jednadžbu stanja ($w = -0.97 \pm 0.08$), konzistentnu s kozmološkom konstantom kojoj odgovara energija kvantno-mehaničkog vakuuma.



Slika 5. WMAP satelitsko mjerenje bilježi već spomenuto mreškanje pozadinskog zračenja, anizotropiju na razini jednog dijela u sto tisuća.

Tamna energija je i prirodni kandidat za pogonitelja inflacije pri samom početku svemira, da bi imali smislenu sliku svemira Velikog praska. Sama inflacija pak, nudi objašnjenje za porijeklo anizotropija koje je po prvi put izmjerio COBE. Istodobno inflacija neočekivano nudi odgovor i na (sve do nje) otvoreno pitanje porijekla opaženih astronomskih struktura. Potrebne nehomogenosti oko kojih su se mogle formirati takve strukture, inflacija nalazi u kvantnim fluktuacijama pri samom početku svemira (slika 5). Inflacija strahovito brzom ekspanzijom donosi te mikroskopske fluktuacije na makroskopske dimenzije svemira. One su tamo posijane kao sjeme nakupljanja makroskopske tvari, kako je to prikazano na slici s naslovnice. Zapanjujuće otkriće COBE-a, da je vidljivi astronomski svijet preslika kvantnog svijeta sa samog početka svemira, je, po riječima Stephena Hawkinga, "najveće otkriće stoljeća, ako ne i svih vremena".

Literatura

[1] `http://nobelprize.org/`

[2] E-škola – Fizika svemira, `http://eskola.hfd.hr/fizika_svemira/svemir.html`

[3] Krešimir Kumerički, *Nova mjerenja kozmičkog pozadinskog zračenja*, Matematičko-fizički list LIII (2003), 4, 278

[4] Ivica Picek, *Moderna kozmologija – trijumf i izazov fizike*, prilog za simpozij HAZU posvećen Godini fizike, 2005. (`http://www.phy.hr/~picek/Picek_HAZU05.pdf`)



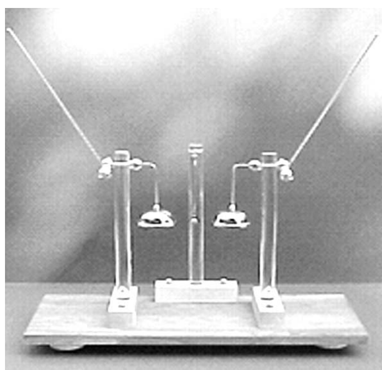
IZ MOJE RADIONICE I LABORATORIJA

Period titranja elektrostatskog njihala

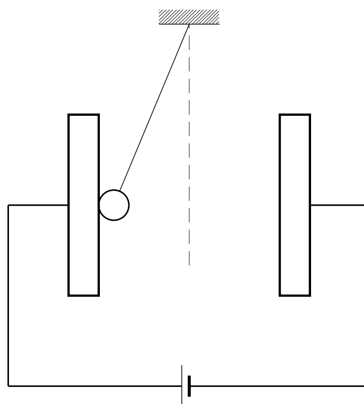
Stjepan Vučković, Zagreb

Uvod

Prvi čovjek koji je pronašao praktičnu primjenu jednog elektrostatskog njihala bio je Benjamin Franklin. Njemu su kao dvije metalne ploče služila dva zvona (slika 1) između kojih je bila obješena malena metalna kuglica. Jedno zvono je spojio s visokim metalnim štapom na svom dimnjaku, a drugo je spojio sa zemljom. Kada je u zraku bilo puno elektriciteta, odnosno kada se bližila oluja kuglica je počela oscilirati između zvona proizvodeći pritom zvonjavu i upozoravajući na oluju.



Slika 1. Franklinova zvona.

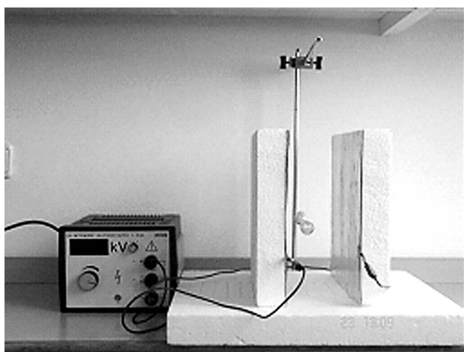


Slika 2. Skica elektrostatskog njihala.

Ovdje ćemo opisati kako napraviti elektrostatsko njihalo u školi. Prikazat ćemo pojednostavnjeni teorijski model za određivanje perioda T elektrostatskog njihala i diskutirati o kojim parametrima ovisi period titranja T takvog njihala. Usporedba eksperimentalnih rezultata s teorijskim modelom pokazuje iznenađujuće dobro slaganje.

Opis elektrostatskog njihala i eksperimenta

Naše elektrostatsko njihalo je bila plastična kuglica umotana u aluminijsku foliju i obješena na ribički najlon, u sredinu, između dvije paralelne metalne ploče koje su stalno bile spojene na izvor istosmjernog napona (slika 3). Osnovni dijelovi:



Sika 3. Fotografija aparature.

Aluminijske ploče. Koristili smo tanke aluminijske ploče u obliku kvadrata. Imali smo dvije dimenzije ploča: duljine stranica 0.15 m i 0.30 m. Aluminijske ploče smo zalijepili na ploče stiropora (tvrdi građevinski stiropor debljine 5 cm) da ih učvrstimo, i postavili okomito na još jednu veliku ploču od stiropora. Na njoj smo izbušili rupe i drvenim štapićima učvrstili ploče.

Kuglice. Nabavili smo tri potpuno jednake šuplje plastične kuglice u koje smo uštrcali različite količine tekućeg silikona, koji se stvrdne na zraku, te smo tako dobili tri različite mase: 0.0019 kg, 0.0054 kg, 0.0075 kg.

Izvor. Za dobivanje homogenog elektrostatskog polja koristili smo istosmjerni izvor napona koji je imao mogućnost regulacije napona na 0.1 kV do 8 kV. Ploče smo vodičima i krokodilkama spojili s izvorom. Na izvoru smo odmah očitavali i veličinu napona. Za provjeru spojili smo voltmetar paralelno s pločama da vidimo imamo li gubitaka, no pokazalo se da taj voltmetar i izvor pokazuju potpuno iste vrijednosti. Izvršen je veliki broj mjerenja perioda T variranjem sljedećih parametara:

— mase kuglica: 0.0019 kg, 0.0054 kg, 0.0075 kg;

— duljine niti: 0.2 m, 0.3 m, 0.4 m;

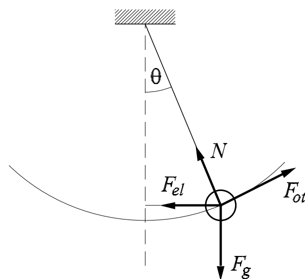
— razmak ploča: 0.075 m, 0.125 m, 0.175 m;

— brid ploča: 0.15 m, 0.3 m;

napon: od 2 kV do 8 kV s razmakom od 0.5 kV (13 različitih vrijednosti napona).

Teorijski model elektrostatskog njihala

Gibanje elektrostatskog njihala odvija se pod utjecajem četiri sile: gravitacijske sile, elektrostatske sile, sile napetosti niti i sile otpora zraka. U daljnjim razmatranjima zanemarit ćemo silu otpora zraka. Dakle, komponente u smjeru gibanja imaju dvije sile: elektrostatsku silu i gravitacijsku silu (slika 4).



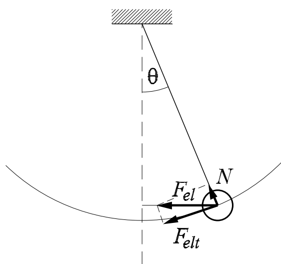
Slika 4. Sile koje djeluju na kuglicu.

Elektrostatska sila

Kad naelektriziramo ploče, odnosno kad ih priključimo na napon, između njih se javlja homogeno električno polje $\vec{E}$. To polje će na svaki naboj q, koji se nađe u njemu, djelovati elektrostatskom silom $F_{el} = qE$.

Pretpostavimo da se nenabijena metalna kuglica nalazi točno u sredini tj. na jednakoj udaljenosti između obiju ploča. Zbog influencije dolazi do razdvajanja naboja na kuglici

i to tako da onaj dio kuglice koji je bliže pozitivnoj ploči ima višak negativnog naboja, a onaj dio koji je bliže negativnoj ploči ima višak pozitivnog naboja.



Sika 5. Komponente elektrostatske sile.

Naboj se rasporedi tako da ukupno električno polje unutar kuglice bude jednako nuli, a potencijal na površini konstantan. Polje djeluje na kuglicu dvjema elektrostatskim silama koje imaju smjer polja, jednakog su iznosa, ali suprotne orijentacije pa se poništavaju. To je razlog zašto kuglica u početku miruje. Čim se kuglica malo pomakne iz središnjeg položaja, nestaje ravnoteže i sile više nisu jednakog iznosa, pa bliža ploča počne privlačiti kuglicu. Ona dodiruje ploču i s njom izmjenjuje naboj, tj. sad je nabijena nabojem istog predznaka kao i ploča i giba se ubrzano prema drugoj ploči. Za izračun elektrostatske sile potrebno je znati iznos naboja koji prijeđe s ploče na kuglicu. Poznato je da naboj prelazi s tijela na tijelo dok se ne izjednače potencijali. Kada nenabijena kuglica dodirne ploču, ona primi naboj istog predznaka kao što je predznak naboja na ploči koju je dodirnula. Pri tome kuglica primi toliki naboj da se izjednače potencijal kuglice i ploče.

Kuglica ima kapacitet $C = \dfrac{q}{\varphi}$, gdje je φ potencijal kuglice, i on iznosi $\varphi = k\dfrac{q}{r}$, pri čemu je $k = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}$ elektrostatička ili Coulombova konstanta, q je naboj kuglice, a r njezin radijus. Kada se izraz za potencijal kuglice uvrsti u izraz za kapacitet kuglice dobivamo kapacitet $C = 4\pi\varepsilon_0 r$, a naboj kuglice

$$q = 4\pi\varepsilon_0 r\varphi. \tag{1}$$

Budući da je U razlika potencijala između ploča, ako uzmemo da je potencijal točno u sredini između ploča jednak nuli, tada jedna ploča ima potencijal $\varphi_1 = -\dfrac{U}{2}$, a druga $\varphi_2 = +\dfrac{U}{2}$. Uvrštavanjem u formulu (1) dobivamo:

$$q = 2\pi\varepsilon_0 rU. \tag{2}$$

Iz te konačne formule vidimo da je naboj na kuglici proporcionalan s naponom tj. što je razlika između potencijala ploča veća to je naboj kuglice veći.

Kako je elektrostaska sila $F_{el} = qE$, a električno polje $E = \dfrac{U}{d}$, uvrštavanjem izraza za naboj dobijemo:

$$F_{el} = 2\pi\varepsilon_0 r\frac{U^2}{d}. \tag{3}$$

Budući da su ploče stalno spojene na izvor konstantnog napona, onaj koji će kuglica prenijeti s jedne ploče na drugu, ponovo će dobiti iz izvora i time smo zapravo dobili konstantno električno polje, a time i konstantnu elektrostatsku silu.

Već smo rekli da ona djeluje u smjeru silnica tj. okomita je na smjer ploča. No, kako je naša kuglica obješena o nit, ona se giba po kružnom luku. U smjeru gibanja djeluje tangencijalna komponenta elektrostatske sile F_{elt} (slika 5). Njezin iznos je u svakom trenutku: $F_{elt} = F_{el}\cos\theta$.

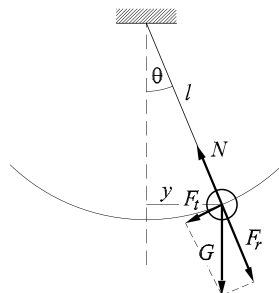
Za male amplitude je $\cos\theta \approx 1$. Stoga možemo pisati da je $F_{elt} = F_{el}$. Iz toga zaključujemo da je elektrostatska sila koja djeluje na kuglicu konstantna i dana izrazom (3).

Gravitacijska sila

Na slici 6 vidimo da je tangencijalna komponenta gravitacijske sile $F_t = -mg\sin\theta$. Sila je usmjerena tako da nastoji smanjiti kut θ. Ponovo ćemo uvesti aproksimaciju, tj. put (luk) koji kuglica prođe od ravnotežnog položaja do maksimalne elongacije zamijenit ćemo duljinom y.

Budući da je $\sin\theta = \frac{y}{l}$ (slika 6), pri čemu je l duljina niti na kojoj visi kuglica, formula za komponentu gravitacijske sile u smjeru gibanja je:

$$F = -\frac{mgy}{l}. \tag{4}$$



Slika 6. Komponente gravitacijske sile

Ta sila nije stalna već je proporcionalna pomaku iz ravnotežnog položaja (y).

Period titranja

Uz aproksimacije opisane u prethodnom poglavlju jednadžba gibanja (2. Newtonov zakon) za to titranje glasi

$$ma = F_e - \frac{mg}{l}y. \tag{5}$$

Za izvod ove formule smo koristili malo složeniji matematički postupak pa on zato ovdje nije naveden. Konačna formula je

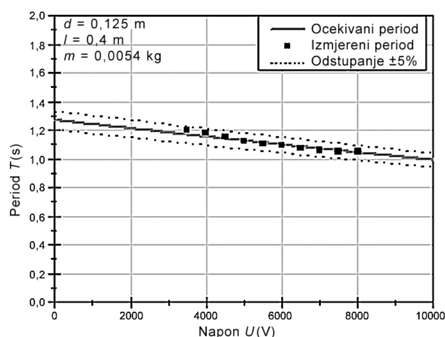
$$T = 2 \cdot \sqrt{\frac{l}{g}} \arccos \frac{4\pi\varepsilon_0 r U^2 l - mg\,(d-2r)^2}{4\pi\varepsilon_0 r U^2 l + mg\,(d-2r)^2}. \tag{6}$$

Formula (6) pokazuje da period ovisi o duljini njihala l, naponu na pločama U, radijusu kuglice r, masi kuglice m i udaljenosti među pločama d. U našem eksperimentu detaljno smo proučavali kako period ovisi o l, m, U i d, a ovdje ćemo samo prikazati ovisnost o naponu U. Prvo primijetimo da iz formule (6) slijedi da će u slučaju odsustva napona, tj. električnog polja, biti

$$T = T_0 = 2 \cdot \sqrt{\frac{l}{g}} \arccos(-1) = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}},$$

što odgovara periodu titranja običnog, matematičkog njihala. Za bilo koju vrijednost napona $U \neq 0$ period će biti manji od T_0. To je i logično, jer pri pojavi elektrostatske sile veća sila djeluje na kuglicu te je i vrijeme prelaska od jedne ploče do druge kraće.

Za područje napona od 0 do 10 000 V model predviđa skoro linearni pad perioda s naponom, a rezultati se slažu s modelom gotovo idealno (slika 7).



Slika 7. Ovisnost perioda o naponu.

Zaključak

S obzirom na mnoge aproksimacije uvedene tijekom eksperimenta možemo zaključiti da su rezultati vrlo dobri. Odstupanja su minimalna, a njihov uzrok možemo tražiti u uvedenim aproksimacijama. Kao praktičnu primjenu ovog njihala možemo navesti visoko naponski voltmetar. Mjerenjem perioda titranja njihala pomoću formule (3) moguće je odrediti napon na koji su ploče priključene. Kao prednost ovog eksperimenta ističemo jednostavnost pripreme (jeftin materijal) te se na ovom primjeru može tumačiti zakon očuvanja naboja.

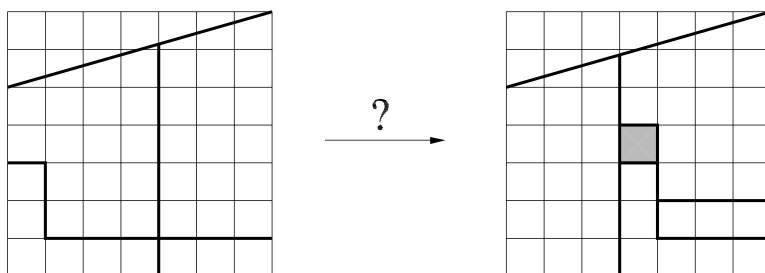
Literatura

[1] NADA BRKOVIĆ, *Fizika 3, udžbenik fizike za treći razred gimnazija*, Luk Zagreb, 1999.

[2] EDWARD M. PURCELL, *Elektricitet i magnetizam, udžbenik fizike Sveučilišta u Berkleyu*, svezak 2, Tehnička knjiga, Zagreb

[3] B. P. DEMIDOVIĆ, *Zadaci i riješeni primjeri iz matematičke analize za tehničke fakultete*, DANJAR d.o.o., Zagreb 1995.

⋆ ⋆ ⋆



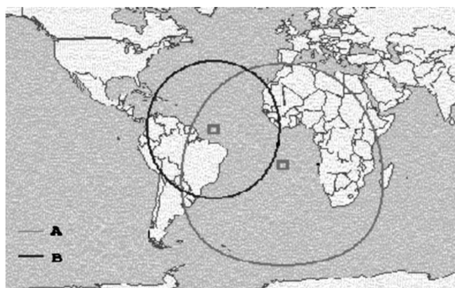


ASTRONOMIJA

Navigacijska astronomija

Matko Milin[1], *Zagreb*

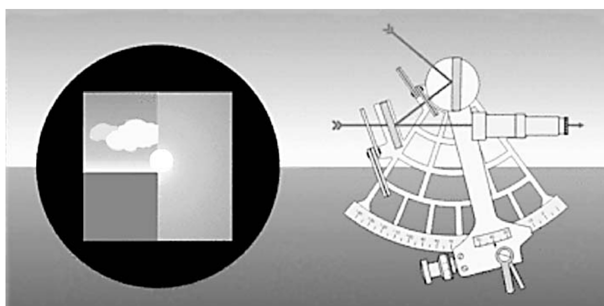
Navigacijska (ili pozicijska) astronomija je tehnika određivanja položaja na Zemlji upotrebom nebeskih objekata: Sunca, Mjeseca, planeta ili zvijezda. Princip metode baziran je na mjerenju kutova pod kojim se više objekata vidi nad horizontom, iz kojih se geometrijskim ili računalnim postupkom određuju geografska širina i dužina (vidi sliku 1). Kut pod kojim se objekt vidi nad horizontom mjeri se specijalno dizajniranim instrumentima, najčešće sekstantom (vidi sliku 2). Sama tehnika računanja uključuje poznavanje sferne trigonemetrije (budući da je površina Zemlje približno kugla), što je bitno kompliciranije od "obične" trigonometrije.



Slika 1. Princip određivanja položaja promatrača mjerenjem kuta nekog objekta na nebu. Za svaki od mjerenih objekata ("A" i "B" na slici mogu biti, recimo, Sunce i Mjesec), znamo iznad koje točke na površini Zemlje se u danom trenutku nalazi (to se iščitava iz tablica u nautičkim godišnjacima). Te su točke na slici dane malenim kvadratima. Mjerenje kuta pod kojim dani objekt vidimo na nebu, definira tada kružnicu oko tih točaka, a na kojoj se promatrač u tom trenutku mora nalaziti. Presjecište dvije takve kružnice posve određuje položaj promatrača. Zapravo, postoje dva presjecišta, ali pretpostavlja se da promatrač ipak zna u kojem dijelu svijeta se nalazi – ako ipak ne zna, problem rješava mjerenje kuta pod kojim se vidi još jedan, treći, nebeski objekt.

Nautički godišnjaci navode koordinate nebeskih tijela za svaki puni sat u godini (!) te način interpolacije za vremena između punog sata. Najdulju tradiciju ima britanski godišnjak koji izdaje "Her Majesty's Nautical Almanac Office", svake godine od davne 1767. Moderni godišnjaci navode podatke za 173 zvijezde, ali se u principu samo njih 57 koristi kao "navigacijske zvijezde". U praksi se po noći za navigaciju obično koristi više najsjajnijih vidljivih zvijezda; godišnjaci ih navode 57, za slučajeve kada se na nebu zbog oblačnog vremena ne vide "standardne" najsjajnije zvijezde.

[1] matko.milin@phy.hr, Prirodoslovno-matematički fakultet Sveučilišta u Zagrebu



Slika 2. Sekstant (desno) i slika koja se kroz njega vidi (lijevo) pri određivanju položaja Sunca. Princip rada je sljedeći: slika objekta na nebu se odbijanjem od dva zrcala ("dvostruka refleksija") dovodi u okular zajedno sa slikom horizonta. Kut za koji se pri tome jedno od zrcala mora zarotirati direktno je povezan s kutom pod kojim pada zraka svjetlosti s promatranog objekta. U trenutku kada je objekt u okularu "na horizontu" (lijeva slika), na donjem se dijelu sekstanta jednostavno očitava traženi kut nebeskog objekta nad horizontom.

Sekstant je instrument kojim se određuje kut pod kojim se neko nebesko tijelo vidi nad horizontom. Iako je još slavni Isaac Newton prvi otkrio princip rada dvostruko reflektirajućeg navigacijskog instrumenta, sekstant je u upotrebu ušao tek u prvoj polovici 18. stoljeća. Praktičnost instrumenta je ta da položaj mjeri relativno u odnosu na horizont. Dvostruka refleksija na kojoj je bazirana metoda poništava gibanje sekstanta, što je bitno za mjerenja na brodu. Ime "sekstant" posljedica je činjenice da se s njime može mjeriti kut jednak jednoj šestini punog kruga (60°). Danas je jedina prednost sekstanta u odnosu na druge metode ta da je nepotreban izvor električnog napajanja. Zbog toga se tradicionalna, gore opisana, metoda još uvijek uči da bi se mogla upotrijebiti u specijalnim slučajevima.

Navigacijska astronomija danas sve više biva potisnuta modernim tehnologijama lociranja pozicije, kao što je GPS (od *engl.* Global Positioning System). GPS koristi oko 25 satelita koji kruže po šest različitih orbita oko Zemlje na visini od oko 20 000 km (stari sateliti se redovito zamjenjuju novima pa njihov broj tijekom vremena varira od 24 do 27). Svaki od satelita emitira radiosignal koji sadrži informaciju o njegovoj lokaciji i trenutku emitiranja. Pozicija se određuje istodobnim mjerenjem udaljenosti od GPS-uređaja na Zemlji do više satelita (a ta se udaljenost dobiva mjerenjem vremena potrebnog radiosignalu da dođe od satelita do uređaja). Radi efekata prolaska signala kroz ionosferu (koji ovisi o kutu pod kojim se u odnosu na promatrača nalazi satelit), za precizno je mjerenje obično potrebno detektirati signal s najmanje četiri satelita. Točnost kojom GPS određuje položaj je zapanjujuća: greška je najčešće manja od par metara! Osim određivanja geografske širine i dužine, GPS-om se jednako precizno određuje i nadmorska visina pa njegova primjena, dakako, nije ograničena na nautiku. U bliskoj budućnosti (2010. godine) istom metodom moći će se još točnije odrediti položaj: Europska unija naime planira realizaciju sustava "Galileo", koji bi se sastojao od 30 modernih satelita vrijednih oko 2.5 milijarde EUR-a. Realizacijom tih projekata, navigacijska astronomija postaje sve više hobi zaljubljenika u nebo, a sve manje metoda kojom se svakodnevno pomorci služe u praksi.

ZABAVNA MATEMATIKA

Broj 2007

Na zadnjem satu matematike pred Novu godinu 2007. profesor Godinić bio je vidno raspoložen. Nije bilo testova, nije bilo ispitivanja, već su učenici rješavali zadatke iz zabavne matematike i uz njih se i sami ugodno zabavljali. Za zadnji zadatak poslušajmo profesora:

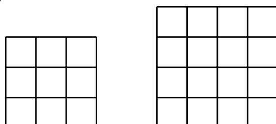
— Što nam donosi 2007. godina? Hoće li biti sretna ili nesretna? Vjerojatno bit će pomalo i jedno i drugo. Zato evo postavljam vam jedan "sretno-nesretan" problem. Možete li pronaći najjednostavniji prikaz broja 2007 pomoću "sretnog" broja 7, "nesretnog" broja 13 i računskih operacija? Bez uporabe zagrada, molim!

2007

Eto posla i za vas!

Kvadrati

Dane kvadrate 3×3 i 4×4 trebate razdijeliti na dijelove i od svih tih dijelova sastaviti kvadrat 5×5. Očigledno je to moguće učiniti s 25 dijelova, ali je isto tako očigledno da to nije najmanji mogući broj. Postoji nekoliko podjela sa samo četiri dijela.



Uvjerite se u takvu podjelu, a onda odredite najmanji mogući broj sastavnih dijelova uz uvjet da je svaki dio u podjeli i sam kvadrat.

Športaši

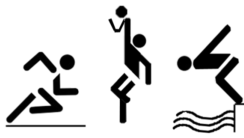
Tri prijatelja s nadimcima Kvrga, Nosko i Suhi dobri su športaši. Jedan je atletičar, drugi košarkaš, a treći plivač. Nedavno su sudjelovali na po jednom natjecanju u inozemstvu. Gradovi domaćini su bili Atena, London i Toronto. Odlomci iz intervjua:

1) Atletičar još uvijek pamti londonsku maglu.

2) Nosko se tek nakon napornog treninga smoči u bazenu.

3) Rekvizit Suhog je okrugao i želja mu je da jednom vidi Toronto.

4) Plivač nikad nije putovao niti brodom niti avionom.



Recite kojim se športom bavi svaki od prijatelja i gdje se nedavno natjecao.

Tajanstveni broj

Četveroznamenkasti broj $\overline{abcd}$ ima sljedeća svojstva:

Zbroj znamenaka broja jednak je 20. Ako se zamijene znamenke a i b, dobiva se za 900 veći broj. Ako se zamijene znamenke b i c, dobiva se za 630 manji broj. Ako se zamijene znamenke c i d, dobiva se za 27 veći broj.

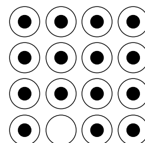
a	b	c	d

O kojem je broju riječ?

Preskakivanje pločica

I profesor Pločar voli zabavnu matematiku. Evo njegovog zadatka iz tog područja:

— Pogledajte pažljivo donji crtež sa 16 kružića. U 15 kružića nalaze se crne kružne pločice, a samo je jedan prazan. Preskakivanjem pločica vodoravno ili okomito preko susjednih pločica na slobodno polje i skidanjem preskočenih pločica treba postići to da nakon 14. skoka ostane samo jedna pločica.



Jeste li uspjeli?

Zdravko Kurnik



ZADACI I RJEŠENJA

Redakcija, iz tehničkih razloga, daje ovo upozorenje:

Krajnji rok za primanje rješenja iz ovog broja je 28. veljače 2007. Rješenja (i imena rješavatelja) bit će objavljena u br. 4/ 228.

Ujedno molimo da pripazite na upute rješavateljima koje su na dnu treće strane omota.[1]

A) Zadaci iz matematike

3021.* Dokaži da za svake pozitivne brojeve a, b, c vrijedi nejednakost

$$a^2(b+c-a)+b^2(c+a-b)+c^2(a+b-c) \leqslant 3abc.$$

3022. Ako je $a<b$, $c<d$ i

$$a^2+b^2=c^2+d^2,$$
$$a+b+c+d=0,$$

pokaži da je $c=-b$ i $d=-a$.

3023. Kružnim novčićem nacrtana je kružnica. Pomoću tog novčića konstruiraj dijametralno suprotnu točku dane točke na toj kružnici.

3024.* Zajednička tangenta kružnica k_1 i k_2 dira k_1 i točki P, a k_2 u točki Q. Kružnice k_1 i k_2 sijeku se u točkama M i N, pri čemu je N bliže pravcu PQ nego M. Pravac PN siječe kružnicu k_2 još i u točki R. Dokaži da je MQ simetrala kuta $\sphericalangle PMR$.

3025. Na stranicama $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DA}$ konveksnog četverokuta $ABCD$ površine P izabrane su točke M, N, P, Q tako da je

$$\frac{|AM|}{|AB|}=\frac{|CP|}{|CD|} \quad \text{i} \quad \frac{|BN|}{|BC|}=\frac{|DQ|}{|DA|}.$$

Nađi zbroj površina trokuta ABP, BCQ, CDM, DAN.

3026. Neka je $ABCD$ romb i M, N, P redom točke unutar stranica $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$. Dokaži da je težište trokuta MNP na pravcu AC ako i samo ako je $|AM|+|DP|=|BN|$.

3027. Neka su K, L, M nožišta visina trokuta ABC. Ako je O opseg trokuta KLM i P površina trokuta ABC, dokaži da je

$$P=\frac{O\cdot R}{2},$$

gdje je R polumjer trokutu ABC opisane kružnice.

3028. Dana su tri sukladna jednakostranična trokuta ABS, CDS i EFS. Dokaži da su polovišta dužina $\overline{BC}$, $\overline{DE}$, $\overline{FA}$ vrhovi jednakostraničnog trokuta.

3029. Dokaži da za svaki realan broj a i svaki prirodan broj n vrijede jednakosti

$$\sum_{k=0}^{n-1}\sin\left(a+\frac{2k\pi}{n}\right)=0,$$
$$\sum_{k=0}^{n-1}\cos\left(a+\frac{2k\pi}{n}\right)=0.$$

3030. Dani su brojevi $a,b,c\in(1,\infty)$. Dokaži nejednakost

$$\log_a^4 b+\log_b^4 c+\log_c^4 a \geqslant \log_a b+\log_b c+\log_c a.$$

3031. Na najvećoj stranici $\overline{AB}$ trokuta ABC dane su točke M i N, takve da je $|BM|=|BC|$ i $|AN|=|AC|$, te točke $P\in\overline{AC}$ i $Q\in\overline{BC}$, takve da je $PM\|BC$ i $QN\|AC$. Dokaži da je $|CP|=|CQ|$.

3032. Odredi sve prirodne brojeve n takve da je produkt svih (prirodnih) djelitelja od n jednak $2^3\cdot 3^6$.

3033. Odredi sumu

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{\binom{n}{k}}{\binom{2n-1}{k}}.$$

3034.* Ploča 9×9 je popločena pločicama 1×3, pri čemu svaka pločica može biti okrenuta horizontalno ili vertikalno. Dokaži da je broj horizontalnih pločica djeljiv s 3.

B) Zadaci iz fizike

OŠ – 238. Aluminijski valjak ima promjer 6 cm i visinu 8 cm. Kad ga se uroni u vodu on ostane na dubini na koju je uronjen. Izračunaj obujam šupljine unutar njega. Gustoća aluminija je 2 700 kg/ m^3, a vode 1 000 kg/ m^3.

[1] Zadaci označeni zvjezdicom predviđeni su prvenstveno za 15 – 16 godišnje učenike.

OŠ – 239. Koliko električne energije pretvori u toplinu električna žarulja snage 20 W za 3 sata? Njena korisnost je 40%. Izračunaj jakost električne struje koja teče žaruljom kad je ona spojena na napon 220 V.

OŠ – 240. Otpornici A i B su jednaki i spojeni serijski na izvor napona 24 V. Jakost struje koja teče tim strujnim krugom iznosi 800 mA. Ako želimo smanjiti jakost struje u tom krugu na 600 mA, zamjenom otpornika B, koliki mora biti otpor otpornika C koji bi došao na njegovo mjesto?

OŠ – 241. Sjemenke rogača su sve jednake i po njima je određena mjera za dragocjenost, karat. Karat ima 0.2 grama. Izračunaj obujam i gustoću sjemenke rogača ako je obujam 30 sjemenki 4.8 cm^3.

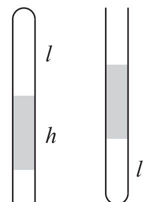
1350. Dva vlaka duljina 180 m i 120 m voze po paralelnim prugama. Kada voze u istom smjeru, dulji vlak pretiče kraći i putnik iz duljeg vlaka vidi kraći 80 s ako gleda kroz prozor okomito na smjer vožnje. Kada voze u suprotnom smjeru, putnik iz kraćeg vlaka vidi dulji 9 s. Kolike su brzine vlakova?

1351. Četiri homogene kocke gustoće ρ i duljine brida a slažemo jednu na drugu. Odredite koliko najviše gornja kocka može biti horizontalno pomaknuta u odnosu na najnižu, a da se one ne sruše.

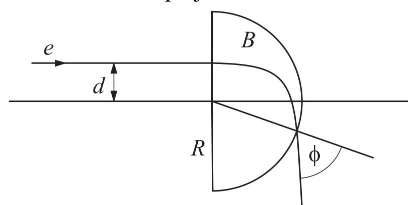
1352. Dizalo s teretom ukupne mase 8 t spušta se brzinom od 7.5 m/s. Maksimalno opterećenje užeta može biti 130 kN. Koliki je najkraći put zaustavljanja dizala?

1353. Opruga duljine L_0 ima velik broj identičnih zavoja. Ako je obješena za jedan kraj, njezina je duljina povećana 1.5 puta. Kolika će biti duljina opruge ako se postavi vertikalno u posudu punu vode tako da je opruga potpuno uronjena u vodu? Gustoća opruge je r (> 1) puta veća od gustoće vode.

1354. U cijevi koja je na jednom kraju zatvorena, ima zraka i žive (vidi sliku). Visina stupca zraka je l, a žive h. Kad se cijev preokrene, visina stupca zraka je l'. Gustoća žive je ρ_{Hg}. Koliki je atmosferski tlak?



1355. Elektron brzinom v ulazi u jednoliko magnetsko polje B okomito na smjer gibanja elektrona. Područje u kojem djeluje magnetsko polje ima polukružni presjek kao što je prikazano na slici. Odredite kut φ koji zatvara putanja elektrona na izlasku iz polja s okomicom na rub polja.



1356. Potrebno je zagrijati 300 l vode sa 7 °C na 40 °C. Koristi se peć na ugljen iskoristivosti 25%. Ugljen gorenjem daje 20 kJ/g, a toplinski kapacitet vode je 4.2 J/ kgK. Koliko je ugljena potrebno za zagrijavanje? Ako bi se umjesto ugljena koristila ista masa drva, na koju bi se temperaturu zagrijala voda? Drvo daje 3.5 kJ/g.

C) Rješenja iz matematike

2993. *Neka su a, b, c međusobno različiti brojevi. Može li izraz*
$$a^2(c-b)+b^2(a-c)+c^2(b-a)$$
biti jednak nuli?

Rješenje. Pretpostavimo da može. Tada vrijedi:

$$a^2(c-b)+b^2(a-c)+c^2(b-a)=0,$$
$$a^2c-a^2b+b^2a-b^2c+c^2b-c^2a=0,$$
$$a^2c-c^2a+b^2a-b^2c+c^2b-a^2b=0,$$
$$ac(a-c)+b^2(a-c)-b(a^2-c^2)=0,$$
$$ac(a-c)+b^2(a-c)-b(a-c)(a+c)=0,$$
$$(a-c)\Big[ac+b^2-b(a+c)\Big]=0,$$
$$(a-c)(ac+b^2-ab-bc)=0,$$

$$(a-c)(ac-bc+b^2-ab)=0,$$
$$(a-c)[c(a-b)-b(a-b)]=0,$$
$$(a-c)(a-b)(c-b)=0.$$
Tada vrijedi:
$$a-c=0 \quad \text{ili} \quad a-b=0 \quad \text{ili} \quad c-b=0$$
iz čega slijedi
$$a=c \quad \text{ili} \quad a=b \quad \text{ili} \quad c=b$$
što se protivi pretpostavci da su a, b i c međusobno različiti brojevi.

Prema tome izraz $a^2(c-b)+b^2(a-c)$ $+c^2(b-a)$ ne može biti jednak nuli.

Sara Muhvić (2), III. gimnazija, Osijek

2994. *Nađi sva rješenja sistema jednadžbi*
$$\frac{x_1}{x_1+1}=\frac{x_2}{x_2+3}=\frac{x_3}{x_3+5}=\ldots=\frac{x_{1001}}{x_{1001}+2001},$$
$$x_1+x_2+\ldots+x_{1001}=2002.$$

Rješenje.
$$\frac{x_1}{x_1+1}=\frac{x_2}{x_2+3}\Rightarrow x_2=3x_1$$
$$\frac{x_1}{x_1+1}=\frac{x_3}{x_2+5}\Rightarrow x_3=5x_1$$
$$\vdots$$
$$\frac{x_1}{x_1+1}=\frac{x_{1001}}{x_{1001}+2001}\Rightarrow x_{1001}=2001x_1$$
$$x_1+3x_1+5x_1+7x_1+\ldots+2001x_1=2002.$$
$$(1+3+5+7+\ldots+2001)x_1=2002.$$
$$\frac{2002\cdot 1001}{2}x_1=2002\Rightarrow x_1=\frac{2}{1001},$$
$$x_2=3x_1=\frac{6}{1001},$$
$$x_3=5x_1=\frac{10}{1001},$$
$$\vdots$$
$$x_{1001}=2001x_1=\frac{4002}{1001}.$$

Šimun Romić (3), Gimnazija Metković, Metković

2995. *U zavisnosti o realnom parametru a riješi sistem jednadžbi*
$$x^3+y^3=(a+1)^2(x+y),$$
$$x^2+y^2=2a^2.$$
Uz koje uvjete su rješenja realna?

Rješenje. Prva jednadžba se svodi na oblik
$$(x+y)\left(x^2-xy+y^2-(a+1)^2\right)=0. \quad (1)$$

1) Za $x+y=0$ imamo $y=-x$, a iz druge jednadžbe dobivamo $x^2=a^2$, $x=\pm a$, tj. $y=\mp a$.

2) Za $x+y\neq 0$ jednadžba (1) prelazi u
$$x^2-xy+y^2-(a+1)^2=0. \quad (2)$$
Uvrštavanjem $x^2+y^2=2a^2$ (2) prelazi u
$$2a^2-(a+1)^2=xy$$
tj.
$$xy=a^2-2a-1. \quad (3)$$
Iz druge jednadžbe imamo
$$(x+y)^2-2xy=2a^2$$
a odavde i iz (3)
$$(x+y)^2=4a^2-4a-2,$$
$$x+y=\pm\sqrt{4a^2-4a-2}.$$
Dakle, x i y su rješenja kvadratne jednadžbe
$$t^2\pm\sqrt{4a^2-4a-2}t+a^2-2a-1=0.$$
Njezina rješenja su
$$t_{1,2,3,4}=\frac{\mp\sqrt{4a^2-4a-2}\pm\sqrt{4a+2}}{2}.$$
Rješenja će biti realna ako je
$$4a^2-4a-2\geqslant 0$$
$$\Rightarrow a\in\left(-\infty,\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)\cup\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2},\infty\right)$$
$$4a+2\geqslant 0\Rightarrow a\geqslant -\frac{1}{2}.$$
Rješenja će biti realna ako je
$$a\in\left(-\frac{1}{2},\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)\cup\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2},\infty\right).$$

Gabrijel Guberović (2), Gimnazija Nova Gradiška, Nova Gradiška

2996. *Neka je z kompleksan broj modula 1. Za svaki $n\in\mathbf{N}$ dokaži nejednakost*
$$n|1+z|+|1+z^2|+\ldots+|1+z^{2n+1}|\geqslant 2n.$$

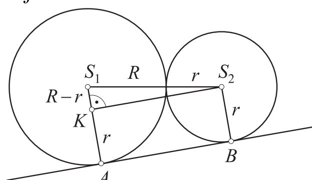
Rješenje.
$$n|1+z|+|1+z^2|+|1+z^3|+\ldots+n|1+z^{2n+1}|=$$
$$n|1+z|+\left(|1+z^2|+|1+z^3|\right)+\left(|1+z^4|+|1+z^5|\right)$$

$$+\ldots+\left(|1+z^{2n}|+|1+z^{2n+1}|\right)$$
$$\geqslant n|1+z|+|1+z^2-1-z^3|+|1+z^4-1-z^5|$$
$$+\ldots+|1+z^{2n}-1-z^{2n+1}|$$
$$=n|1+z|+|z^2||1-z|+|z^4||1-z|$$
$$+\ldots+|z^{2n}||1-z|$$
$$=n|1+z|+n|1-z|=n\left(|1+z|+|1-z|\right)$$
$$\geqslant n|1+z-1+z|\geqslant 2n|z|=2n$$

Ur.

2997. *Dvije kružnice polumjera r i R dodiruju se izvana. Odredi udaljenost dirališta vanjske tangente.*

Rješenje.

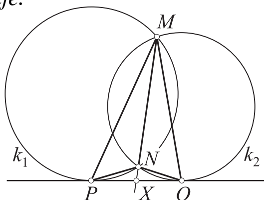


$$|AB|=?$$
$$\sphericalangle S_1AB=\sphericalangle S_2BA=\sphericalangle S_1KS_2=90^\circ$$
$$|AB|=|KS_2| \quad \text{(jer je } ABS_2K \text{ pravokutnik)}$$
$$|AB|^2=|S_1S_2|^2-|S_1K|^2,$$
$$|AB|^2=(R+r)^2-(R-r)^2,$$
$$|AB|=2\sqrt{Rr}.$$

Sara Muhvić (2),
III. gimnazija, Osijek

2998. *Kružnice k_1 i k_2 sijeku se u dvije različite točke M i N. Njihova zajednička tangenta dodiruje k_1 u P i k_2 u Q. Dokaži da trokuti MNP i MNQ imaju jednake površine.*

Rješenje.



Neka je X sjecište pravaca MN i PQ. Trebamo dokazati da je $|PX|=|QX|$, jer bi tada površine trokuta MXP i MXQ bile jednake, a kako su i površine trokuta NXP i NXQ jednake slijedilo bi i da su traženi trokuti MNP i MNQ jednakih površina.

Vrijedi:

$$\sphericalangle XMP=\sphericalangle XPN, \quad \triangle MXP\approx\triangle PXN,$$
$$\frac{|XP|}{|XM|}=\frac{|XN|}{|XP|}, \quad |XP|^2=|XN|\cdot|XM|.$$

Analogno, $\triangle MXQ\approx\triangle QXN$,

$$\frac{|XQ|}{|XM|}=\frac{|XN|}{|XQ|}, \quad |XQ|^2=|XN|\cdot|XM|.$$

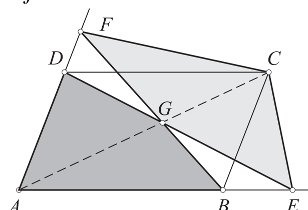
Dakle,

$$|XP|=|XQ|.$$

Ur.

2999. *Dan je paralelogram $ABCD$. Točka E je na pravcu AB tako da je B između A i E, a F na pravcu AD tako da je D između A i F. Nadalje, G je presjek pravaca DE i BF. Dokaži da su jednake površine četverokuta $ABGD$ i $CFGE$.*

Rješenje.



Neka su ispunjeni uvjeti zadatka i neka je $P_{ABCD}=P$. Tada je:

$$P_{ABG}+P_{CDG}=\frac{P}{2}=P_{BCG}+P_{DAG} \qquad (1)$$

(duljine osnovica trokuta jednake su duljini stranice paralelograma, a zbroj duljina visina trokuta na tu osnovicu jednaka je duljini visine paralelograma na tu osnovicu).

Nadalje je $P_{CDE}=\dfrac{P}{2}$, tj.

$$P_{CDG}+P_{CGE}=\frac{P}{2}. \qquad (2)$$

Iz (1) i (2) izlazi

$$P_{ABG}=P_{CGE}. \qquad (3)$$

Analogno izlazi

$$P_{AGD}=P_{GCF}. \qquad (4)$$

Iz (3) i (4) slijedi

$$P_{ABGD} = P_{ABG} + P_{AGD}$$
$$= P_{CGE} + P_{GCF} = P_{CFGD},$$

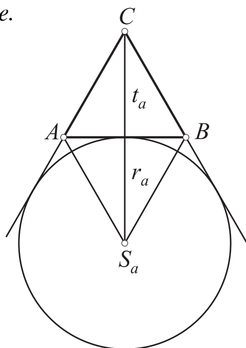
što se i tvrdilo.

Ur.

3000. *U danom trokutu t_a, t_b, t_c su duljine težišnica, a r_a, r_b, r_c duljine polumjera pripisanih kružnica. Dokaži da je trokut jednakostraničan ako i samo ako je*

$$\frac{1}{t_a^2} + \frac{1}{t_b^2} + \frac{1}{t_b^2} = \frac{1}{r_a^2} + \frac{1}{r_b^2} + \frac{1}{r_c^2}.$$

Rješenje.



Ako je trokut jednakostraničan tada je $t_a = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Nadalje, $\sphericalangle BAS_a = \sphericalangle S_aBA = 60°$, pa je $\triangle ABS_a$ jednakostraničan trokut stranice duljine a. Tada je $r_a = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} = t_a$. Stoga vrijedi dana jednakost.

Pretpostavimo da vrijedi dana jednakost. Dokazat ćemo da je trokut jednakostraničan svođenjem na kontradikciju. Pretpostavimo da trokut nije jednakostraničan. Neka je $b \neq c$. Tada je

$$t_a^2 = \frac{b^2+c^2}{2} - \frac{a^2}{4} = \frac{b^2+c^2}{4} + \frac{b^2+c^2}{4} - \frac{a^2}{4}$$
$$> \frac{b^2+c^2-a^2}{4} = s(s-a),$$

gdje je $s > \dfrac{a+b+c}{2}$. Slično se dobiva $t_b^2 > s(s-b)$, $t_c^2 > s(s-c)$. Slijedi,

$$\frac{1}{t_a^2} + \frac{1}{t_b^2} + \frac{1}{t_c^2} < \frac{1}{s}\left(\frac{1}{s-a} + \frac{1}{s-b} + \frac{1}{s-c}\right)$$
$$= \frac{-s^2+ab+bc+ca}{P^2}.$$

S druge strane

$$\frac{1}{r_a^2} + \frac{1}{r_b^2} + \frac{1}{r_c^2}$$
$$< \frac{1}{P^2}\left[(s-a)^2 + (s-b)^2 + (s-c)^2\right]$$
$$= \frac{-s^2+a^2+b^2+c^2}{P^2}.$$

Kako je $b \neq c$ vrijedi $ab+bc+ca < a^2+b^2+c^2$ tj.

$$\frac{1}{t_a^2} + \frac{1}{t_b^2} + \frac{1}{t_c^2} < \frac{1}{r_a^2} + \frac{1}{r_b^2} + \frac{1}{r_c^2},$$

što je u suprotnosti s pretpostavkom. Zato je pretpostavka pogrešna, tj. trokut je jednakostraničan.

Ur.

3001. *Točka P se nalazi na kružnici opisanoj oko pravilnog poligona $A_1A_2\ldots A_n$. Ortogonalne projekcije točke P na pravce na kojima leže njegove stranice označene su s P_1, P_2, $\ldots$, P_n. Dokaži da produkt*

$$\prod_{i=1}^{n} \frac{|PA_i|^2}{|PP_i|}$$

ne ovisi o izboru točke P.

Rješenje. U trokutu ABC s visinom duljine $|AA'|$ i polumjerom opisane kružnice R vrijedi jednakost

$$|AB| \cdot |AC| = 2R \cdot |AA'|. \qquad (1)$$

Dokažimo ovu jednakost.

Iz

$$\frac{|BC|}{\sin\alpha} = \frac{|AC|}{\sin\beta} = \frac{|AB|}{\sin\gamma} = 2R$$

i

$$|AA'| = |AB|\sin\beta = 2R\sin\gamma\sin\beta$$

dobivamo

$$|AB| \cdot |AC| = (2R)^2\sin\beta\sin\gamma,$$
$$2R \cdot |AA'| = 2R|AB|\sin\beta = (2R)^2\sin\beta\sin\gamma,$$

tj. vrijedi jednakost (1).

Neka je R polumjer opisane kružnice poligona $A_1A_2\ldots A_n$. Primjenom jednakosti (1) na trokute PA_iA_{i+1} (gdje je $A_{n+1} = A_1$) dobivamo

$$|PA_i| \cdot |PA_{i+1}| = 2R \cdot |PP_i|, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Množenjem ovih jednakosti slijedi

$$\prod_{i=1}^{n} \frac{|PA_i|^2}{|PP_i|} = 2^n R^n,$$

što je konstanta tj. ne ovisi o izboru točke P.

Ur.

3002. *Ako su α, β i γ kutovi trokuta, dokaži nejednakost*

$$\frac{\sqrt{\sin\alpha}}{\sqrt{\sin\beta}+\sqrt{\sin\gamma}-\sqrt{\sin\alpha}} + \frac{\sqrt{\sin\beta}}{\sqrt{\sin\gamma}+\sqrt{\sin\alpha}-\sqrt{\sin\beta}} + \frac{\sqrt{\sin\gamma}}{\sqrt{\sin\alpha}+\sqrt{\sin\beta}-\sqrt{\sin\gamma}} \geqslant 3.$$

Rješenje. Neka su a, b, c duljine stranica trokuta, α, β, γ njima nasuprotni kutovi i R polumjer trokutu opisane kružnice. Iz nejednakosti trokuta $a < b + c$ slijedi redom

$$(\sqrt{a})^2 < (\sqrt{b+c})^2 < (\sqrt{b}+\sqrt{c})^2,$$
$$\sqrt{b}+\sqrt{c}-\sqrt{a} > 0,$$
$$\sqrt{2R\sin\beta}+\sqrt{2R\sin\gamma}-\sqrt{2R\sin\alpha} > 0$$

(počak o sinusima). Dakle,

$$x = \sqrt{\sin\beta}+\sqrt{\sin\gamma}-\sqrt{\sin\alpha} > 0, \quad (1)$$

i analogno

$$y = \sqrt{\sin\gamma}+\sqrt{\sin\alpha}-\sqrt{\sin\beta} > 0, \quad (2)$$
$$z = \sqrt{\sin\alpha}+\sqrt{\sin\beta}-\sqrt{\sin\gamma} > 0. \quad (3)$$

Iz (1), (2) i (3) dobivamo:

$$\sin\alpha = \frac{y+z}{2}, \quad \sin\beta = \frac{z+x}{2}, \quad \sin\gamma = \frac{x+y}{2}. \quad (4)$$

Označimo lijevu stranu dane nejednakosti s L. Imamo

$$L = \frac{z+y}{2x} + \frac{z+x}{2y} + \frac{x+y}{2z} = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{y}{z}+\frac{z}{y}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{x}+\frac{x}{z}\right)$$
$$\leqslant \sqrt{\frac{x}{y}\cdot\frac{y}{x}} + \sqrt{\frac{y}{z}\cdot\frac{z}{y}} + \sqrt{\frac{z}{x}\cdot\frac{x}{z}} = 3,$$

što se i tvrdilo.

Jednakost vrijedi ako i samo ako je $x = z = y$ tj. $\sin\alpha = \sin\beta = \sin\gamma$, odnosno $\alpha = \beta = \gamma$.

Ur.

3003. *Neka su $x_1, x_2, \ldots, x_n$ nultočke polinoma*

$$x^n + p_1 x^{n-1} + p_2 x^{n-2} + \ldots + p_{n-1}x + p_n$$

s realnim koeficijentima. Dokaži relaciju

$$(x_1^2+1)(x_2^2+1)\ldots(x_n^2+1) = (1 - p_2 + p_4 - \ldots)^2 + (p_1 - p_3 + \ldots)^2.$$

Rješenje. Kako su $x_1, x_2, \ldots, x_n$ nultočke danog polinoma vrijedi

$$x^n + p_1 x^{n-1} + p_2 x^{n-2} + \ldots + p_{n-1}x + p_n = (x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n).$$

Uvrstimo prvo $x = i$, zatim $x = -i$, te pomnožimo ta dva izraza. Kako je

$$(i-x_k)(-i-x_k) = x_k^2 + 1, \quad k = 1, 2, \ldots, n,$$

dobivamo

$$(x_1^2+1)(x_2^2+1)\ldots(x_n^2+1) = (i^n + p_1 i^{n-1} + \ldots + p_{n-1}i + p_n)\cdot$$
$$\cdot((-i)^n + p_1(-i)^{n-1} + \ldots + p_{n-1}(-i) + p_n).$$

Stavimo li

$$a = 1 - p_2 + p_4 - \ldots,$$
$$b = p_1 - p_3 + p_5 - \ldots$$

slijedi

$$(x_1^2+1)\ldots(x_n^2+1) = (i^n a + i^{n-1}b)((-i)^n a + (-i)^{n-1}b) = a^2 + b^2,$$

što je trbalo dokazati.

Ur.

3004. *Niz $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ zadan je rekurzivno:*

$$a_0 = -1,$$
$$a_n = \frac{2a_{n-1}-3}{3a_{n-1}-4}, \ n \in \mathbf{N}.$$

Odredi opći član a_n.

Rješenje.

$$a_0 = -1,\quad a_1 = \frac{2\cdot(-1)-3}{3\cdot(-1)-4} = \frac{5}{7},$$

$$a_2 = \frac{2a_1-3}{2a_1-4} = \ldots = \frac{11}{13},\quad a_3 = \ldots = \frac{17}{19},$$

$$a_4 = \ldots = \frac{23}{25},\quad a_5 = \ldots = \frac{29}{31},$$

$$\vdots$$

Naslućujemo da je $a_n = \dfrac{6n-1}{6n+1}$. Dokažimo to matematičkom indukcijom.

Pretpostavimo da jednakost $a_n = \dfrac{6n-1}{6n+1}$ vrijedi za neki prirodan broj n, te dokažimo da tvrdnja vrijedi i za sljedeći prirodni broj $n+1$, tj. da je $a_{n+1} = \dfrac{6(n+1)-1}{6(n+1)+1}$.

Prema uvjetu zadatka te prema pretpostavci vrijedi:

$$a_{n+1} = \frac{2a_n-3}{3a_n-4} = \frac{2\cdot\dfrac{6n-1}{6n+1}-3}{3\cdot\dfrac{6n-1}{6n+1}-4} = \frac{6n+5}{6n+7} = \frac{6(n+1)-1}{6(n+1)+1}.$$

Po principu matematičke indukcije tvrdnja $a_n = \dfrac{6n-1}{6n+1}$ vrijedi za svaki prirodni broj zadanog niza.

Sara Muhvić (2),
III. gimnazija, Osijek

3005. *Na kružnici polumjera R dane su točke A i B čija udaljenost je jednaka l. Koja je najmanja vrijednost zbroja $|AC|^2 + |BC|^2$ ako je C na danoj kružnici?*

Rješenje.

Neka je $|AB| = l$, a trokuti ABC_1 i ABC_1' su jednakokračni. Vrijedi $\sphericalangle ACB = \sphericalangle AC_1B$ jer su to obodni kutovi. Iz poučka o sinusima slijedi

$$\frac{|AB|}{\sin\gamma} = \frac{|AC|}{\sin\beta} = \frac{|BC|}{\sin\alpha} = 2R$$

tj.

$$|AC|^2 + |BC|^2 = 4R^2(\sin^2\alpha + \sin^2\beta). \quad (1)$$

Na intervalu $[0,\pi]$ funkcija $f(x) = \sin^2 x$ je konkavna. Zato je

$$\frac{\sin^2\alpha + \sin^2\beta}{2} \geqslant \sin^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) = \sin^2\left(\frac{\pi-\gamma}{2}\right) = \cos^2\frac{\gamma}{2}. \quad (2)$$

Iz trokuta AC_1B izrazit ćemo $\cos\dfrac{\gamma}{2}$:

$$\triangle ADC_1' \sim \triangle C_1DA \implies \frac{|AD|}{|DC_1|} = \frac{|C_1D|}{|AD|} \implies \left(\frac{l}{2}\right)^2 = x(2R-x)$$

tj.

$$4x^2 - 8Rx + l^2 = 0.$$

Odavde je

$$x = R \pm \sqrt{R^2 - \frac{l^2}{4}}$$

tj.

$$x_1 = R + \sqrt{R^2 - \frac{l^2}{4}},\quad x_2 = R - \sqrt{R^2 - \frac{l^2}{4}}.$$

Tada su $v_1 = x_1$, $v_2 = x_2$ visine trokuta ABC_1 i ABC_1'.

Iz (1) i (2) za $v = v_1$ dobivamo

$$|AC|^2 + |BC|^2 \geqslant 8R^2\cos^2\frac{\gamma}{2}$$

$$= 8R^2 \cdot \frac{v^2}{v^2 + \left(\dfrac{l}{2}\right)^2} = 32R^2 \cdot \frac{v^2}{4v^2 + l^2}$$

$$= 32R^2 \cdot \frac{R^2 + 2R\sqrt{R^2 - \dfrac{l^2}{4}} + R^2 - \dfrac{l^2}{4}}{4R^2 + 8R\sqrt{R^2 - \dfrac{l^2}{4}} + 4R^2 - l^2 + l^2}$$

$$= 2R \cdot \frac{8R^2 + 4R\sqrt{4R^2 - l^2} - l^2}{2R + \sqrt{4R^2 - l^2}}$$

$$= 2R \cdot \frac{\left(2R + \sqrt{4R^2 - l^2}\right)^2}{2R + \sqrt{4R^2 - l^2}}$$

$$= 4R^2 + 2R\sqrt{4R^2 - l^2}.$$

Ako je točka C na luku AC_1B minimum se postiže u točki C_1 i iznosi $4R^2+2R\sqrt{4R^2 - l^2}$.

Analogno se dobije za $v = v_2$. Ako je točka C na luku $AC_1'B$ minimum se postiže u točki C_1' i iznosi $4R^2 - 2R\sqrt{4R^2 - l^2}$.

Ur.

3006. *U kutiji se nalazi a crnih, b bijelih i c crvenih kuglica. Kolika je vjerojatnost da između tri izvučene kuglice barem dvije budu iste boje?*

Rješenje. Označimo s A pojam crne, B pojam bijele, C pojam crvene kuglice i D pojam najmanje dvije kuglice iste boje. Suprotni događaj $\overline{D}$ događaja D je da su sve kuglice različitih boja. Tada je

$$P(\overline{D}) = P(ABC + ACB + BAC + BCA + CAB + CBA)$$
$$= P(ABC) + P(ACB) + P(BAC) + P(BCA) + P(CAB) + P(CBA)$$
$$= \frac{a}{a+b+c}\cdot\frac{b}{a+b+c-1}\cdot\frac{c}{a+b+c-2} + \frac{a}{a+b+c}\cdot\frac{c}{a+b+c-1}\cdot\frac{b}{a+b+c-2} + \frac{b}{a+b+c}\cdot\frac{a}{a+b+c-1}\cdot\frac{c}{a+b+c-2} + \frac{b}{a+b+c}\cdot\frac{c}{a+b+c-1}\cdot\frac{a}{a+b+c-2} + \frac{c}{a+b+c}\cdot\frac{a}{a+b+c-1}\cdot\frac{b}{a+b+c-2} + \frac{c}{a+b+c}\cdot\frac{b}{a+b+c-1}\cdot\frac{a}{a+b+c-2}$$
$$= \frac{6abc}{(a+b+c)\cdot(a+b+c-1)\cdot(a+b+c-2)}.$$

Tražena vjerojatnost je

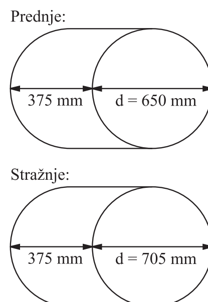
$$P(D) = 1 - P(\overline{D}) = 1 - \frac{6abc}{(a+b+c)\cdot(a+b+c-1)\cdot(a+b+c-2)}.$$

Šimun Romić (3),
Gimnazija Metković, Metković

D) Rješenja iz fizike

OŠ – 246. *Ferrari GTC ima širinu guma 375 mm i promjer prednjih guma 650 mm, a stražnjih 705 mm. Kolika je njegova masa ako ravnu podlogu dodiruje s 5% površine guma i djeluje tlakom od 70 000 Pa na podlogu?*

Rješenje. 4 gume:



$p = 70\,000\,\text{Pa}$ (na 5% površine guma)

$m = ?$

$O_1 = 2r_1\pi = 650\,\text{mm}\cdot 3.14 = 2041\,\text{mm},$

$O_2 = 2r_2\pi = 705\,\text{mm}\cdot 3.14 = 2213.7\,\text{mm},$

$S = (2O_1 + 2O_2)\cdot 375\,\text{mm} = 3\,191\,025\,\text{mm}^2.$

$$5\%\ \text{površine} = \frac{S\cdot 5}{100} = \frac{3\,191\,025\,\text{mm}^2\cdot 5}{100} = 159\,551.3\,\text{mm}^2,$$

$$p = \frac{F}{S},$$

$$F = p\cdot S = 70\,000\ \text{Pa}\cdot 0.15955\ \text{m}^2 = 11\,168.5\ \text{N},$$

$$m = \frac{F}{g} = \frac{11\,168.5\ \text{N}}{10\frac{\text{N}}{\text{kg}}} = 1\,116.85\,\text{kg}.$$

Katarina Vatavuk (7),
OŠ Fausta Vrančića, Šibenik

OŠ – 247. *Nika se vozi nagibnim vlakom brzinom 120 km/h. Ususret joj dolazi putnički vlak brzinom 60 km/h. Nika je pogledala na sat i vidjela da je lokomotiva pored nje prošla točno u 11 sati, a zadnji vagon u 11 sati i 8 s. Kolika je duljina putničkog vlaka?*

Rješenje.

$$v_1 = 120\ \frac{\text{km}}{\text{h}}, \quad v_2 = 60\frac{\text{km}}{\text{h}}$$

$$t_1 = 11\ \text{h}, \quad t_2 = 11\ \text{h}\ 8\ \text{s}$$

$$l = ?$$

$$t = t_2 - t_1,$$

$$t = 8\ \text{s} = \frac{1}{450}\ \text{h},$$

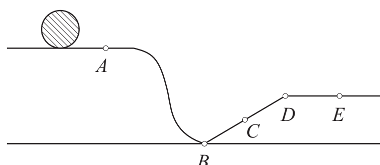
$$l = t(v_1 + v_2) = \frac{1}{450}\ \text{h} \cdot 180\frac{\text{km}}{\text{h}}$$

$$= 0.4\,\text{km} = 400\,\text{m}.$$

Duljina putničkog vlaka je 400 m.

Vanja Ubović (1),
Gimnazija Petra Preradovića, Virovitica

OŠ – 248. *Metalna kugla se giba po glatkoj površini od točke A do točke E. Trenje i otpor zaraka mogu se zanemariti.*



Što se događa s ukupnom energijom te kugle dok se giba? U kojoj točki kugla ima najmanju potencijalnu gravitacijsku energiju? U kojoj točki kugla ima najveću brzinu? Da li je brzina kugle veća u točki D ili E? Objasnite odgovore.

Rješenje. S obzirom da su sila trenja i otpor zraka zanemarivi, ukupna energija kugle je u svim točkama ista. Najmanju gravitacijsku potencijalnu energiju kugla ima u točki B jer je u toj točki najmanja visina. Najveću brzinu kugla ima u točki B jer je tu najveća kinetička energija kuglice. Brzina kuglice je jednaka u točkama D i E jer su na istoj visini, a trenje i otpor zraka su zanemarivi.

Katarina Vatavuk (7), Šibenik

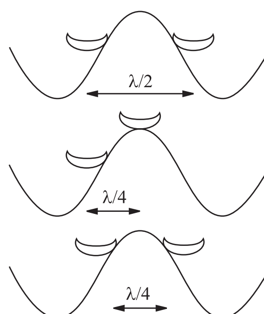
OŠ – 249. *Dva čamca su usidrena na udaljenosti od 5 m. Odjednom se pojavi val koji ih njiše gore-dolje svakih 2 s. Nikad nema brijega vala između njih. Skicirajte taj val i čamce. Izračunajte brzinu vala.*

Rješenje.

$$l = 5\,\text{m}$$

$$T = 2\ \text{s}$$

$$v = ?$$



Ako je između dva čamca jedan brijeg vala njihova udaljenost je veća ili jednaka $\dfrac{\lambda}{2}$. Ako je udaljenost manja od $\dfrac{\lambda}{2}$ nikad nema cijelog brijega vala između čamaca. Na primjer, možemo uzeti da je udaljenost između čamaca $\dfrac{\lambda}{4}$. Možemo izračunati kolika je brzina vala u tom slučaju.

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\ \text{s}} = 0.5\ \text{Hz},$$

$$l = \frac{\lambda}{4},$$

$$\lambda = 4 \cdot l = 4 \cdot 5\,\text{m} = 20\,\text{m},$$

$$v = \lambda \cdot f = 20\,\text{m} \cdot 0.5; \text{Hz} = 10\ \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Općenito, udaljenost između čamaca je manja od $\dfrac{\lambda}{2}$, a brzina vala veća od 5 m/ s.

Ur.

1336. *Zrnca pijeska, svako mase* $3 \cdot 10^{-3}$ *g, padaju s visine od* $0.8\,m$ *na ljepljivu površinu. Svake sekunde padne 50 zrnca/cm*^{2}. *Odredite tlak koji proizvodi taj pljusak pijeska.*

Rješenje.

$$m = 3 \cdot 10^{-3}\ \text{g} = 3 \cdot 10^{-6}\,\text{kg}$$

$$h = 0.8\,\text{m}$$

$$t = 1\ \text{s}$$

$$n = 50 \cdot \text{s}^{-1}$$

$P = 1\,\mathrm{cm}^2 = 1 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m}^2$

$p = \ ?$

Pošto je tlak jednak omjeru okomite sile i površine vrijedi

$$p = \frac{F}{P}.$$

Pri čemu je p iznos tlaka, a F sila koju stvaraju zrnca pijeska pri udaru o podlogu. Površina je ljepljiva pa iz impulsa sile vrijedi

$$Ft = Mv,$$

pri čemu je ukupna masa zrnaca koji padnu na podlogu u vremenu $t = 1$ s. Tada je

$$M = mnt = 3 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{kg} \cdot 50\ \mathrm{s}^{-1} \cdot 1\ \mathrm{s},$$

$$M = 1.5 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{kg}.$$

Pošto čestice slobodno padaju s visine 0.8 m vrijedi

$$v^2 = 2gh, \quad v = 3.9618\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

Uvrstimo sada to u formulu:

$$Ft = Mv, \ \ F = \frac{Mv}{t}, \ \ F = 5.9427 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{N}.$$

I sada silu uvrstimo u konačnu formulu:

$$p = \frac{F}{P}, \quad p = 5.9427\ \mathrm{Pa} \approx 6\ \mathrm{Pa}.$$

Tlak koji stvara pljusak pjeska iznosi 5.9427 Pa ili oko 6 Pa.

Gabrijel Guberović (2),
Gimnazija Nova Gradiška, Nova Gradiška

1337. *Kamen, mase 3 kg, visi na laganoj niti na stropu dizala i u potpunosti je uronjen u kantu vode, koja se nalazi na podu dizala, tako da ne dodiruje niti dno, niti stijenke kante. Dok dizalo miruje, napetost niti iznosi 21 N. Odredite napetost niti kada se dizalo ubrzava prema gore akceleracijom 2.5 m/s*^{2}.

Rješenje.

$m = 3\,\mathrm{kg}$

$F_N = 21\ \mathrm{N}$

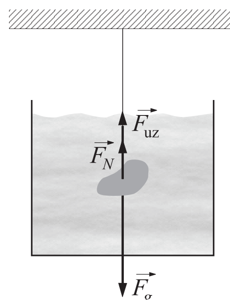
$a = 2.5\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$

$F_N' = ?$

Dok dizalo miruje na kamen djeluje gravitacijska sila prema gore, te uzgon i napetost niti prema gore.

Zato vrijedi:

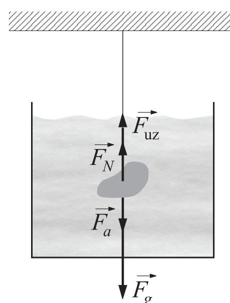
$$F_g = F_u + F_N, \quad mg = \rho_v gV + F_N.$$



Iz čega je volumen kamena jednak:

$$V = \frac{mg - F_N}{\rho_v g}, \quad V = 0.000859\,\mathrm{m}^3$$

Promotrimo sada sile koje djeluju na kamen dok dizalo ubrzava prema gore.



Budući da je sad kamen u liftu u neinercijalnom sustavu na njega djeluje još i inercijalna sila prema dolje. Sada vrijedi:

$$F_g + F_i = F_u' + F_N',$$

gdje je

$$F_u' = \rho_v(g + a)V.$$

Napetost niti je:

$$F_N' = F_g + F_i - F_u',$$

$$F_N' = mg + ma - \rho_v(g + a)V,$$

$$F_N' = 26.36\ \mathrm{N}.$$

Ur.

1338. *Kamionu otkažu kočnice dok se spušta niz zaleđenu padinu, koja je nagnuta pod kutom* α *prema horizontali. Masa kamiona je* m*, a u trenutku otkazivanja kočnica ima brzinu* v_0*. Nakon što prijeđe ostatak nizbrdice,*

duljine L, vozač se odmah počne penjati s ugašenim motorom na drugo brdo, kako bi zaustavio kamion. To brdo ima meku zemljanu podlogu, koeficijenta trenja μ, i nagnuto je prema horizontali pod kutom β. Koliki će put kamion prijeći po tom brdu do zaustavljanja?

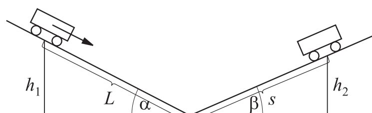
Rješenje. Za rješavanje ovog zadatka primijenimo zakon sačuvanja energije

$$E_{\text{poč}} = E_{\text{kon}} + W_{\text{tr}}$$

Na početku je energija koju ima kamion jednaka zbroju kinetičke energije (zbog brzine v_0 koju ima) i potencijalne energije (zbog visine na kojoj se nalazi):

$$E_{\text{poč}} = mgh_1 + \frac{mv_0^2}{2}$$

$$E_{\text{poč}} = mgL\sin\alpha + \frac{mv_0^2}{2}$$



Energija na kraju, kad se kamion zaustavi na drugom brdu, jednaka je:

$$E_{\text{kon}} = mgh_2 = mgs\sin\beta.$$

Rad sile trenja jednak je:

$$W_{\text{tr}} = F_{\text{tr}}s = \mu F_{\perp}s = \mu mgs\cos\beta,$$

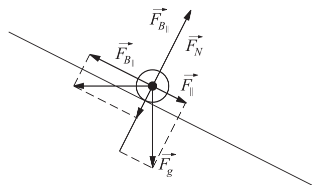
$$mgL\sin\alpha + \frac{mv_0^2}{2} = mgs\sin\beta + \mu mgs\cos\beta,$$

$$s = \frac{gL\sin\alpha + \frac{v_0^2}{2}}{g\sin\beta + \mu g\cos\beta}.$$

Ur.

1339. *Ravni komad vodljive žice, mase M i duljine L, smješten je poprečno na kosinu koja zatvara kut α s horizontalom. Trenje zanemarimo. Homogeno magnetsko polje B usmjereno je vertikalno prema gore u svim točkama kosine. Da bismo spriječili klizanje žice niz kosinu, na njezine krajeve priključimo izvor napona. Kada točno određena struja poteče žicom, ona miruje na kosini. Odredite jakost i smjer struje u žici, koji omogućuju da žica ostane mirovati.*

Rješenje. Na slici se vidi dijagram sila koje djeluju na kosinu:



Da bi žica mirovala, mora vrijediti:

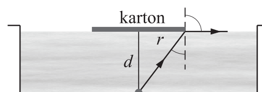
$$F_\parallel = F_{B_\parallel}, \quad mg\sin\alpha = ILB\cos\alpha,$$

$$I = \frac{mg\sin\alpha}{LB\cos\alpha}, \quad I = \frac{mg}{LB}\cdot \operatorname{tg}\alpha.$$

Ur.

1340. *Mali kamen leži na dnu velikog bazena, dubokog 4 m. Odredite najmanji polumjer kružnog kartona, koji bi ga, plutajući na površini bazena upravo iznad kamena, učinio nevidljivim iz svakog smjera. Indeks loma za vodu iznosi 1.33.*

Rješenje. Kamen možemo smatrati točkastim izvorom svjetlosti. Karton mora biti dovoljno velik da blokira sve lomljene zrake svjetlosti, dok zrake svjetlosti koje dođu do površine izvan kartona moraju biti totalno reflektirane.



$$n_v\sin\alpha = n_z\sin\beta, \quad \beta = 90^\circ, \quad n_v\sin\alpha = 1,$$

$$n_v\frac{r}{\sqrt{r^2+d^2}} = 1, \quad r^2 + d^2 = n_v^2 r^2,$$

$$r^2 = \frac{d^2}{n_v^2 - 1}, \quad r = \frac{d}{\sqrt{n_v^2 - 1}}.$$

Ur.

1341. *Foton valne duljine 0.1100 nm sudari se sa slobodnim elektronom koji miruje. Nakon sudara valna duljina fotona iznosi 0.1132 nm. Kad se elektron naglo zaustavi, sva se njegova kinetička energija iskoristi za stvaranje novog fotona. Kolika je valna duljina tog fotona?*

Rješenje.

$$\lambda_f = 0.1100 \text{ nm}$$

$$\lambda_f' = 0.1132 \text{ nm}$$

$$\lambda_{nf} = ?$$

Primijenimo zakon sačuvanja energije:

$E_f + E_e = E_f' + E_e'$,

$E_e = 0$ jer na početku miruje,

$$E_e' = E_f - E_f' = h \cdot \frac{c}{\lambda_f} - h \cdot \frac{c}{\lambda_f'}$$

$$= hc\left(\frac{1}{\lambda_f} - \frac{1}{\lambda_f'}\right) = hc \cdot \frac{\lambda_f' - \lambda_f}{\lambda_f \lambda_f'},$$

$E_e' = 5.1 \cdot 10^{-17}$ J.

Budući da se sva kinetička energija elektrona iskoristi za stvaranje novog fotona, imamo:

$$E_e' = h \cdot \frac{c}{\lambda_{nf}},$$

$$\lambda_{nf} = \frac{hc}{E_e'}, \quad \lambda_{nf} = 3.89 \text{ nm}.$$

Ur.

1342. *Kružna petlja od žice može se koristiti kao radio antena. Jedna takva, promjera 18 cm, udaljena je 2.5 km od izvora radio valova, frekvencije 95 MHz i snage 55 kW. Kolika je maksimalna elektromotorna sila koja se inducira u petlji? Pretpostavite da je površina petlje okomita na smjer upadnog magnetskog polja i da izvor zrači jednoliko u svim smjerovima unutar pola prostornog kuta.*

Rješenje.

$d = 18\,\text{cm} = 0.18\,\text{m}$

$R = 2.5\,\text{km} = 2500\,\text{m}$

$f = 95$ MHz $= 95 \cdot 10^6$ Hz

$P = 55$ kW $= 55\,000$ W

$U \quad =?$

$$I = \frac{P}{A}, \quad I = \frac{P}{2R^2\pi}, \quad I = \frac{E_{max}^2}{2\mu_0 c},$$

$$E_{max} = \sqrt{\frac{2\mu_0 cP}{2R^2\pi}}$$

$$B_{max} = \frac{E_{max}}{c}, \quad B_{max} = \frac{\sqrt{\frac{2\mu_0 cP}{2R^2\pi}}}{c},$$

$$U = \frac{B_{max}A_1}{t} = \frac{r^2\pi f\sqrt{\frac{\mu_0 cP}{R^2\pi}}}{c},$$

$U = 8.28 \cdot 10^{-3}V.$

Ur.

Šesterokuti

Nije. Manji šesterokut tri puta je manji od polaznog šesterokuta. Dovoljno je uočiti da svaku kraću dijagonalu dvije druge kraće dijagonale dijele na tri sukladna dijela.

Zlato i srebro

Neka je x broj zlatnika, a y broj srebrnjaka. Tada je $25x$ masa zlatnika u gramima, a $16y$ masa srebrnjaka. Te mase povezuje jednakost

$$25x + 16y = 500.$$

Sada lako zaključujemo da y mora biti djeljiv s 25. Jedino rješenje je $x = 4$, $y = 25$. Gold ima 4 zlatnika i 25 srbrnjaka.

Rimska jednakost

Postoji sedam rješenja:

X + X − II = XX − II,

IX + X − I = XX − II,

X + IX − I = XX − II,

XI + IX − I = XX − I,

XI + X − I = XX − I,

XI + X − I = XXI − I,

XI + XI = XX + II.

Kokoši i svinje

Kad bi u dvorištu bile samo kokoši, broj nogu iznosio bi 188. Razlika od 62 noge pripada svinjama, po dvije svakoj. Dakle, u dvorištu su 63 kokoši i 31 svinja.

Mala igra

Traženi stupci dobivaju se ovako: R se postavlja iznad desnog E, Ć iznad I, P iznad K, T iznad O i E iznad J.



47. međunarodna matematička olimpijada

Ciklus matematičkih natjecanja u školskoj godini 2005./ 06., od školskih, preko općinskih i županijskih do državnog, završio je Međunarodnom matematičkom olimpijadom (MMO), natjecanjem koje okuplja najbolje mlade matematičare na svijetu. Ona se održavala od 6. do 18. srpnja 2006. godine u jednoj od naših susjednih zemalja, Sloveniji. Kao što je predsjednik komisije rekao, to je najmanja država koja je ikada bila domaćin MMO, ali je organizacija bila toliko dobra da smo se osjećali kao u velikoj zemlji.

Na ovogodišnjoj Olimpijadi sudjelovalo je 498 učenika iz 90 država.

Hrvatsku je predstavljalo šest učenika: *Nikola Adžaga* (3. razred), *Goran Dražić* (4. razred) i *Vedran Palajić* (4. razred) iz V. gimnazije u Zagrebu, *Josip Saratlija* (4. razred) iz III. gimnazije u Splitu te *Luka Rimanić* (3. razred) i *Luka Žunić* (3. razred) iz Gimnazije Andrije Mohorovičića u Rijeci. Voditelji naše ekipe su bili *Ilko Brnetić* s Fakulteta elektrotehnike i računarstva, *Vjekoslav Kovač* s Matematičkog odjela Prirodoslovno-matematičkog fakulteta (PMF-MO), a pripomogla je i *Mea Bombardelli*, također s PMF-MO.

Žiri se okupio četiri puta u četiri dana (od 7. do 10. srpnja) te izabrao zadatke za natjecanje. Učenici su stizali do 10. srpnja, a bili su smješteni u "Dijaškom domu Ivana Cankarja". Dva dana, 12. i 13. srpnja, od 9.00 do 13.30, učenici su rješavali zadatke. Nakon dva dana koordinacije saznali smo rezultate, tj. bodove koje smo osvojili. Medalje je osvojilo 253 učenika, od toga 42 zlatne (za osvojenih 28–42 boda), 89 srebrnih (19–27) te 122 brončane (15–18). Od naših učenika, *Goran Dražić* (23 boda) je osvojio srebrnu medalju, *Nikola Adžaga* (16) brončanu medalju, a *Luka Žunić* i *Josip Saratlija* su bili pohvaljeni (za jedan potpuno točno riješen zadatak). Tri učenika, predstavnici Kine, Rusije i Moldavije, su osvojila maksimalan broj bodova, pokazavši da je, iako jedna od težih Olimpijada, bila u potpunosti rješiva.

Izleti su bili organizirani u Primorsku (gdje smo mogli vidjeti Postojnsku jamu), Portorož i Gorenjsku. Organizirana su i sportska natjecanja, gdje smo postigli bolji rezultat nego na matematičkom natjecanju. U odbojci i nogometu osvojili smo zlato, a u stolnoteniskom turniru smo bili u finalu.

Predzadnji dan, 17. srpnja, održana je podjela medalja i zatvaranje natjecanja, gdje je olimpijska zastava uručena članu organizacijskog odbora 48. MMO, koja će se održati iduće godine u gradu Hanoiu, u Vijetnamu. Tokom otvaranja i zatvaranja vidjeli smo slovenski folklor i sličnosti s hrvatskim. Nakon toga bila je organizirana svečana večera.

Zahvaljujemo se Ministarstvu znanosti, obrazovanja i športa čijom potporom su omogućene pripreme hrvatske olimpijske ekipe, Wolfram Researchu koji nas je sponzorirao studentskom verzijom programa Mathematica, organizatorima i svim sponzorima 47. MMO, te voditeljima koji su se kroz cijele pripreme, kao i natjecanje trudili da postignemo što bolji rezultat.

Nikola Adžaga i Goran Dražić, članovi hrvatske ekipe

Rang–lista

	nagrade				broj
	I	II	III	poh.	bod.
Kina	6				214
Rusija	3	3			174
Južna Koreja	4	2			170
Njemačka	4		2		157
SAD	2	4			154
Rumunjska	3	1	2		152
Japan	2	3	1		146
Iran	3	3			145
Moldavija	2	1	3		140
Tajvan	1	5			136
Poljska	1	2	3		133
Italija	2	2		1	132
Vijetnam	2	2	2		131
Hong Kong	1	3	2		129
Kanada		5	1		123
Tajland	1	3	2		123
Mađarska		5	1		122
Slovačka	1	2	3		118
Turska		4	1	1	117
Ujedinjeno Kraljevstvo		4	1	1	117
Bugarska		4	1	1	116
Ukrajina	1	2	2	1	114
Bjelorusija		3	2	1	111
Meksiko	1	2	1	1	110
Izrael		3	1	2	109
Australija		3	2	1	108
Singapur		2	3	1	100
Francuska	1		3	2	99
Brazil			6		96
Argentina		2	2	1	95
Kazahstan		1	4	1	95
Švicarska	1	1		4	95
Gruzjija		1	3	2	94
Litva		1	2	3	94
Indija			5	1	92
Armenija		1	1	4	90
Slovenija		1	3	2	90
Srbija			5	1	88
Finska			4	2	86
Peru		1	1	4	85
Bosna i Hercegovina		1	2	3	84
Austrija			3	3	83
Švedska			3	3	82
Estonija			2	2	80
Mongolija			2	4	80
Španjolska		1	2	3	80
Portugal			3	1	78
Azerbajdžan		1	1	4	77
Češka			3	3	77
Albanija		1	1	2	76
Kolumbija			2	3	76
Belgija			1	4	75
Latvija			3	2	75
Hrvatska		1	1	2	72
Šri Lanka (5)			3	2	71
Grčka			2	3	69
Uzbekistan			2	3	68
Novi Zeland			2	2	66
Island			1	2	63
Makao			2	1	63
Turkmenistan (5)		1	1	1	59
Južnoafrička Republika				5	57
Makedonija			1	3	57
Nizozemska				5	57
Maroko				4	55
Norveška			1	2	52
Irska				4	49
Paragvaj (4)		1		1	47
Danska				1	45
Ekvador			1	1	40
Malezija			1	1	40
Tadžikistan				3	35
Trinidad i Tobago				2	34
Venecuela (4)				3	34
Panama (4)				2	33
Pakistan (5)				1	32
Kirgistan				2	31
Kostarika (2)			1	1	27
Salvador (3)				2	27
Bangladeš (4)				2	22
Cipar				1	19
Luksemburg (2)				1	12
Urugvaj (2)				1	12
Nigerija					11
Portoriko					11
Bolivija (2)					5
Kuvajt (4)					5
Saudijska Arabija (4)					3
Lihtenštajn (1)					2
Mozambik (3)					0

Zadaci

Prvi dan

Ljubljana, Slovenija, srijeda, 12. srpnja 2006.

1. Neka je I središte upisane kružnice trokuta ABC. U njegovoj unutrašnjosti dana je točka P takva da je

$$\sphericalangle PBA + \sphericalangle PCA = \sphericalangle PBC + \sphericalangle PCB.$$

Dokažite da je $|AP| \geq |AI|$, te da jednakost vrijedi ako i samo ako se točka P podudara s točkom I.

2. Neka je P pravilni poligon s 2006 stranica. Za dijagonalu poligona P kažemo da je *dobra* ako njezine krajnje točke dijele rub od P na dva dijela, tako da se svaki od njih sastoji od neparnog broja stranica poligona P. Za stranice poligona P također kažemo da su *dobre*.

Promatrajmo podjele poligona P na trokute pomoću 2003 dijagonala, tako da nikoje dvije od njih nemaju zajedničku točku u unutrašnjosti poligona P. Nađite maksimalni broj jednakokračnih trokuta s dvije *dobre* stranice, koji se mogu dobiti pri nekoj takvoj podjeli.

3. Odredite najmanji realni broj M takav da nejednakost

$$|ab(a^2 - b^2) + bc(b^2 - c^2) + ca(c^2 - a^2)| \leq M(a^2 + b^2 + c^2)$$

vrijedi za sve realne brojeve a, b i c.

Drugi dan

Ljubljana, Slovenija, četvrtak, 13. srpnja 2006.

4. Nađite sve parove cijelih brojeva takvih da vrijedi

$$1 + 2^x + 2^{2x+1} = y^2.$$

5. Neka je $P(x)$ polinom stupnja n, $n > 1$, s cjelobrojnim koeficijentima i neka je k prirodan broj. Promatrajmo polinom

$$Q(x) = P(P(\ldots P(P(x))\ldots)),$$

pri čemu se P pojavljuje k puta. Dokažite da postoji najviše n cijelih brojeva t takvih da je $Q(t) = t$.

6. Svakoj stranici b konveksnog poligona $\mathtt{P}$ pridružena je maksimalna površina trokuta kojemu je b jedna od stranica i koji je sadržan u poligonu $\mathtt{P}$. Dokažite da je zbroj svih površina pridruženih stranicama poligona $\mathtt{P}$ veći ili jednak od dvostruke površine poligona $\mathtt{P}$.

15. državna smotra i natjecanje mladih fizičara
Vis, 11. – 14. svibnja 2006.

Hrvatsko fizikalno društvo, Agencija za odgoj i obrazovanje i Ministarstvo znanosti, obrazovanja i športa organizirali su i prošle školske godine natjecanje iz fizike učenika osnovnih i srednjih škola.

Školska natjecanja su održana tijekom siječnja i početkom veljače 2006. godine. Općinska natjecanja su održana 15. veljače 2006. Zadatke je 256 škola, domaćina natjecanja, elektroničkom poštom primilo pola sata prije natjecanja. Na ovom natjecanju je sudjelovalo oko 2 500 učenika. Na temelju uspjeha na općinskom natjecanju županijska povjerenstva su pozvala učenike na županijsko natjecanje koje je održano 16. ožujka 2006. I za ovu razinu natjecanja zadatke je pripremilo državno povjerenstvo i dostavilo u škole elektroničkom poštom na sam dan natjecanja. Sudjelovalo je 1 357 učenika osnovnih i srednjih škola. Nakon što su županijska povjerenstva dostavila izvješća, državno povjerenstvo je uskladilo bodovanje i prema jedinstvenim listama poretka za pojedine kategorije pozvalo učenike na državno natjecanje.

Pored natjecanja u znanju koje se odvijalo na spomenute četiri razine (školsko, općinsko, županijsko i državno) učenici osnovnih i srednjih škola tijekom školske godine osmišljavali su i izvodili eksperimente. Autori najboljih samostalnih eksperimentalnih radova pozvani su na državnu smotru.

Državna smotra i natjecanje mladih fizičara održano je u Visu od 11. do 14. svibnja 2006. Domaćin je bila Osnovna škola Vis. Sudjelovalo je 162 učenika osnovnih (70) i srednjih (92) škola te 132 nastavnika i člana državnoga povjerenstva Sudionici su bili smješteni u hotelu Issa u Visu.

Veoma nabijeni program događanja odvijao se po planu. Pored samog natjecanja sudionici su imali prilike upoznati otok Vis. U subotu poslijepodne organiziran je kratki izlet do Komiže uz razgledavanje otoka. Sudionici natjecanja najiskrenije zahvaljuju ravanteljici OŠ Vis, gospođi Aneli Borčić, te svim djelatnicima škole na toploj dobrodošlici i izvrsnoj organizaciji

U subotu navečer, na svečanom zatvaranju najboljima su dodijeljene diplome i knjige po kategorijama i grupama kako slijedi.

Osnovne škole

Marija Kranjčević, OŠ Antuna Gustava Matoša, Zagreb, *Ante Malenica*, OŠ Malešnica, Zagreb, *Borna Miloš*, OŠ Josipa Jurja Strossmayera, Zagreb (I. nagrada); *Petar Kunštek*, OŠ Dugave, Zagreb, *Branimir Kasun*, OŠ grofa Janka Draškovića, Zagreb, *Marija Čelar*, OŠ Fausta Vrančića, Šibenik, *Mario Kostelac*, OŠ Ivane Brlić Mažuranić, Virovitica, *Dario Pažin*, OŠ Trnsko, Zagreb, *Dino Koprivnjak*, OŠ Ivana Kukuljevića, Belišće, *Petar Marević*, OŠ Vladimir Nazor, Ploče (II. nagrada); *Marija Miljak*, OŠ Stenjevec, Zagreb, *Tin Kovačević*, OŠ Eugena Kumičića, Velika Gorica, *Vilim Štih*, OŠ Pavleka Miškine, Zagreb, *Frane Tomić*, OŠ Pavleka Miškine, Zagreb, *Ivana Antoliš*, OŠ Vladimira Nazora, Zagreb, *Ana Milinović*, OŠ Većeslava Holjevca, Zagreb, *Mateo Pauliši ć*, OŠ Vladimira Nazora, Pazin, *Dunja Vučenović*, OŠ Jurja Dalmatinca, Šibenik, *Dino Peran*, OŠ Tina Ujevića, Šibenik (III. nagrada).

Samostalni eksperimentalni radovi

Margaret Ružman, Martina Derežić, OŠ Kloštar Podravski, Kloštar Podravski (I. nagrada); *Leon Jakirlić*, Kristijan Ore, OŠ Borovje, Zagreb (II. nagrada); *Ivan Knežević*, OŠ Pujanki, Split (III. nagrada).

Srednje škole

1. grupa:

Ivan Domladovec, Gimnazija Lucijana Vranjanina, Zagreb, *Petar Mlinarić*, XV. gimnazija, Zagreb (I. nagrada); *Zrinka Bočkaj*, Gimnazija Metković, Metković (II. nagrada); *Nina Kamčev*, XV. gimnazija, Zagreb, *Irma Telarović*, XV. gimnazija, Zagreb, *Roko Kraljević*, III. gimnazija, Split, *Veronika Sunko*, V. gimnazija, Zagreb (III. nagrada).

2. grupa:

Tena Dubček, XV. gimnazija, Zagreb (I. nagrada); *Leo Osvald*, XV. gimnazija, Zagreb, *Matija Vrhovec*, Gimnazija Antuna Gustava Matoša, Zabok (II. nagrada); *Luka Štambuk*, III. gimnazija, Split, *Grgo Dželalija*, III. gimnazija, Split, *Boran Morvaj*, V. gimnazija, Zagreb (III. nagrada).

3. grupa:

Igor Telalović, Gimnazija Lucijana Vranjanina, Zagreb (I. nagrada); *Mijo Tvrdojević*, Gimnazija Matije Mesića, Slavonski Brod, *Marin Mišur*, Gimnazija Metković, Metković (II. nagrada); *Antonio Krnjak*, Gimnazija Čakovec, Čakovec, *Mihita Cvitanović*, Gimnazija Lucijana Vranjanina, Zagreb, *Lenka Vukšić*, III. gimnazija, Split (III. nagrada).

4. grupa:

Marko Popović, V. gimnazija, Zagreb (I. nagrada); *Goran Dražić*, V. gimnazija, Zagreb, *Marija Mustać*, Gimnazija Franje Petrića, Zadar (II. nagrada); *Danijel Pikutić*, Elektrostrojarska škola Varaždin, Varaždin, *Ivan Rančić*, Gimnazija Franje Petrića, Zadar, *Boran Car*, III. gimnazija, Split (III. nagrada).

Samostalni eksperimentalni radovi

Ivan Habrka, Alan Vovk, I. Gimnazija, Zagreb (I. nagrada); *Domagoj Eršek*, Petra Čuček, Prirodoslovna škola V. Preloga, Zagreb (II. nagrada); *Stjepan Vučković*, Gimnazija Lucijana Vranjanina, Zagreb (III. nagrada).

Zadaci

Osnovna škola

Pismeni zadaci

1. Kružne valove na površini vode proizvodi izvor koji udara o površinu vode svakih 0.01 s. Valne fronte su međusobno razmaknute za 0.4 cm.

a) Odredite brzinu širenja vala.

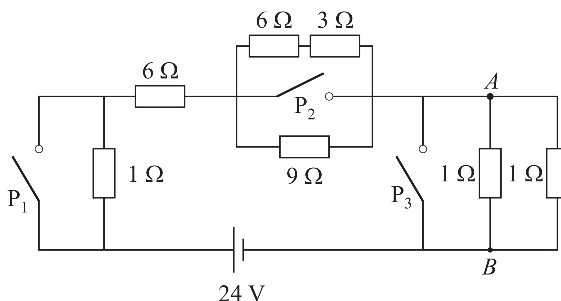
b) Što bi trebalo promijeniti u pokusu da se dobije veća brzina širenja vala?

c) Na kojim će udaljenostima od izvora vala čestice vode titrati usklađeno s izvorom, tako da istovremeno s izvorom postižu maksimalni otklon od ravnotežnog položaja u istom smjeru?

2. Atletičarka Dora i njen pas trče prema rijeci, koja je udaljena 4 km. Dora trči pravocrtno, brzinom 2.5 m/ s. Pas trči od Dore do rijeke i natrag, sve dok Dora ne dođe do rijeke. Brzina psa je 4.5 m/ s. Koliki je ukupni put pretrčao pas?

3. Gustoća alkohola pri 50 °C iznosi 96.8 % gustoće alkohola pri 20 °C. Odredite za koji se iznos zbog toplinskog rastezanja poveća obujam 1 l alkohola, temperature 20 °C, pri zagrijavanju za 1 °C!

4. Svaki od prekidača P_1, P_2 i P_3 u strujnom krugu prikazanom na shemi može biti otvoren ili zatvoren. Nađite kombinaciju položaja prekidača, pri kojoj će struja kroz bateriju biti najmanja! Koliki će tada biti napon između točaka A i B?



5. Astronaut stoji na tlu i ispusti iz ruku loptu, mase 0.4 kg, bez početne brzine. Nakon što lopta padne 120 cm niže od početnog položaja, a još uvijek nije prevalila cijeli put do tla, njena kinetička energija iznosi 1.8 J.

a) Je li je astronaut na Zemlji?

b) Astronaut Ivica zakotrlja dvije jednake takve lopte po tlu, a astronautica Marica snimi njihove položaje u jednakim vremenskim razmacima od 1 s, kako prikazuje slika (mjerilo 1 : 100). Odredite kinetičku energiju kojom je izbačena lopta B.

c) Odredite ubrzanja lopte A i lopte B.

Lopta A: 1 ● 2 ● 3 ● 4 ● 5 ●

Lopta B: 1 ● 2 ● 3 ● 4 ● 5 ●

Praktični zadaci

1. Ping-pong lopticu ispusti s neke visine na stol.

a) Odredi koji postotak početne energije loptice čini kinetička energija koju ona ima neposredno nakon što se odbila od stola.

b) Na podlogu postavi prvo jednu, zatim dvije, pa tri papirnate maramice i svaki put odredi koji postotak početne energije loptice čini kinetička energija koju ona ima neposredno nakon što se odbila od te podloge.

c) Nacrtaj dijagram koji pokazuje ovisnost postotka početne energije koji se pretvorio u unutrašnju energiju podloge i stola o podlozi.

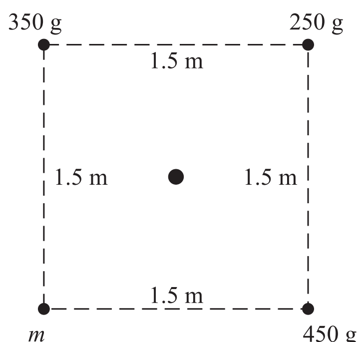
2. U čašu s vodom kapni kap tinte. Odredi srednju usmjerenu brzinu padanja čestica tinte. Provjeri mjerenjem ovisi li ta brzina o temperaturi vode. ($T_2 > 30\,^\circ$C). Objasni svoj zaključak.

3. Spoji žaruljicu u strujni krug s baterijom, otpornicima, ampermetrom i voltmetrom. Odredi ovisnost struje koja protječe žaruljicom o naponu na žaruljici i nacrtaj I-U dijagram za tu žaruljicu. Izmjeri barem pet različitih vrijednosti jakosti struje. Nacrtaj sheme spojeva.

Srednje škole

1. grupa

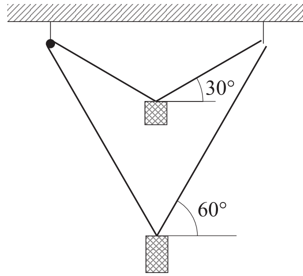
1. U vrhovima kvadrata stranice 1.5 m pričvršćena su tri tijela masa 250 g, 350 g, 450 g i jedno tijelo nepoznate mase m. U sredini kvadrata nalazi se još jedno tijelo koje u jednom trenutku pustimo gibati se iz stanja mirovanja. Odredite (barem jednu) vrijednost mase m koja će za početnu akceleraciju tijela u sredini kvadrata, uslijed gravitacijskog privlačenja, dati vrijednost od 10^{-11} m/ s^2. Skicirajte smjer ukupne sile na tijelo u sredini kvadrata (s točnošću od 45°). $G = 6.67 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{m^3/\,kg\,s^2}$.



2. S vrha kosine, koja s horizontalom zatvara kut $30\,^\circ$C, pusti se gibati tijelo zanemarivih dimenzija. Nakon što dođe do dna kosine, tijelo se nastavlja gibati po vodoravnoj podlozi. I kosina i vodoravna podloga su načinjeni od istog materijala, pa je i koeficijent trenja na njima isti. Izračunajte taj koeficijent trenja, ako je put koji je tijelo prešlo po vodoravnom dijelu podloge jednak duljini kosine.

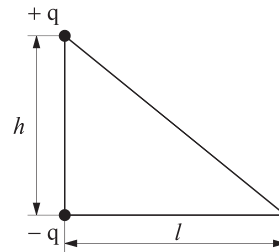
3. S vrha nebodera koji ima 22 kata bacimo tijelo da slobodno pada. Nakon dvije sekunde tijelo se nalazi na visini koja odgovara podu osamnaestog kata, a sekundu kasnije na visini koja odgovara podu desetog kata. Odredite komponentu brzine kojom je tijelo bačeno i visinu nebodera u metrima. Je li tijelo bačeno prema gore ili prema dolje? ($g = 10\,\mathrm{m/s^2}$. Zanemarite trenje. Pretpostavite da je pod početnog kata nebodera u ravnini s tlom, te da je debljina poda zanemariva.)

4. Sustav od dva utega, dvije koloture zanemarivih dimenzija i dvije nerastezljive niti nalazi se u ravnoteži, u zemljinom gravitacijskom polju. Nađite omjer masa utega.



2. grupa

1. S vrha kosine visine h i horizontalne dimenzije l pusti se iz mirovanja kuglica mase m zanemarivo malog polumjera. Na kuglici je pozitivan naboj $+q$. U vrhu pravog kuta kosine se nalazi nepomičan negativan naboj $-q$.



a) Promatrajući kuglicu kako se giba niz kosinu, ustanovili ste da je stigla do dna. Kolika joj je tada brzina?

b) Ako je visina kosine $h = 1\,\mathrm{m}$, za koje sve vrijednosti horizontalne dimenzije kosine l, kuglica mase 1 g, na kojoj je naboj $q = 1.36\,\mu\mathrm{C}$, ne stiže do njenog dna?

c) Za koje omjere h/l je brzina nabijene kuglice na dnu veća od one koju bi imala nenabijena kuglica u istim uvjetima?

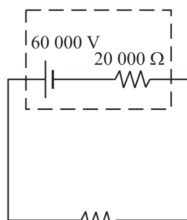
Kosina je napravljena od električki neprovodljivog materijala. Trenje zanemariti.

2. Zadan je strujni krug kao na slici.

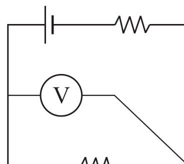
a) Kad se otpor od $180\ \Omega$ spoji preko baterije elektromotorne sile 6 V i unutarnjeg otpora $20\ \Omega$, kolika struja teče kroz otpor? Koliki je pad napona na njemu?

b) Pretpostavite da se u strujni krug dodaju ampermetar unutrašnjeg otpora $0.5\ \Omega$ i voltmetar unutarnjeg otpora $20\ \mathrm{k}\Omega$ kao na slici b). Kolika su očitanja ovih uređaja?

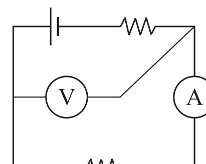
c) Zatim se jedan od terminala voltmetra prespoji (kao na slici c)). Kolika su sad očitanja voltmetra i ampermetra?



(a)



(b)



(c)

Postoji li razlika u očitanjima između b) i c) slučaja? Ako da, koja od ovih konfiguracija daje točnije očitanje?

Napomena: Tražene veličine računajte na barem 5 decimala radi kasnije usporedbe.

3. Malom čarobnjaku Parryu Hotteru dosadilo je letjeti na metli. Osim toga, često treba nositi i dodatne stvari, za koje na metli baš i nema mjesta. Bilo bi lijepo kad bi mogao koristiti lebdeći tepih. No, magična riječ koja bi običan tepih pretvorila u lebdeći još nije izmišljena. Stoga se Parry za pomoć odluči obratiti svom poznaniku – svjetski poznatom i priznatom fizičaru Mr. Phyu da probaju konstruirati lebdeći tepih koji lebdi bez pomoći magije!

Mr. Phy razmišlja na sljedeći način: Držim li gornju površinu tepiha na temperaturi $T_1 = 273$ K, a donju na $T_2 = 373$ K $> T_1$, zbog sudara molekula zraka, koji je prije sudara na temperaturi okoline $T = 293$ K s toplijom donjom površinom, one dobivaju dodatnu količinu gibanja prema dolje. No, istovremeno i tepihu se količina gibanja promijeni za jednak iznos u suprotnom smjeru (prema gore) odnosno postoji sila koja tepih gura prema gore. Analogno vrijedi i za gornju površinu. Ako je površina lebdećeg tepiha $1\,\mathrm{m}^2$ izračunajte može li takav tepih ponijeti teret od 300 kg. Pretpostavite da se nakon sudara molekule zraka zagriju na temperaturu površine u koju udare i da se promijeni samo vertikalna komponenta brzine molekule. Za račun upotrijebite srednju kvadratnu brzinu molekula $\langle v \rangle = \sqrt{v^2}$ (drugim riječima, uzmite kao da se sve molekule kreću jednakom, srednjom kvadratnom brzinom). Isto tako, pretpostavite da je koncentracija molekula zraka n (broj molekula po jedinici volumena) jednaka ispod i iznad tepiha (je li ovo realna pretpostavka?). Atmosferski tlak je 10^5 Pa.

Napomene:

Tepih smatrati krutom pločom.

Zrak smatrati dvoatomnim plinom čije sve molekule imaju jednaku masu m.

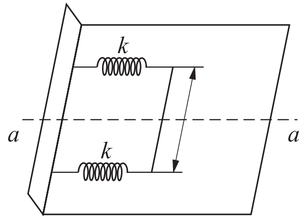
Broj sudara molekula idealnog plina u jediničnu ravnu površinu u jedinici vremena dan je izrazom $b = \frac{n}{4} \langle v \rangle$.

4. Da bi se našao omjer specifičnih toplinskih kapaciteta pri stalnom tlaku i stalnom volumenu tj. c_P/c_V za plin, nekad se koristi ova metoda: Određena količina plina početne temperature T_0, tlaka P_0 i volumena V_0 grije se pomoću struje koja teče kroz otpornu žicu od platine u vremenskom intervalu t. Eksperiment se napravi dva puta: prvo uz stalni volumen V_0, dok se tlak mijenja od P_0 do P_1, a onda uz stalni tlak P_0 dok se volumen mijenja od V_0 do V_1. Vrijeme t, kao i struja I koja teče žicom jednaki su u oba eksperimenta. Nađite c_P/c_V (rezultat izrazite pomoću P_0, P_1, V_0, V_1 jer su to mjerene veličine). Plin smatrati idealnim.

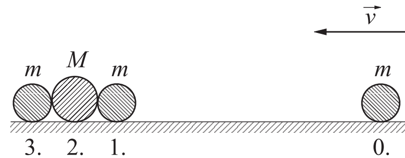
3. grupa

1. Tanka šipka mase M, duljine L, giba se po horizontalnoj ploči bez trenja. Njezino središte mase ograničeno je na kretanje po ravnoj liniji $a - a'$. Dvije identične opruge, konstante k, pričvršćene su na krajeve šipke. Opiši (skiciraj) kako izgledaju osnovni modovi titranja za male amplitude i odredi njihove frekvencije.

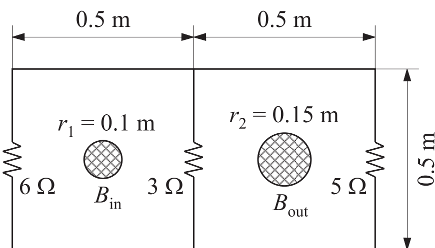
Uputa: Za male kutove vrijedi aproksimacija $\cos\Theta \approx 1$, $\sin\Theta \approx \Theta$.



2. Od triju malih kuglica srednja ima masu M, ostale dvije mase m. Četvrta kuglica mase m nalijeće na njih brzinom v. Kuglice se nalaze na glatkoj površini, a sudari su savršeno elastični. Odredi brzine kuglica poslije sudara ako je $M = 5m$ i broj sudara.



3.



Dvije beskonačno duge zavojnice (na slici prikazane u presjeku) prolaze kroz strujni krug kao na slici. Magnetske indukcije B unutar svake zavojnice imaju jednak iznos koji se mijenja u vremenu po zakonu $B = B_0 + 100 \cdot t$ [T], ali su im smjerovi međusobno suprotni i okomiti na ravninu papira! Odredi jakost struje koja prolazi kroz svaki otpornik. Magnetska indukcija izvan zavojnica je nula!

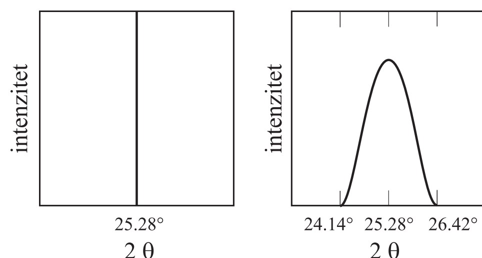
4. Neustrašiva biciklistica Marlena vozi "downhill", tj. spušta se niz brdo velikom brzinom. Odjednom opaža da je most ispred nje urušen i da se treba naglo zaustaviti! Koliko je najveće usporenje kojim se može spuštati, a da se stražnji kotač ne odvoji od zemlje? Nagib brda je $20°$. Na ravnoj cesti, središte mase sustava Marlena-bicikl nalazi se u točki 1.05 m iznad zemlje, 65 cm iza osi prednjeg kotača i 35 cm ispred osi stražnjeg kotača. Pretpostavi da se gume ne kližu!

4. grupa

1. Monokristal bakra obasjava se rentgenskim zrakama valne duljine 154.05 pm s ciljem određivanja razmaka među kristalnim ravninama. Uski paralelni snop zračenja dolazi iz fiksnog smjera, reflektira se na monokristalu koji se polagano okreće oko svoje osi, te potom detektor mjeri ovisnost intenziteta reflektiranog snopa o kutu skretanja zrake. Detektor bilježi jaki intenzitet kada je reflektirana zraka otklonjena za $25.28°$ od smjera dolaska upadne zrake.

a) Koliki je razmak među ravninama na kojima se događa ova Braggova refleksija, ako je poznato da je to najmanji kut pod kojim se ona događa?

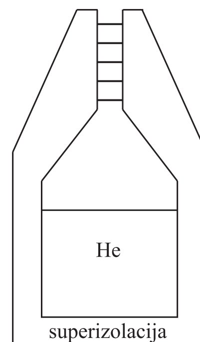
b) Mjerenjem makroskopski velikih kristala ovisnost intenziteta o kutu skretanja vrlo je oštra funkcija prikazana na lijevoj slici. Za kristaliće nanometarskih dimenzija linija postaje proširena. Koristeći se desnom slikom približno izračunaj debljinu kristalića. Uputa: minimumi s lijeve i desne strane posljedica su difrakcije na konačnom broju ravnina čije ste razmake već izračunali.



2. Kristal kvarca čiji su indeksi loma $n_i = 1.553$ za izvanrednu zraku i $n_r = 1.544$ za redovnu zraku oblikovan je kao tanka pločica debljine 0.12 mm tako da mu je optička os paralelna s površinom pločice. Pločica se postavi između dva polarizatora međusobno okomitih osi polarizacije, a os pločice čini kut od 45° s osima polarizatora te su ravnine dvaju polarizatora i kvarcne pločice međusobno paralelne.

Koje valne duljine vidljive svjetlosti (400-750 nm) će proći kroz sustav s najvećim intenzitetom?

3. Spremnik za tekući helij izoliran je takozvanim superizolatorom te je dotok topline iz okoline kroz njegove stijenke vrlo mali. Na vrhu spremnika nalazi se dugi otvor kružnog poprečnog presjeka promjera 4 cm. Da bi se smanjio dovod topline zračenjem, u otvor se stavi pet razmaknutih kružnih poklopaca neznatno manjeg promjera. Poklopce, kao i površinu tekućeg helija i okolinu smatrajte crnim tijelima. Tekući helij je temperature 4.2 K, a okolina je na 300 K. Kolika je temperatura svakog poklopca? Koliko topline ulazi zračenjem kroz otvor preko tih pet poklopaca do tekućine, a koliko bi ulazilo kad poklopaca ne bi bilo? Koliko litara tekućeg helija bi isparavalo u oba slučaja u jednom danu, ako je poznata latentna toplina isparavanja od 20 900 J/ kg i gustoća tekućeg helija od 0.125 kg/ L? Zanemarite vođenje topline i strujanje, a promatrajte samo zračenje. U stvarnosti tekućina će još brže isparavati.



4. Sudaranjem brzih elementarnih čestica s mirujućima mogu nastajati nove čestice. Dio kinetičke energije brze čestice može se pretvoriti u masu nove čestice. Sudarom protona s protonom mogu nastati pozitivan i negativan kaon: $\mathrm{p} + \mathrm{p} \rightarrow \mathrm{p} + \mathrm{p} + \mathrm{K}^{+} + \mathrm{K}^{-}$. Energija mirovanja kaona je 493.7 MeV, a protona 938.3 MeV. Kolika je najmanja kinetička energija gibajućeg protona potrebna za tu reakciju? Koristite sustav koji vam se čini prikladnijim, no pazite na relativističke transformacije brzine!

Kolika je najmanja ukupna kinetička energija obaju protona potrebna za napisani proces u slučaju kad bi se oba protona gibala istom brzinom jedan prema drugom?

Usporedite obje izračunate najmanje kinetičke energije s energijom mirovanja kaona! Kakav biste ubrzivač protona stoga preporučili izgraditi?

Konstante:
$e = 1.6 \cdot 10^{-19}$ C, $c = 3 \cdot 10^{8}\ \mathrm{ms}^{-1}$, $h = 6.626 \cdot 10^{-34}$ Js, $\sigma = 5.67 \cdot 10^{-8}\ \mathrm{Wm}^{-2}\mathrm{K}^{-4}$.

Eksperimentalni zadaci

1. grupa

Određivanje koeficijenta tijela drvenog kvadra s podlogom

Pribor: kugla nepoznate mase, kvadrat nepoznate mase, stalak, nit i ravnalo.

Zadatak:

a) Objasniti postupak i fizikalne osnove mjerenja i koeficijenta trenja kvadra s podlogom.

b) Odrediti koeficijent trenja.

c) Provesti osnovni račun pogreške.

2. grupa

Atmosferski tlak

Pribor: prozirna cijev duga oko 70 cm promjera 5 – 10 mm, posuda s vodom visoka oko 50 cm, ravnalo dugo oko 50 cm s mjernom skalom i milimetarski papir.

Zadatak:

a) teorijski obrazložiti i skicirati postupak mjerenja.

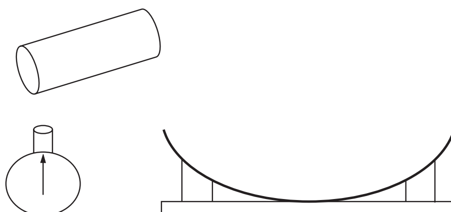
b) Napraviti 10 mjerenja, podatke prikazati tabelarno i odrediti srednju vrijednost atmosferskog tlaka.

c) Izmjerene podatke prikazati grafički na milimetarskom papiru, tako da graf možemo aproksimirati pravcem i pomoću tog grafa odrediti vrijednost atmosferskog tlaka.

3. grupa

Pribor: polukružno zakrivljeni žljeb, matalni valjak i zaporni sat.

Zadatak: Uporabom *isključivo* priloženih sredstava treba:



a) Odrediti polumjer zakrivljenosti žljeba.

b) Odrediti omjer prigušenja gibanja valjka po žljebu (δ-dekrement).

c) Nacrtati A, t-graf (amplituda, vrijeme).

d) Odrediti Q-faktor (faktor dobrote).

e) Izvesti potrebne relacije.

Obavezno napisati *legendu* korištenih oznaka!

Napomena. Trokut ili ravnalo *nije* pribor i može se koristiti **samo** za rješavanje zadataka pod b) i c).

4. grupa

Pribor: laser, optička rešetka (100 zareza po 1 mm), uzorak (A, B, C, ...), zastor, ravnalo i pastelin (za učvršćivanje pribora).

Zadatak:

a) Određivanje λ lasera.

b) Određivanje gustoće tkanja zadanih uzoraka.

c) Objasniti teorijsku osnovu za rješavanje zadataka.

d) Prikazati rezultate tablično i poredati od najveće do najmanje gustoće.

e) Provesti račun pogreške.

Napomena. Zadatak raditi samo zadanim priborom; učenik koristi svoj kalkulator i pribor za pisanje; na uradak obavezno upisati broj uzorka (1A, 1B, 1C, 2A, 2B, 2C, ...).

Nikola Tesla – svjetlo našeg doba

Vesna Špac[1], *Našice*

U sklopu proslave 150. godine rođenja Nikole Tesle, aktiv nastavnika prirodne grupe predmeta i elektrotehnike Srednje škole Isidora Kršnjavoga u Našicama zajedno s županijskim aktivom fizičara osječko-baranjske županije, pridružio se proslavi Tesline godine organizacijom predavanja "Nikola Tesla – svjetlo našeg doba".

Na proziv ravnatelja škole gospodina Željka Fijaka, troje znanstvenika iz Zagreba, koji bolje poznaju život i djelo Nikole Tesle, održali su predavanja za učenike, nastavnike fizike i matematike, elektrotehnike te mlade znanstvenike Odjela za fiziku Sveučilišta u Osijeku. Dr. Ana Smontara s Instituta za fiziku u Zagrebu u okviru svojeg predavanja *Život i djelo Nikole Tesle* upoznala je audiotorij s njegovim odrastanjem, školovanjem, i životnim postignućima. Dr. Đuro Drobac, s istog Instituta, stručnjak u području magnetizma, govorio je o jednom od najvažnijih Teslinih otkrića, *Rotacionom magnetskom polju*. Profesor Zvonimir Šipuš, s Fakulteta elektrotehnike i računarstva u Zagrebu, stručnjak u području radiokomunikacija upoznao nas je s Teslinim izučavanjem radiovalova. I na kraju svojeg predavanja dodatno nas je obradovao svojim stručnim osvrtom na nedavni rad mladog hrvatskog znanstvenika Marina Soljačića u području bežičnog prijenosa energije.

Predavanja su održana 24. studenog ove godine u višenamjenskoj dvorani naše škole. Bila su popraćena i demonstracijskim pokusima (vidi srednju stranicu lista), posebice predavanja dr. Drobca i prof. Šipuša. Svi smo gotovo punih tri sata s velikom pažnjom slušali predavače. Među nama kao slušatelji bili su i rukovodeći ljudi Cementare Našice, inženjeri elektrotehnike gospoda Bartolović i Umiljanović. Cementara Našice svojim sponzorstvom omogućila je i organizaciju ovih predavanja.

Hvala svima na ovom lijepom događanju!

[1] Autorica je profesorica savjetnica fizike na Srednjoj školi Isidora Kršnjavoga i predsjednica aktiva prirodne grupe predmeta na školi.



Što je nanotehnologija?

Ante Bilušić[1], *Split*

Na vrata nam kuca nova znanstvena i tehnološka revolucija. Već je i dobila ime: nanotehnologija. Danas dati točnu definiciju pojma 'nanotehnologija' nije nimalo jednostavno: stroža definicija govori o proučavanju i kontroli pojava i materije na prostornoj skali manjoj od 100 nm (odnosno, 10^{-7} m). U cilju boljeg razumijevanja trenutnog stanja i perspektiva nanotehnologije, uredništvo je znanstvenog časopisa *Nature Nanotechnology* u svom prvom broju anketiralo nekolicinu ljudi iz čitavoga svijeta čija je profesija upravo povezana s nanotehnologijom. Prenosimo vam stavove nekih od njih.

"*Na nanometarskoj prostornoj skali gubi se razlika između kemije, fizike, inženjerstva, matematike ili biologije. Nanotehnologiju možemo definirati trima točkama: (1) veličina se uređaja ili glavnih dijelova opisuje nanometarskom skalom, (2) uređaje je načinio čovjek i (3) svojstva su posljedica isključivo nanometarskih dimenzija.*", kaže Mauro Ferrari, američki profesor molekularne medicine, te dodaje: "*Bavim se nanotehnologijom raka, odnosno nastojim pronaći način kako pobijediti rak korištenjem uistinu sitnih pomagala*". Robert Langer, profesor na američkom MIT-u, ističe da je nanotehnologija "*posebno važna u razvijanju novih matrica za prijenos lijekova po tijelu. Nanočestice koje na sebe vežu lijek zbog svojih malih dimenzija mogu putovati krvotokom, ući u stanicu i u njoj ispustiti svoj teret*". Jackie Ying, direktor Instituta za bioinženjerstvo i nantehnologiju iz Singapura kaže da nanotehnologiju vidi "*kao oruđe za izgradnju sastavnih dijelova novih materijala, uređaja i sustava*". Na to se nadovezuje i K. Eric Drexler, savjetnik u tvrtki Nanorex, riječima da je "*strateški pravac nanotehnologije razviti strojeve analogne ribosomima, ali s mnogo širim spektrom mogućnosti*". Thomas Theis, jedan od direktora u IBM-ovom istraživačkom centru Watson, kaže da "*mogućnost konstrukcije sve manjih uređaja bitno mijenja postojeća znanstvena i tehnička područja poput medicinske dijagnostike, pretvorbe energije i strukturiranih materijala, a otvara obzore novog, poput kvantnih računala, kvantnog prijenosa informacija ili nanobiotehnologije*". Na kraju spomenimo i riječi australskog znanstvenika Petera Binksa koji kaže "*da ga ne bi iznenadilo da pojam 'nanotehnologija' nestane i ustupi mjesto novima poput 'nanomaterijali' ili 'nanobiotehnologija'*". K tome dodaje da "*kroz 10–15 godina možemo očekivati pojavu elektroničkih uređaja temeljenih na strujnim krugovima i memorijama nanoskopskih dimenzija. Za 10–15 godina primjene nanotehnologije možemo očekivati u farmaceutici i medicinskim instrumentima. A za 25–30 godina bismo mogli dobiti uređaje o kojima danas i ne slutimo!*"

Literatura

[1] Nature Nanotechnology, **1** (2006) 8

[1] Autor je docent na Fakultetu prirodoslovno-matematičkih znanosti i kineziologije Sveučilišta u Splitu (bilusic@pmfst.hr).



Zadaci s prijemnog ispita na Fakultetu elektrotehnike i računarstva u Zagrebu

Kao dio razredbenog postupka u prvom upisnom roku, 11. srpnja 2006. godine održan je test provjere znanja na Fakultetu elektrotehnike i računarstva u Zagrebu. Uz dozvolu ove institucije, donosimo zadatke koji su bili zadani na tom testu.

⋆ ⋆ ⋆

M-1. Vrijednost izraza $\left(\frac{1}{3}\right)^{-5} \cdot 27^3 + (0.25)^2 \cdot 2^5 - (125)^{-\frac{1}{3}} \cdot 10^2$ je

A. 4782951 **B.** 4782952 **C.** 4782953 **D.** 4782954 **E.** 4782955

M-2. U jednoj dvorani broj redova jednak je broju stolica u svakom redu. Ako se broj redova udvostruči, a broj stolica u svakom redu smanji za 10, onda se ukupan broj stolica uveća za 300. Koliki je broj redova?

A. 18 **B.** 28 **C.** 36 **D.** 25 **E.** 30

M-3. Ako jednadžba $x^3 + ax^2 + bx + 3 = 0$ ima rješenja 1 i 2, onda umnožak ab iznosi

A. 3 **B.** 1 **C.** $-\frac{5}{2}$ **D.** $\frac{15}{4}$ **E.** $\frac{5}{4}$

M-4. Rješenje nejednadžbe $\frac{2x^2 - 1}{x^2} \leqslant 1$ je

A. $\langle 0, \frac{1}{2}]$ **B.** $[\frac{1}{2}, 0\rangle \cup \langle 0, \frac{1}{2}]$ **C.** $\langle -\frac{1}{2}, 0\rangle \cup \langle 0, \frac{1}{2}\rangle$ **D.** $[-1, 0\rangle \cup \langle 0, 1]$ **E.** $\langle 0, 1]$

M-5. Kompleksni broj z je rješenje jednadžbe $z^3 = 1$ za koje vrijedi $\operatorname{Im} z > 0$. Tada z^{20} iznosi

A. 1 **B.** $-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ **C.** i **D.** $\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$ **E.** -1

M-6. Koliko rješenja u skupu realnih brojeva ima jednadžba $\log_2(x^2 - 1) = 2 + \log_2 x$?

A. beskonačno **B.** 4 **C.** 3 **D.** 1 **E.** 0

M-7. Zbroj rješenja jednadžbe $4^x - 12 \cdot 2^x + 32 = 0$ je

A. 8 **B.** 12 **C.** 5 **D.** 4 **E.** 3

M-8. Površina trokuta što ga graf funkcije $f(x) = |x - 1|$ zatvara s pravcem $y = \frac{1}{2}x + 1$ iznosi

A. 6 **B.** 3 **C.** 4 **D.** $\frac{3}{2}$ **E.** 2

M-9. Zadana je funkcija $f(x) = 2^{3x+5}$. Vrijednost inverzne funkcije, $f^{-1}(4)$ iznosi

A. $\frac{1}{2}$ **B.** -2 **C.** $\frac{1}{3}$ **D.** -1 **E.** $\frac{1}{4}$

M-10. Zbroj prvog i sedmog člana aritmetičkog niza jednak je 27. Koliki je zbroj trećeg i petog člana?

A. 24 **B.** 25 **C.** 26 **D.** 27 **E.** 28

M-11. U pravokutnom trokutu s katetama 6 i 8 povučena je simetrala na hipotenuzu, koja siječe stranice trokuta u točkama D i E. Udaljenost tih točaka iznosi

A. 3.25 **B.** 3.75 **C.** 3.50 **D.** 3.60 **E.** 3.80

M-12. Polumjer kružnice upisane u romb je 3 cm. Opseg romba je 40 cm. Šiljasti kut romba iznosi

A. $36°52'12''$ **B.** $30°$ **C.** $60°$ **D.** $36°34'11''$ **E.** $35°35'36''$

M-13. Kružnica prolazi kroz dva vrha jednakostraničnog trokuta i kroz njegovo težište. Ako je duljina stranice trokuta $a = \sqrt{3}$, onda polumjer kružnice iznosi

A. 1 **B.** $\frac{5}{4}$ **C.** $\frac{4}{3}$ **D.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **E.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$

M-14. Kocka ima bridove duljine $2\sqrt{3}$. Ako se kroz tri susjedna vrha nekog vrha kocke položi ravnina, onda je udaljenost najdaljeg vrha kocke od te ravnine jednaka

A. $4\sqrt{2}$ **B.** $3\sqrt{2}$ **C.** 3 **D.** 4 **E.** $2\sqrt{5}$

M-15. U stožac površine baze 36π i volumena 96π upisana je kugla. Volumen te kugle je

A. 32π **B.** 36π **C.** $\frac{32}{3}\pi$ **D.** $\frac{64}{3}\pi$ **E.** 64π

M-16. Spremnik za naftu ima oblik uspravnog kružnog valjka polumjera baze 2 m i visine 9 m koji je polegnut tako da su baze okomite, a izvodnice plašta paralelne s tlom. Visina nafte u spremniku je 1 m. Volumen nafte u spremniku iznosi

A. 22.11 m^3 **B.** 11.08 m^3 **C.** 16.52 m^3 **D.** 36.42 m^3 **E.** 26.81 m^3

M-17. Dvije stranice trokuta imaju duljinu 25 cm i 36 cm, te zatvaraju kut od $51°$. Kolika je duljina težišnice treće stranice trokuta?

A. 27.63 cm **B.** 29.81 cm **C.** 31.28 cm **D.** 33.13 cm **E.** 34.97 cm

M-18. Kružnica je točkama A, B, C, D podijeljena u omjeru $1:3:4:7$, a polumjer kružnice iznosi 8. Kolika je površina četverokuta $ABCD$?

A. 80.24 **B.** 81.93 **C.** 83.06 **D.** 83.66 **E.** 84.12

M-19. Ako je $\frac{1}{\operatorname{tg} x} + \frac{1}{\operatorname{ctg} x} = 3$ i $0 < x < \frac{\pi}{4}$, onda $\cos 2x$ iznosi

A. $\frac{\sqrt{5}}{3}$ **B.** $\frac{2}{3}$ **C.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$ **D.** 1 **E.** $\frac{1}{2}$

M-20. Broj realnih rješenja jednadžbe $\sin x = \log x$ iznosi

A. 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 5 **E.** beskonačno

M-21. Zadani su vrhovi $A(1,2)$, $B(3,1)$ jednakostraničnog trokuta ABC. Kako glasi jednadžba pravca na kojem leži visina iz vrha C?

A. $y = x - \frac{1}{2}$ **B.** $y = 2x - \frac{5}{2}$ **C.** $y = 2x + \frac{3}{2}$ **D.** $y = 3x - \frac{9}{2}$ **E.** $y = 2x + 7$

M-22. Točka $T(4,1)$ raspolavlja tetivu kružnice $x^2+y^2=36$. Duljina tetive iznosi
A. 18 **B.** $2\sqrt{19}$ **C.** $2\sqrt{17}$ **D.** $\sqrt{15}$ **E.** 22

M-23. Normala na elipsu $3x^2+4y^2=48$ u točki $(2,3)$ zatvara s koordinatnim osima trokut površine
A. $\frac{1}{2}$ **B.** $\frac{1}{3}$ **C.** $\frac{1}{4}$ **D.** $\frac{1}{5}$ **E.** $\frac{1}{6}$

M-24. Žarišta elipse podudaraju se sa žarištima hiperbole $x^2-y^2=8$ a velika poluos elipse iznosi 5. Kako glasi njezina jednadžba?
A. $9x^2+25y^2=225$ **B.** $2x^2+5y^2=4$ **C.** $x^2+2y^2=8$
D. $x^2+y^2=1$ **E.** $x^2-y^2=1$

F-25. Tijelo se giba brzinom od 10 m/ s po glatkoj podlozi. U jednom trenutku naiđe na hrapavi dio podloge gdje je koeficijent trenja 0.2. Koliko je dug taj hrapavi dio podloge ako tijelu brzina na kraju hrapavog dijela padne na polovinu početne vrijednosti? ($g=9.81\ \mathrm{m\,s^{-2}}$)
A. 19.11 m **B.** 25.48 m **C.** 50.96 m **D.** 38.22 m **E.** 9.56 m

F-26. Težina homogene kugle polumjera 3 cm iznosi 8.65 N. Kolika je gustoća kugle? ($g=9.81\ \mathrm{m\,s^{-2}}$)
A. $2.7\cdot10^3\ \mathrm{kg\,m^{-3}}$ **B.** $3.2\cdot10^3\ \mathrm{kg\,m^{-3}}$ **C.** $4.4\cdot10^3\ \mathrm{kg\,m^{-3}}$
D. $5.1\cdot10^3\ \mathrm{kg\,m^{-3}}$ **E.** $7.8\cdot10^3\ \mathrm{kg\,m^{-3}}$

F-27. Automobil s raketnim pogonom započne se iz stanja mirovanja ubrzavati zbog potiska rakete. Potisak traje 5 s, a ubrzanje iznosi 5 $\mathrm{m\,s^{-2}}$. Nakon gašenja raketnog pogona automobil se nastavi gibati konstantnom brzinom. Koliki je ukupan put prevalio automobil tijekom 10 s?
A. 155 m **B.** 197.5 m **C.** 187.5 m **D.** 205 m **E.** 169 m

F-28. Tijelo se giba niz dugu kosinu nagiba 15° i na njega djeluje sila trenja po iznosu jednaka 10% težine tijela. Koliki će put prijeći to tijelo u 10 s ako je krenulo iz mirovanja? ($g=9.81\ \mathrm{m\,s^{-2}}$)
A. 11.3 m **B.** 79.9 m **C.** 20.7 m **D.** 25.4 m **E.** 40.1 m

F-29. Staklena kuglica pada u vodi ubrzanjem 5.8 $\mathrm{m\,s^{-2}}$. Kolika je gustoća stakla? (Otpor se zanemaruje, $g=9.81\ \mathrm{m\,s^{-2}}$, gustoća vode je $10^3\ \mathrm{kg\,m^{-3}}$.)
A. $2.45\cdot10^3\ \mathrm{kg\,m^{-3}}$ **B.** $10^4\ \mathrm{kg\,m^{-3}}$ **C.** $3.2\cdot10^3\ \mathrm{kg\,m^{-3}}$
D. $5\cdot10^3\ \mathrm{kg\,m^{-3}}$ **E.** $8.9\cdot10^3\ \mathrm{kg\,m^{-3}}$

F-30. Dvije posude spojene su pomoću cijevi zanemariva volumena na kojoj se nalazi ventil. Kad je ventil zatvoren, tlak plina u prvoj posudi je $p_1=0.2$ MPa, a u drugoj $p_2=0.4$ MPa. U posudama se nalaze jednake količine istog plina na istoj temperaturi. Koliki će tlak biti u posudama nakon otvaranja ventila?
A. 0.27 MPa **B.** 0.20 MPa **C.** 0.40 MPa **D.** 0.30 MPa **E.** 0.60 MPa

F-31. U kalorimetar u kojem se nalazi 2 kg leda na temperaturi -5°C stavi se 0.2 kg vode na temperaturi 5°C. Kolika će biti masa leda u kalorimetru kada se uspostavi ravnoteža? (Specifični toplinski kapacitet leda je $2.1\cdot10^3\ \mathrm{J\,kg^{-1}K^{-1}}$. Specifični toplinski kapacitet vode je $4.19\cdot10^3\ \mathrm{J\,kg^{-1}K^{-1}}$, a specifična toplina taljenja leda

$3.33 \cdot 10^5$ J kg^{-1}.)
A. 1.95 kg **B.** 2.05 kg **C.** 2.2 kg **D.** 1.85 kg **E.** 2.15 kg

F-32. U prvom slučaju kuglica matematičkog njihala podigne se do objesišta i pusti da slobodno pada. U drugom slučaju kuglica se otkloni za mali kut iz ravnotežnog položaja i ispusti da titra. Koliko iznosi omjer vremena u kojem kuglica stigne u točku ravnotežnog položaja u prvom i drugom slučaju?
A. 0.90 **B.** 2 **C.** 0.81 **D.** 0.5 **E.** 1.51

F-33. Izvor struje priključimo jednom na otpornik otpora 0.64 Ω, a drugi put na otpornik otpora 2.25 Ω. U oba je slučaja snaga otpornika jednaka. Koliki je unutrašnji otpor izvora?
A. 1.2 Ω **B.** 0.1 Ω **C.** 2.1 Ω **D.** 0.5 Ω **E.** 3 Ω

F-34. Elektron ubrzan razlikom potencijala 300 V uleti u homogeno magnetsko polje indukcije $B = 2.5 \cdot 10^{-4}$ T. Kolika sila djeluje na elektron ako je brzina elektrona okomita na magnetsko polje? (Masa elektrona je $9.11 \cdot 10^{-31}$ kg, a naboj elektrona je $1.6 \cdot 10^{-19}$ C.)
A. $5.2 \cdot 10^{-16}$ N **B.** $4.1 \cdot 10^{-16}$ N **C.** $1.0 \cdot 10^{-16}$ N
D. $2.5 \cdot 10^{-16}$ N **E.** $1.6 \cdot 10^{-16}$ N

F-35. Iz komada žice konstantnog presjeka otpora 100 Ω načinjen je prsten. U točkama koje dijele opseg prstena u omjeru 1 : 9 spojeni su vodiči kojima teče struja. Koliki je otpor između tih točaka?
A. 100 Ω **B.** 10 Ω **C.** 9 Ω **D.** 90 Ω **E.** 5 Ω

F-36. Pločasti kodenzator spojen je na izvor stalnog napona. Koliko će se puta povećati naboj na pločama kondenzatora ako se ploče udaljene 5 cm približe za 2 cm?
A. 1.67 puta **B.** 0.6 puta **C.** 2 puta **D.** 2.5 puta **E.** 3 puta

F-37. Koliki je kut prema okomici na mirnu površinu mora pod kojim ronilac pod vodom vidi zalaz Sunca u more? Indeks loma zraka je $n_1 = 1$, a morske vode $n_2 = 4/3$.
A. 44.2° **B.** 48.6° **C.** 45.7° **D.** 47.6° **E.** 49.8°

F-38. Koliki se napon inducira na krajevima zavojnice induktiviteta 0.08 H ako se struja kroz zavojnicu mijenja brzinom 1100 A s^{-1}?
A. $7.3 \cdot 10^5$ V **B.** 88 V **C.** 0.088 V **D.** 880 V **E.** 0 V

F-39. Ispred konvergentne leće žarišne udaljenosti 20 cm stavljen je svijetli predmet na udaljenost 60 cm od tjemena, pa se dobije realna slika predmeta. Ako se na mjesto leće stavi sferno zrcalo, koliki mora biti njegov polumjer zakrivljenosti da se dobije virtualna slika svijetlog predmeta na istom mjestu gdje je bila realna slika dobijena lećom?
A. 30 cm **B.** −60 cm **C.** −20 cm **D.** −120 cm **E.** 360 cm

F-40. Kolika je De Broglijeva valna duljina elektrona čija je kinetička energija $8.0 \cdot 10^{-18}$ J? (Masa elektrona iznosi $9.11 \cdot 10^{-31}$ kg, a Planckova konstanta je $6.626 \cdot 10^{-34}$ J s.)
A. $7.68 \cdot 10^{-10}$ m **B.** $5.75 \cdot 10^{-10}$ m **C.** $3.34 \cdot 10^{-10}$ m
D. $1.74 \cdot 10^{-10}$ m **E.** $2.26 \cdot 10^{-10}$ m

M–1	A	M–2	E	M–3	D	M–4	D
M–5	B	M–6	D	M–7	C	M–8	B
M–9	D	M–10	D	M–11	B	M–12	A
M–13	A	M–14	D	M–15	B	M–16	A
M–17	A	M–18	B	M–19	A	M–20	C
M–21	B	M–22	B	M–23	C	M–24	A
F–25	A	F–26	E	F–27	C	F–28	B
F–29	A	F–30	A	F–31	B	F–32	A
F–33	A	F–34	B	F–35	C	F–36	A
F–37	B	F–38	B	F–39	D	F–40	D

⋆ ⋆ ⋆



Čestit Božić

i

sretnu novu godinu

želi vam uredništvo MFL-*a*





Pri odigravanju izvođač bira optimalnu liniju igre, onu koja zadovoljava neke unaprijed postavljene kriterije. U tom je smislu svaka partija bridža mali optimizacijski problem u uvjetima nepotpunih informacija. Najčešća strategija izvođača jest ona koja maksimizira očekivani broj osvojenih štihova. Međutim, vrlo često se bira druga strategija, koja maksimizira vjerojatnost ostvarivanja kontrakta.

Očekivani broj štihova i vjerojatnost uspjeha ovise o slučajnim čimbenicima — nepoznatoj razdiobi karata u protivničkim listovima. Pogledajmo sljedeći primjer.

♠ A J 6 5 4

	N	
W		E
	S	

♠ 10 3 2

Pretpostavimo da je pik boja aduta. S obzirom da nedostaju (od visokih karata) kralj i dama, protivnici sigurno moraju osvojiti barem jedan štih. Dakle, maksimalni broj štihova za izvođača je 4. Minimalan broj sigurnih štihova je samo 2, ukoliko je distribucija boje kod protivnika 5-0.

Kako će izvođač odigrati ovu kombinaciju? To ovisi o njegovoj strategiji. Ako je strategija maksimizirati očekivani broj štihova, tada je optimalna igra: **a)** mala karta prema dečku, a zatim as u drugom krugu. Igrajući na ovaj način, izvođač će osvojiti četiri štiha s vjerojatnošću 37%, a očekivani broj štihova iznosi 3.19.

Pretpostavimo da su izvođaču za ostvarenje kontrakta dovoljna tri štiha. Tad se njegova strategija mijenja. On želi maksimizirati vjerojatnost za ostvarivanje triju štihova. U tom je slučaju optimalna igra: **b)** as u prvom štihu, a zatim mala karta prema desetki! Ova strategija propada samo kod protivničke distribucije 5-0, pa je vjerojatnost uspjeha 96%.

Opravdajmo ove račune. Prisjetimo se sljedeće tablice:

5 karata			
3-2	67.8%	(20)	3.39%
4-1	28.3%	(10)	2.83%
5-0	3.9%	(2)	1.95%

U njoj su dane vjerojatnosti razdiobe preostalih karata. Broj u zagradama govori na koliko se načina tih preostalih pet karata može podijeliti, brojevi u posljednjem stupcu su vjerojatnosti za svaku konkretnu razdiobu tog tipa.

Prebrojimo sad povoljne kombinacije za osvajanje četiriju štihova, odabravši strategiju **a)**. Povoljni rasporedi, s pripadnim vjerojatnostima su:

KQx	–	xx	(3)	10.17%
Kx	–	Qxx	(3)	10.17%
Qx	–	Kxx	(3)	10.17%
KQ	–	987	(1)	3.39%
987	–	KQ	(1)	3.39%

Ovdje x označava bilo koju od karata 9, 8 ili 7. Zbrajanjem vjerojatnosti u posljednjem stupcu, dobivamo 37.3%.

Strategija **b)** propada samo kod razdiobe 5-0. Vjerojatnost toga je 3.9%. Međutim, ako izvođač primijeni strategiju **a)**, tad je vjerojatnost da će osvojiti barem tri štiha smanjena. Naime, u tom su slučaju i sljedeće situacije nepovoljne za njega:

K987	–	Q	(1)	2.83%
Q987	–	K	(1)	2.83%

Prema tome, vjerojatnost osvajanja barem tri štiha je u ovom slučaju 90.4%.

Broj osvojenih štihova slučajna je varijabla. Ona poprima vrijednosti $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, $x_3 = 4$ s vjerojatnostima p_1, p_2, p_3 koje ovise o izabranoj strategiji. Očekivani broj štihova jednak je zbroju umnožaka $x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3$.

1) Provjeri da je očekivani broj za strategiju **a)** jednak 3.19.

2) Izračunaj očekivani broj za strategiju **b)**.

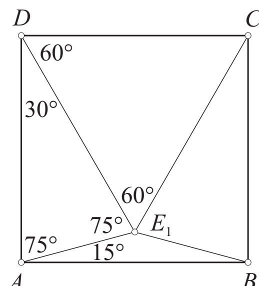
3) Neiskusan protivnik na poziciji **E** odigrat će honera (kralja ili damu) iz *Kx* ili *Qx*, kad izvođač odigra u prvom štihu malu kartu prema desetki. Dokaži da je u igri protiv takvog protivnika optimalna strategija **c)** mala karta prema desetki, a zatim mala karta prema dečku. Dokaži da je očekivani broj štihova u ovom slučaju 3.24.

4) Odredi optimalnu igru ako izvođač posjeduje kombinaciju AKJ109–876. Koliki je očekivani broj štihova?

Neven Elezović, Zagreb

Rješenje nagradnog natječaja br. 175

Rješenje. Riješimo inverzni zadatak: dokažimo, ako je trokut CDE_1 jednskostraničan, tada su u trokutu ABE_1 kutovi uz bazu $\overline{AB}$ jednaki 15°.



Kako je $\sphericalangle ADE_1 = 30^\circ$ i $|DE_1| = |AD|$ dobivamo $\sphericalangle E_1AD = \sphericalangle AE_1D = 75^\circ$. Odavde je $\sphericalangle E_1AB = 15^\circ$. Analogno je $\sphericalangle E_1BA = 15^\circ$.

Prema tome, dokazali smo da je vrh E_1, jednakostraničnog trokuta CDE_1 upravo vrh E, koji je dan u zadatku. Zato je trokut CDE jednakostraničan.

Knjigom su nagrađeni sljedeći rješavatelji:

1. *Igor Boban* (3), III. gimnazija, Split; 2. *Marko Čolić* (3), III. gimnazija, Osijek; 3. *Vlatka Kos Grabar* (2), Srednja škola, Zlatar; 4. *Marko Hajba* (4), Gimnazija P. Preradovića, Virovitica; 5. *Adrian Satja Kurdija* (8, OŠ), OŠ Mladost, Zagreb; 6. *Mario Menix* (3), Gimnazija Metković, Metković; 7. *Sara Muhvić* (2), III. gimnazija, Osijek; 8. *Silvija Ostroški* (1), I. gimnazija, Varaždin; 9. *Tomislav Pozaić* (2), Srednja škola, Zlatar; 10. *Šimun Romić* (3), Gimnazija Metković, Metković; 11. *Maja Truhar* (4), Gospodarska škola, Čakovec.

Riješili zadatke iz br. 4/224

(Broj u zagradi označava razred–godište srednje–osnovne škole.)

a) Iz matematike: *Mirta Dumančić* (2), III. gimnazija, Osijek, 2993, 2994; *Vlatka Kos Grabar* (2), Opća gimnazija Zlatar, Zlatar, 2993; *Gabrijel Guberović* (2), Gimnazija Nova Gradiška, Nova Gradiška, 2993–2995, 2997; *Mario Menix* (3), Gimnazija Metković, Metković, 2993, 2994; *Pavao Menix* (2), Gimnazija Metković, Metković, 2997; *Sara Muhvić* (2), III. gimnazija, Osijek, 2993, 2994, 2997, 3004; *Šimun Romić* (3), Gimnazija Metković, Metković, 2993–2995, 2997, 3006; *Vanja Ubović* (1), Gimnazija P. Preradovića, Virovitica, 2997.

b) Iz fizike: *Vanja Ubović* (1), Gimnazija P. Preradovića, Virovitica, 246–248; *Katarina Vatavuk* (7), OŠ Fausta Vrančića, Šibenik, 246, 248; *Gabrijel Guberović* (2), Gimnazija Nova Gradiška, Nova Gradiška, 1336.

Nagradni natječaj br. 177

Nađi dva uzastopna 100-znamenkasta prirodna broja takva da je zbroj znamenaka svakog od njih potpun kvadrat.

SVIM SURADNICIMA

U Matematičko–fizičkom listu objavljuju se članci iz matematike, fizike i informatike, s malim prilogom iz astronomije, zadaci i rješenja, prikazi natjecanja i ljetnih škola iz matematike i fizike, zanimljivosti u obliku članaka i zadataka od učenika, profesora i ostalih matematičara, novosti iz znanosti, zadaci s razredbenih (kvalifikacijskih) ispita, zabavna matematika i nagradni natječaj.

Prilozi trebaju biti napisani računalom (Word, Tex, Latex) ili pisaćim strojem sa širokim proredom na formatu A-4. Uz kopiju pošaljite i disketu.

Slike trebaju biti jasno nacrtane na posebnom papiru i pogodne za presnimavanje. Slike crtane računalom (eps, tif, gif, jpg i sl.) pošaljite i na disketi.

Članci neka ne budu dulji od osam stranica, a ako je to potrebno neka budu napisani u nastavcima.

Pozivaju se učenici da pošalju članak o nekoj od spomenutih tema, originalne zadatke s rješenjima ili prikaze nekih manifestacija (ljetne škole, susreti učenika, rad školske grupe).

Kako se rukopisi ne vraćaju, sačuvajte original a pošaljite kopiju na papiru formata A-4.

Svi rukopisi podliježu recenziji redakcije ili neke stručne osobe za određeno područje.

Prilozi se šalju na adresu ovog časopisa koja je na drugoj stranici omota.

RJEŠAVATELJIMA ZADATAKA

Svako rješenje neka bude napisano na **posebnom** papiru (formata A-4 ili A-5) i to samo na **jednoj** strani papira. Uz svako rješenje na vrhu papira treba potpuno ispisati tekst zadatka. Svako rješenje treba čitljivo potpisati (ime i prezime), naznačiti razred, školu i mjesto.

MATEMATIČKO–FIZIČKI LIST (MFL) za učenike i nastavnike.
Izlazi u četiri broja tokom školske godine. Izdaju:
HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO i HRVATSKO FIZIKALNO DRUŠTVO
Pretplata za 2006./2007. je 60 kuna, pojedini broj stoji 15 kuna.
Za inozemstvo pretplata je 16 EUR, a pojedini broj 4 EUR.
(Uplata se može obaviti u kunama ili devizama po tečaju u trenutku plaćanja.)
Adresa lista je: "Matematičko–fizički list, Ilica 16/III, 10001 Zagreb,
tel./fax (01) 4833-891.
Uplate na žiro račun: *Hrvatsko fizikalno društvo,* Zagreb, br. 2360000-1101301202 (kune),
ZBZ d.d. SWIFT ZABA HRXX 70313-978-3239853 (EUR).
Na uplatnici kao svrhu uplate molimo naznačite "za MFL"!
Molimo Vas da kod svake uplate pošaljete (foto)kopiju uplatnice
ili da nas obavijestite telefonom ili elektronskom poštom o uplati.
URL: http://www.math.hr/mfl

SADRŽAJ

List financijski pomaže Ministarstvo znanosti, obrazovanja i športa Republike Hrvatske.

Slog i prijelom: Element, Zagreb, Menčetićeva 2
Tisak: Sveučilišna tiskara d.o.o., Zagreb, Trg maršala Tita 14
Naklada ovog broja 4000 primjeraka

Umjetnički prikaz ledenog planeta OGLE-2005-BLG-390Lb u orbiti oko svoje matične zvijezde tipa crveni patuljak. Riječ je o prvom hladnom čvrstom planetu male mase pronađenom izvan Sunčevog sustava; više u prilogu dr. Dijane Dominis Prester na stranici 192. Ilustraciju je izradio G. Bacon sa Space Telescope Science Institutea.

Dragi čitatelji!

Ovog ljeta će Hrvatska biti domaćin Međunarodne olimpijade iz informatike, a 2010. godine će organizirati 41. međunarodnu olimpijadu iz fizike. Godine 1985. u Portorožu bila je održana 16. međunarodna olimpijada iz fizike, na kojoj je sudjelovalo 20 država svijeta. Očekuje se da će ih za par godina biti i više od 90. To je značajan događaj za našu zemlju, veliko priznanje, ali i odgovornost našeg obrazovnog sustava. Sa željom da se svi što bolje pripremimo za taj događaj, objavljivat ćemo, počevši od ovog broja, priloge o dasadašnjim olimpijadama iz fizike, od njenih početaka do danas, s posebnim osvrtom na sudjelovanje učenika naših prostora na tom međunarodnom natjecanju.

U ovom broju možete pročitati prilog mladog znanstvenika Eugena Vujića iz Zagreba, Efekt gravitacijske praćke, gdje se opisuje promjena smjera i iznosa brzine sonde u heliocentričnom sustavu, zbog njenog prolaska pored planeta. U rubrici *Iz moje radionice i laboratorija* profesor fizike Josip Pajić iz Šibenika ima zanimljiv prilog Određivanje topliske vodljivosti metala. Dijana Dominis Prester iz Rijeke opisuje otkriće planeta sličnog Zemlji pomoću metode gravitacijske leće, koji je od nas udaljen oko 20 tisuća godina svjetlosti.

Sanela Jukić, profesorica matematike iz Slatine, i Sanja Varošanec, redovita profesorica na PMF-u u Zagrebu, imaju prilog, Teorem o majorizaciji i primjene, gdje se koriste konveksne funkcije. Profesor matematike iz Osijeka, Ilija Ilišević, daje šest dokaza jedne trigonometrijske nejednakosti. Neven Bogdanić, profesor u mirovini iz Splita piše o matematičarima slavenskih korijena. Boško Šego s Ekonomskog fakulteta u Zagrebu i Marija Špekuljak, apsolventica s istog fakulteta, imaju prilog, Vječna renta, iz ekonomske matematike.

Igor Rončević, profesor fizike i politehnike iz Rijeke i Goranka Bilalbegović, izvanredni profesor fizike iz Zagreba u prilogu Sudari kuglica: simulacija u programskom jeziku C, uz teorijsku obradu problema navode i primjenu za njegovo numeričko rješavanje.

Na Međunarodnom matematičkom natjecanju "Klokan bez granica", koje se prošle godine održalo sredinom ožujka sudjelovalo je 3 600 000 učenika, od drugog razreda osnovne škole do četvrtog razreda srednje škole, iz 38 država, a iz Hrvatske ih je bilo preko 20 000. Donosimo zadatke koje su rješavali učenici od drugog do četvrtog razreda srednje škole.

Na zadnjoj strani omota prisjetili smo se znanstvenika Petra Colića, povodom 20-godišnjice smrti, koji je napisao udžbenike iz fizike za srednje škole, surađivao u "Matematičko-fizičkom listu", a bio je i urednik časopisa "Priroda".

Uredništvo lista



FIZIKA

Efekt gravitacijske praćke

Eugen Vujić[1], *Zagreb*

Uvod

Efekt gravitacijske praćke (eng. *gravitational assist* ili *slingshot effect*) je promjena smjera i iznosa brzine sonde u heliocentričnom sustavu, uslijed njenog prolaska pored planeta. Ta se pojava može javljati i kod prolazaka kometa kroz heliocentrični sustav, naročito zbog mogućih utjecaja najmasivnijeg planeta Jupitera i ostalih planeta. Proučavanja putanja kometa krajem 19. st. su ukazivala na promjenu njihove putanje prilikom bliskog prolaska pored Jupitera. Samo Sunce unutar heliocentričnog sustava ne može dati taj efekt, budući da njegov centar u njemu miruje. Teorija efekta se počela razvijati ranih 60-tih godina 20. st., a prve njegove postavke se pripisuju američkom matematičaru *Michaelu Minovitchu*. Kao posljedica gibanja sonde u gravitacijskom polju planeta koji se giba oko Sunca (odnosno u području gdje dominira gravitacijsko polje planeta u odnosu na gravitacijska polja Sunca i drugih planeta), može se javljati povećanje ili smanjenje brzine sonde, praćeno promjenom smjera brzine. Ovaj efekt se često koristi prilikom slanja sondi prema vanjskim planetima ili se ona šalje prema vanjskom planetu, pa uz njegovu pomoć putem gravitacijske praćke napušta heliocentrični sustav. Gravitacijska praćka se koristi zato jer se postižu veće promjene brzine koje su potrebne za neke manevre, nego što bi se dobile ispaljivanjem iz raketnih motora. Osim toga, moguća je i ušteda goriva, a za neke manevre ne postoje dovoljno veliki raketni motori, pa se koristi pomoć vanjskih planeta putem gravitacijske praćke. Efekt gravitacijske praćke je korišten kao manevar u mnogim svemirskim misijama: susret Pioneera 10 s Jupiterom; susreti Pioneera 11 s Jupiterom i Saturnom; susreti Voyagera 1 s Jupiterom i Saturnom; susreti Voyagera 2 s Jupiterom, Saturnom, Uranom i Neptunom; susreti Marinera 10 s Venerom i Merkurom; susreti Cassinija s Venerom, Zemljom i Jupiterom; susret Ulyssesa s Jupiterom kako bi se postigla putanja sonde izvan ravnine ekliptike; uzastopni susreti sonde Galileo s Jupiterovim satelitima kada se ona nalazila u putanji oko Jupitera. U ovom članku će biti izložen idealiziran pristup ovom problemu, a napomenut će se i neki njegovi nedostaci, odnosno korekcije kojih treba biti svijestan prilikom točnog proračuna ovog efekta.

[1] Autor je znanstveni novak Geofizičkog odsjeka Prirodoslovno-matematičkog fakulteta u Zagrebu. Bavi se mjerenjem jakosti Zemljinog magnetskog polja na području Hrvatske, eugvujic@gfz.hr.

Gibanje sonde u heliocentričnom sustavu

Planeti se gibaju po eliptičnim putanjama oko Sunca, a može se naći područje oko planeta gdje će njegovo gravitacijsko polje biti iznosom jače od polja Sunca i doprinosa ostalih planeta. Udaljenosti od centra planeta do položaja u kojima je njegovo gravitacijsko polje jednako gravitacijskom polju Sunca, iznose približno: za Merkur $0.02 \cdot 10^6$ km, Veneru $0.17 \cdot 10^6$ km, Zemlju $0.26 \cdot 10^6$ km, Mars $0.13 \cdot 10^6$ km, Jupiter $23.4 \cdot 10^6$ km, Saturn $23.9 \cdot 10^6$ km, Uran $18.8 \cdot 10^6$ km i Neptun $32.1 \cdot 10^6$ km. Te udaljenosti možemo odrediti poznavajući srednju udaljenost planeta od Sunca, mase planeta i masu Sunca. Na manjim udaljenostima od tih je gravitacijsko polje planeta jače od polja Sunca.

Nadalje promatrajmo gibanje sonde u gravitacijskom polju planeta, i to u onim područjima gdje je gravitacijsko djelovanje Sunca zanemarivo ili puno kraće u odnosu na djelovanje planeta, a sonda se na početku nalazi dovoljno daleko od planeta i giba se brzinom $\vec{v}_1$. Sonda se nakon susreta giba na velikim udaljenostima od planeta brzinom $\vec{v}_2$, ali je ipak u području gdje je gravitacijski utjecaj Sunca puno manji od onog planeta. Također smatramo da je vrijeme proleta sonde pored planeta puno kraće od perioda ophoda planeta oko Sunca. Tako možemo smatrati da se planet giba pravocrtno tijekom susreta sa sondom. Za gibanje planeta i sonde vrijede drugi i treći Newtonov zakon. Znači da je ukupni impuls tog sustava tijekom međudjelovanja sonde i planeta sačuvan, pa imamo:

$$m\vec{v}_1 + M\vec{V}_1 = m\vec{v}_2 + M\vec{V}_2, \tag{1}$$

gdje su $\vec{v}_1$ i $\vec{V}_1$, redom, brzine sonde i planeta u heliocentričnom sustavu prije susreta (preleta sonde), a $\vec{v}_2$ i $\vec{V}_2$ brzine sonde i planeta u heliocentričnom sustavu nakon susreta, dok su m i M mase sonde i planeta. Iz jednadžbe (1) imamo za promjenu brzine planeta zbog susreta sa sondom:

$$\vec{V}_2 - \vec{V}_1 = -\frac{m}{M}\left(\vec{v}_2 - \vec{v}_1\right). \tag{2}$$

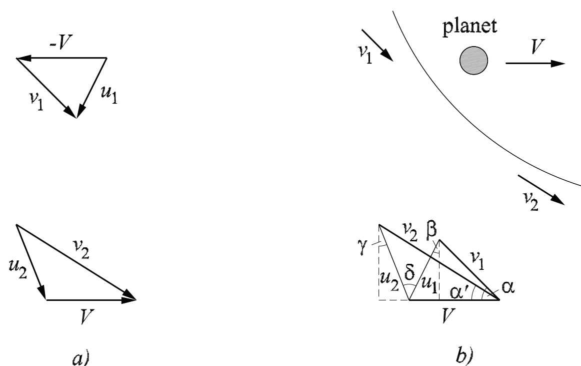
U realnim situacijama (i za planete u rasponu masa od mase Venere do mase Jupitera) su omjeri masa sonde i planeta reda veličine $10^{-21} - 10^{-24}$, a iz posljednje jednadžbe vidimo da promjena iznosa i smjera brzine planeta može biti zanemarena, tj. smatramo da je $\vec{V}_1 = \vec{V}_2 \equiv \vec{V}$.

Gibanje sonde u sustavu planeta

Prebacimo se sada u referentni sustav čije je ishodište u centru planeta. Taj sustav se giba oko Sunca brzinom $\vec{V}$. U tom sustavu planet miruje, a sonda mu se na velikoj udaljenosti približava brzinom $\vec{u}_1 = \vec{v}_1 - \vec{V}$ (relativna brzina sonde u odnosu na planet). Pretpostavljamo da će se sonda gibati po hiperboli (ili paraboli, ovisno o ekscentricitetu putanje) u čijem je fokusu centar planeta, pod gravitacijskim utjecajem planeta (gravitacijsko polje Sunca je u ovom području puno slabije), pa će se nakon prolaska pored planeta, kada dosegne njegovu minimalnu udaljenost, dalje nastavljati gibati tako da se na velikim udaljenostima giba po izlaznoj asimptoti putanje. Na velikim udaljenostima od planeta, a prije susreta, gibat će se po uzlaznoj asimptoti putanje. Zbog zakona sačuvanja energije brzina udaljavanja će (po izlaznoj asimptoti putanje)

nakon susreta s planetom biti iznosom jednaka onoj približavanja (po uzlaznoj asimptoti putanje), tj. $|\vec{u}_2| = |\vec{u}_1|$, a brzina udaljavanja u heliocentričnom sustavu je $\vec{v}_2 = \vec{u}_2 + \vec{V}$.

Pogledajmo što se zbiva s vektorima brzina u heliocentričnom sustavu i u sustavu planeta, prije i poslije susreta sonde i planeta. Promatrajmo prvo slučaj kada sonda prolazi iza planeta, tj. slučaj kada neku točku putanje planeta prijeđe prije nego ju prijeđe sonda, kao što je prikazano na slici 1.b.



Slika 1. a) Vektorski dijagrami za slučaj kada sonda prolazi iza planeta. b) Putanja sonde u heliocentričnom sustavu. Brzina sonde u heliocentričnom sustavu nakon susreta s planetom je veća nego prije susreta.

Na slici 1.a je prikazano vektorsko zbrajanje brzina. Vektori $\vec{u}_1$ i $\vec{u}_2$ imaju jednak iznos $(|\vec{u}_2| = |\vec{u}_1| \equiv u)$, ali zbog zakretanja sonde u sustavu planeta je vektor $\vec{u}_2$ zarotiran u odnosu na vektor $\vec{u}_1$ za kut δ, odnosno to je kut između asimptota putanje sonde u sustavu planeta. Slika 1.b) prikazuje spojene vektorske dijagrame kako bi se lakše analizirala geometrija problema. Kut α je kut između vektora $\vec{V}$ i $\vec{v}_1$, a kut α' je kut između vektora $\vec{V}$ i $\vec{v}_2$. Kut δ smatramo pozitivnim ako je rotiran kao na slici 1.b), a negativnim ako je rotiran u suprotnom smjeru. Uvođenjem pomoćnih kutova β i γ, te pomoću slike 1.b) možemo postaviti sljedeće jednadžbe:

$$
\begin{aligned}
u\cos\beta &= v_1 \sin\alpha, \\
v_2 \sin\alpha' &= u\cos\gamma, \\
V + u\sin\gamma &= v_2\cos\alpha', \\
v_1\cos\alpha + u\sin\beta &= V.
\end{aligned}
$$

Pomoću gornje četiri jednadžbe i činjenice $\delta = \beta + \gamma$, dobivamo nove jednadžbe:

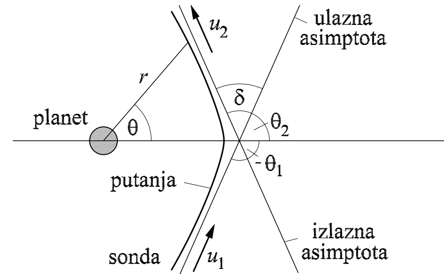
$$
\begin{aligned}
v_2 \sin\alpha' &= V\sin\delta + v_1 \sin(\alpha - \delta), \\
v_2 \cos\alpha' &= V(1 - \cos\delta) + v_1\cos(\alpha - \delta).
\end{aligned}
$$

Iz posljednje dvije relacije imamo:

$$
v_2 = \sqrt{v_1^2 + 2V^2(1-\cos\delta) + 2Vv_1[\cos(\alpha-\delta) - \cos\alpha]}. \qquad (3)
$$

Dobili smo izraz za brzinu sonde u heliocentričnom sustavu nakon njezina susreta s planetom, izraženu kao funkciju upadne brzine prije susreta (v_1), brzine planeta (V), kuta između asimptota putanje u sustavu planeta (δ) i kuta α između brzina $\vec{V}$ i $\vec{v}_1$. Možemo vidjeti da ako je $V = 0$ ne možemo postići povećanje ili smanjenje brzine.

Na slici 2 je prikazana putanja sonde u sustavu planeta (pretpostavili smo da je ona hiperbola). Položaj sonde u tom koordinatnom sustavu ćemo opisati polarnim koordinatama (r, θ), gdje je r radijalna udaljenost sonde od planeta, a θ polarni kut koji zatvara radijalna udaljenost sonde s referentnom osi koja prolazi kroz centar planeta, i položaj referentne osi je dan s $\theta = 0$. Radijalna udaljenost sonde za položaj $\theta = 0$ odgovara točki putanje u kojoj se sonda najviše približi planetu, i tu udaljenost ćemo označiti s $r_{\min}$. Može se pokazati da će putanja u sustavu planeta imati oblik



Slika 2. Putanja sonde u sustavu planeta.

$$r(\theta) = \frac{l^2}{GMm^2(1 + \varepsilon\cos\theta)}$$

i ovdje je $\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2El^2}{G^2M^2m^3}}$ ekscentricitet putanje, koji iznosi $\varepsilon = 0$ za kružnicu, $0 < \varepsilon < 1$ za elipsu, $\varepsilon = 1$ za parabolu i $\varepsilon > 1$ za hiperbolu, G je gravitacijska konstanta, E mehanička energija sonde, l kutna količina gibanja (moment impulsa) sonde oko planeta, i ta veličina je u ovom slučaju sačuvana, jer se sonda nalazi u polju centralne sile (u ovom slučaju gravitacijska), odnosno vektor radijalne udaljenosti i sila koja djeluje na sondu su u bilo kojem trenutku gibanja antiparalelni (na istom pravcu, ali suprotno usmjereni), pa je moment gravitacijske sile u bilo kojem trenutku jednak nuli, što znači da nema promjene momenta impulsa sonde. Pod danim pretpostavkama vrijedi $E \approx \frac{1}{2}mu^2$. Minimalna udaljenost sonde od planeta je $r_{\min} = \frac{l^2}{GMm^2(1+\varepsilon)}$, a na velikim udaljenostima od planeta je $r \to \infty$. Iz tog uvjeta dobivamo da su kutovi koje asimptote putanje zatvaraju s referentnom osi $\theta_2 = \arccos\left(-\frac{1}{\varepsilon}\right)$ i $\theta_1 = -\arccos\left(-\frac{1}{\varepsilon}\right)$. Pomoću slike 2 možemo vidjeti da je $\delta = \theta_2 - \theta_1 - 180° = 2\arccos\left(-\frac{1}{\varepsilon}\right) - 180°$. Znači da kut koji zatvaraju brzine $\vec{u}_1$ i $\vec{u}_2$ ovisi samo o ekscentricitetu putanje, a u slučaju parabole je $\delta = 180°$.

Vratimo se sada na jednadžbu (3), odnosno na njene posljedice:

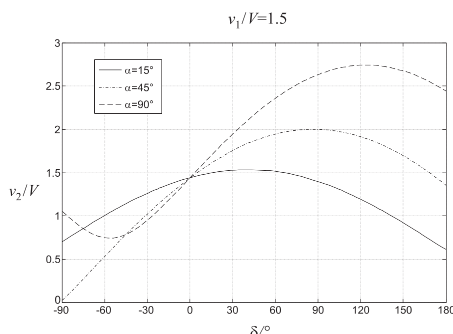
a1) v_2 ima maksimalnu vrijednost kada je $\delta_M = \arctan\left(\frac{v_1\sin\alpha}{v_1\cos\alpha - V}\right)$, za fiksne vrijednosti od v_1, V i α, a tada je $\alpha' = 0$ i $\vec{v}_2$ je paralelna s $\vec{V}$; a2) kako vidimo sa slike 3, kut δ_M se povećava kada povećavamo kut α, za fiksne vrijednosti od v_1 i V; a3) maksimalna brzina nakon susreta s planetom iznosi $v_{2\max} = V + \sqrt{v_1^2 + V^2 - 2Vv_1\cos\alpha}$, te se može vidjeti da je $v_{2\max} - v_1 \leqslant 2V$;

b1) $v_2 = v_1$ se postiže kada je $\delta = 0$ $(\varepsilon \to \infty)$ i tada je $\alpha' = \alpha$, a to je slučaj kada nema otklona sonde u heliocentričnom sustavu (zbog toga jer se sonda giba na velikim udaljenostima od planeta, tj. $l \to \infty$); b2) sa slike 3 vidimo da će $v_2 = v_1$ biti ispunjeno i za kut $\delta = \delta_0$ (za fiksni α), a može se pokazati da vrijedi $\delta_0 = 2\delta_M$, te je u ovom slučaju $\alpha' = -\alpha$;

c1) pomoću slike 3 možemo vidjeti da će postojati dva kuta $\delta_{1,2}$, za koje će v_2 imati istu vrijednost (za neki α, te fiksne v_1 i V); c2) može se dokazati da vrijedi relacija $\delta_1 + \delta_2 = 2\delta_M$; c3) pomoću danih izraza za $r_{\min}$, ε i δ možemo izvesti da je $r_{\min} = \frac{(\varepsilon-1)GMm}{2E}$ i $\frac{1}{\varepsilon} = \sin\frac{\delta}{2}$, pa će za veći δ biti potreban manji $r_{\min}$ (ako želimo isti

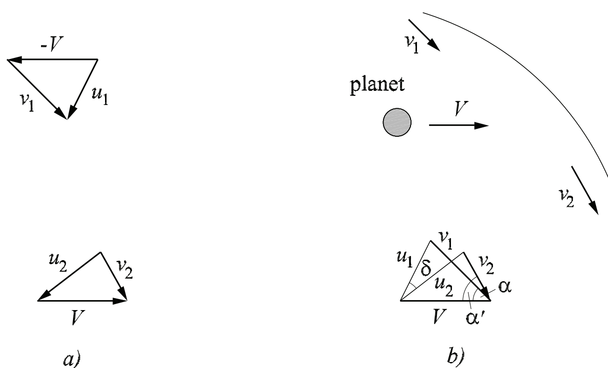
v_2 uz fiksne v_1, V i α), što znači da je bolje prilikom manevra koristiti slučaj manjeg kuta od dana dva $\delta_{1,2}$, kako bi se izbjegao eventualni sudar sonde i planeta;

d1) sa slike 3 možemo vidjeti da će biti moguće usporavanje sonde $(v_2 < v_1)$ i kada je $\delta > 0$, a sonda se usporava ako je $\delta < 0$;



Slika 3. Ovisnost omjera v_2/V o kutu između asimptota δ, kada je $v_1/V = 1.5$ i za tri vrijednosti kuta α. Kutovi δ su u danom rasponu, jer za gravitacijsko međudjelovanje nije moguće postići kut otklona veći od $180°$ (to općenito vrijedi za međudjelovanja koja su proporcionalna s r^{-2}).

e1) u slučaju parabolične putanje će biti $\delta = 180°$, a ukoliko je i $\alpha = 180°$ dobit ćemo $v_2 = 2V + v_1$, i u tom slučaju bi povećanje iznosa brzine bilo $v_2 - v_1 = 2V$, međutim to nije moguće realno postići, jer ako bi bilo $\varepsilon = 1$, to bi onda značilo $l = 0$, tj. da se sonda mora direktno sudariti s planetom; znači povećanje iznosa brzine je uvijek manje od $2V$ (za hiperboličnu putanju).



Slika 4. a) Vektorski dijagrami za slučaj kada sonda prolazi ispred planeta. b) Putanja sonde u heliocentričnom sustavu. Brzina sonde u heliocentričnom sustavu nakon susreta s planetom je manja nego prije susreta.

Promotrimo sada i slučaj kada sonda prolazi ispred planeta, tj. slučaj kada neku točku putanje planeta on prijeđe nakon što ju prijeđe sonda, kao što je prikazano na slici 4.b). Smisao oznaka je kao i kod slike 1. Pomoću slike 4.b), slično kao i u slučaju kada je sonda prolazila iza planeta, možemo izvesti izraz za brzinu sonde nakon susreta

s planetom, u heliocentričnom sustavu:

$$v_2 = \sqrt{v_1^2 + 2V^2(1 - \cos\delta) + 2Vv_1[\cos(\alpha+\delta) - \cos\alpha]} \qquad (4)$$

Izraz (4) dobivamo i ako u jednadžbu (3) stavimo $-\delta$ umjesto δ, što odgovara dogovorenom smjeru rotacije kuta δ, jer je u slučaju kada sonda ide ispred planeta taj kut negativan, odnosno vektor $\vec{u}_1$ se rotira u suprotnom smjeru nego u slučaju kada ona prolazi iza planeta.

Slučajevi negativnih kutova između ulazne i izlazne brzine sonde u sustavu planeta je prikazan na slici 3, gdje se vidi da je za negativne kutove $v_2 < v_1$. U ovom slučaju se brzina sonde smanjuje, kao što prikazuju dijagrami na slici 4. Manevar usporavanja sonde je koristan npr. kada se sonda treba postaviti u putanju oko nekog planeta, a efektom gravitacijske praćke bi se postigla ušteda goriva prilikom usporavanja sonde i postavljanja u novu putanju.

Zakon sačuvanja energije u sustavu planeta i u heliocentričnom sustavu

Pod prije navedenim pretpostavkama, zaključili smo iz zakona sačuvanja energije da će u sustavu planeta biti $u_1 = u_2$, što znači da je mehanička energija sonde sačuvana u sustavu planeta. Općenito ne mora biti $v_1 = v_2$, odnosno cilj je postići efektom gravitacijske praćke ili ubrzanje ili usporenje sonde. To bi značilo da je sonda, kada se nalazi dovoljno daleko od planeta, ali opet u području gdje je njegovo gravitacijsko polje jače od polja Sunca, dobilo ili izgubilo mehaničku energiju, ovisno o tome da li je ubrzano ili usporeno. Međutim, to bi značilo da je taj gubitak ili dobitak energije preuzeo planet, jer smo pretpostavili elastičan susret. Iako planet dobiva ili gubi energiju zbog susreta sa sondom, upravo zbog njegove velike mase u odnosu na masu sonde je zanemarena promjena iznosa i smjera njegove brzine, iako ona postoji. Procijenjeno je npr. da je susret svemirske letjelice Voyagera s Jupiterom usporio Jupiter za 30 cm svakih 10^{12} godina, a susret letjelice Galileo sa Zemljom je usporio Zemljinu brzinu revolucije za $5 \cdot 10^{-10}$ cm svake godine.

Da bi sonda mogla uzeti dio energije planeta, mora se na njemu izvršiti negativan rad, odnosno sila kojom sonda djeluje na planet i njegov pomak moraju biti suprotno usmjereni. Ako bi planet mirovao, zbog djelovanja sile na njega njegov bi prijeđeni put u nekom vremenskom intervalu bio obrnuto proporcionalan s njegovom masom, pa bi taj put bio jako malen zbog velike mase planeta, a samim time i izvršen rad gravitacijske sile na njega. Ukoliko se planet giba, put koji bi on prošao bi bio neovisan o njegovoj masi (u vrlo dobroj aproksimaciji), pa izvršeni rad na njemu ne bi bio zanemariv. Ovo je vrijedilo za slučaj kada sonda prolazi iza planeta, a slični zaključci se mogu izvesti i za slučaj kada sonda prolazi ispred planeta, odnosno kada se vrši pozitivan rad na planetu.

Napuštanje heliocentričnog sustava direktno sa Zemlje i korištenjem vanjskih planeta

Ukoliko bi sonda bila lansirana sa Zemlje i cilj bi joj bio napustiti heliocentrični sustav, tada bi ona trebala imati početnu brzinu (u odnosu na Zemlju, znači pri lansiranju) od otprilike 12.3 km/ s (treća kozmička brzina sa Zemlje). Ova vrijednost je dobivena pod pretpostavkom da se sonda lansira tangencijalno na putanju Zemlje oko Sunca (u smjeru putanje) i da zatim ide paraboličnom ili hiperboličnom putanjom napuštajući gravitacijski utjecaj Sunca. Prava vrijednost će biti veća zbog svladavanja atmosferskog otpora gibanju sonde i utjecaja Zemljine gravitacije. Pogledajmo sada što

bi se desilo ukoliko bi se sonda lansirala prema nekom od vanjskih planeta, pa bi uz njegovu pomoć putem efekta gravitacijske praćke napustila heliocentrični sustav. Omjer početne kinetičke energije sonde direktnim lansiranjem i početne kinetičke energije sa Zemlje kada bi se koristio efekt gravitacijske praćke pomoću vanjskog planeta da napusti heliocentrični sustav, za Mars iznosi 4.93, Jupiter 1.94, Saturn 1.46, Uran 1.21 i Neptun 1.13. To vrijedi pod pretpostavkom da je početna masa sonde za bilo koji slučaj lansiranja jednaka, da je lansirana tangencijalno na putanju Zemlje (i u smjeru putanje), da je brzina sonde u heliocentričnom sustavu nakon susreta s planetom paralelna s brzinom planeta $(v_{2\,\max})$, znači da dobije maksimalni potisak od planeta, i da su putanje planeta kružnice. Vidimo da će ipak trebati najviše energije uložiti direktnim lansiranjem sa Zemlje, a najveća je ušteda ako se koristi putanja Marsa. Ovo je ipak aproksimativan proračun jer nisu uzeti u obzir gravitacijski utjecaji ostalih planeta i gubici na Zemlji, nego se promatralo lansiranje sonde sa Zemlje prema vanjskom planetu. Naravno, još više bi se uštedilo energije kada bi se koristila povoljna kombinacija susreta s nekoliko vanjskih planeta nakon lansiranja sa Zemlje. Taj način bi ipak dao dulje putovanje sonde kroz heliocentrični sustav nego direktnim lansiranjem, ali bi početni potisak prilikom lansiranja sa Zemlje bio dosta manji i moguće je koristiti veće mase sondi.

Zaključak

Izložen je pojednostavljen pristup efektu gravitacijske praćke, prilagođen srednjoškolskom znanju fizike. Ovaj pristup daje fenomenološko objašnjenje danog efekta, iako je izveden pod raznim pretpostavkama: koristile su se Galilejeve transformacije brzina, iako niti heliocentrični sustav niti sustav planeta nisu inercijalni sustavi; pretpostavljeno je da se planet prije, tijekom i nakon susreta giba pravocrtno (zanemarena je promjena brzine planeta zbog međudjelovanja sa sondom), ali realno se on ipak tako ne giba, jer planeti idu eliptičnim putanjama oko Sunca, a vrijeme susreta sa sondom ne traje beskonačno kratko, nego je reda veličine nekoliko dana; planet je promatran kao točkast, iako ima konačne dimenzije, pa uvjet da ne dođe do kolapsa sonde na planet je $r_{\min} > R$, gdje je R radijus planeta; pretpostavili smo i da je sustav planet-sonda izoliran i da za njega vrijede drugi i treći Newtonov zakon; da su brzine $\vec{v}_1$ i $\vec{v}_2$ asimptotske vrijednosti, iako doživljavaju kontinuiranu promjenu na velikim udaljenostima od planeta, čak i gdje je gravitacijski utjecaj Sunca zanemariv u odnosu na utjecaj planeta; u sustavu planeta je zanemariv gravitacijski utjecaj Sunca i ostalih planeta. Realno se heliocentrična putanja sonde računa numeričkim metodama kojima se rješava njena jednadžba gibanja s određenim vremenskim korakom, gdje je moguće uzeti u obzir i utjecaje ostalih planeta. Iako je izloženi pristup aproksimativan, daje zadovoljavajuće objašnjenje efekta.

Literatura

[1] H. Goldstein, *Classical mechanics*, Addison-Wesley Publishing Company, 1980.

[2] R.C. Johnson, *The slingshot effect*, 2003, http://www.dur.ac.uk/bob.johnson/SL/

[3] J.A. Van Allen, *Gravitational assist in celestial mechanics – a tutorial*, Am. J. Phys. 71 (5), 2003.

[4] V. Vujnović, *Rječnik astronomije i fizike svemirskog prostora*, Školska knjiga, Zagreb, 2004.

[5] http://www.jyu.fi/tdk/kastdk/olympiads/

[6] http://en.wikipedia.org/wiki/Michael_Minovitch

[7] http://en.wikipedia.org/wiki/Gravitational_slingshot



Teorem o majorizaciji i primjene

Sanela Jukić[1]*, Slatina, Sanja Varošanec*[2]*, Zagreb*

U prvom prošlogodišnjem broju MFL-a M. Valčić je opisao Jensenovu nejednakost za konveksne funkcije i njezinu primjenu u trigonometriji. Sada ćemo opisati još jedan rezultat koji vrijedi za konveksne funkcije, tzv. teorem o majorizaciji, te ilustrirati njegovu primjenu.

Prije svega ponovimo definiciju i neka svojstva konveksne funkcije.

Definicija. Neka je $I \subseteq \mathbf{R}$ interval. Za funkciju $f : I \to \mathbf{R}$ kažemo da je **konveksna** na I ako za svaki $\alpha \in [0, 1]$ i za svake x i y iz I vrijedi

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1-\alpha)f(y). \tag{1}$$

Ako su x_1, x_2, x_3 bilo koje tri različite točke iz I, $x_1 < x_2 < x_3$, tada zamjenama

$$x \to x_1, \quad y \to x_3, \quad \alpha \to \frac{x_2 - x_3}{x_1 - x_3}$$

nejednakost (1) poprima oblik

$$f(x_2) \leq \frac{x_2 - x_3}{x_1 - x_3} f(x_1) + \frac{x_1 - x_2}{x_1 - x_3} f(x_3)$$

što se može svesti na

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \leq \frac{f(x_2) - f(x_3)}{x_2 - x_3}, \quad x_1 < x_3, \quad x_1, x_3 \neq x_2. \tag{2}$$

Dokažimo sljedeće svojstvo konveksne funkcije koje ćemo koristiti u dokazu teorema o majorizaciji.

Lema 1. *Neka je $f : I \to \mathbf{R}$ konveksna funkcija, te neka su $x_1, x_2, y_1, y_2 \in I$ takvi da je $x_1 \leq y_1$, $x_2 \leq y_2$, $x_1 \neq x_2$, $y_1 \neq y_2$. Tada vrijedi*

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(y_2) - f(y_1)}{y_2 - y_1}. \tag{3}$$

Dokaz. Stavimo li u nejednakost (2) zamjenu $x_3 \to y_1$ dobivamo

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \leq \frac{f(x_2) - f(y_1)}{x_2 - y_1}.$$

Stavimo li u nejednakost (3) zamjene

$$x_1 \to x_2, \quad x_2 \to y_1, \quad x_3 \to y_2$$

dobivamo

$$\frac{f(x_2) - f(y_1)}{x_2 - y_1} \leq \frac{f(y_1) - f(y_2)}{y_1 - y_2}.$$

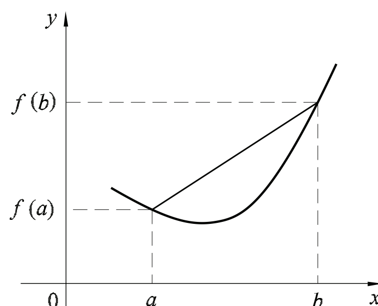
Iz te dvije nejednakosti slijedi (3).

---

[1] Autorica je profesor matematike u Osnovnoj školi Josipa Kozarca u Slatini.

[2] Koautorica je redoviti profesor na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu Sveučilišta u Zagrebu; e-mail: `varosans@math.hr`

Konveksne funkcije posjeduju razna zanimljiva svojstva i igraju ključnu ulogu u nekim granama matematike. Korisno je znati da se graf konveksne funkcije, promatran na intervalu $[a, b] \subset I$, nalazi ispod tetive koja spaja točke $(a, f(a))$ i $(b, f(b))$, te ako je funkcija f dva puta diferencijabilna tada je f konveksna ako i samo ako je $f'' \geq 0$ na intervalu I.



Izrecimo sada i glavni rezultat ovog teksta.

Teorem o majorizaciji (Muirheadov teorem). *Neka su* $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *i* $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ *realne* n*-torke s koordinatama u padajućem poretku, tj.* $x_1 \geq x_2 \geq \ldots \geq x_n$, $\quad y_1 \geq y_2 \geq \ldots \geq y_n$, *takve da je*

$$\sum_{i=1}^{k} x_i \leq \sum_{i=1}^{k} y_i, \quad \textit{za svaki} \quad k = 1, 2, \ldots, n-1, \tag{4}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} y_i. \tag{5}$$

Tada za svaku konveksnu funkciju $f : I \to \mathbf{R}$ *vrijedi*

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i) \leqslant \sum_{i=1}^{n} f(y_i).$$

Komentar. Ako dvjema n-torkama $\mathbf{x}$ i $\mathbf{y}$ koordinate preuredimo tako da budu u padajućem poretku i ako za tako uređene koordinate vrijede relacije (4) i (5), tada kažemo da n-torka $\mathbf{y}$ **majorizira** n-torku $\mathbf{x}$ i pišemo $\mathbf{x} \prec \mathbf{y}$.

Razna poopćenja ovog teorema mogu se naći u knjigama [1] i [2].

Primjer 1. a) Za prirodni broj n vrijedi

$$\left(\frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n}\right) \prec \left(\frac{1}{n-1}, \ldots, \frac{1}{n-1}, 0\right) \prec \ldots \prec \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, \ldots, 0\right) \prec (1, 0, \ldots, 0).$$

b) Ako su α, β i γ kutovi trokuta, $\alpha \geq \beta \geq \gamma$, tada je

$$\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right) \prec (\alpha, \beta, \gamma) \prec (\pi, 0, 0).$$

Ako je trokut šiljastokutan, tada je $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right) \prec (\alpha, \beta, \gamma) \prec \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, 0\right)$, a ako je trokut tupokutan, tada je $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right) \prec (\alpha, \beta, \gamma) \prec (\pi, 0, 0)$.

c) Ako su $a_1, \ldots, a_n$, $a_1 \geq \ldots \geq a_n$ nenegativni realni brojevi čija je suma jednaka 1, tada vrijedi

$$\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n}\right) \prec (a_1, a_2, \ldots, a_n) \prec (1, 0, \ldots, 0).$$

Dokažimo prvu nejednakost u primjeru c), dok ostale ostavljamo čitatelju za vježbu.

Treba dokazati da vrijede relacije (4) i (5). Relacija (5) je očito zadovoljena jer je $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} = 1 = \sum_{i=1}^{n} a_i$. Neka je k bilo koji broj iz skupa $\{1, 2, \ldots, n-1\}$. Treba dokazati da je $\frac{k}{n} \le \sum_{i=1}^{k} a_i$. Ta je nejednakost ekvivalentna sa sljedećim:

$$\frac{k(a_1 + \ldots + a_n)}{n} \le a_1 + \ldots + a_k,$$
$$ka_1 + \ldots + ka_n \le na_1 + \ldots + na_k,$$
$$ka_{k+1} + ka_{k+2} + \ldots + ka_n \le (n-k)(a_1 + \ldots + a_k).$$

Budući da je $a_{k+1} \le a_1$, $a_{k+1} \le a_2, \ldots, a_{k+1} \le a_k$, slijedi $ka_{k+1} \le a_1 + \ldots + a_k$. Isti odnos vrijedi i za ostale produkte $ka_{k+2}, \ldots, ka_n$. Sumirajući tih $n-k$ nejednakosti dobivamo posljednju u nizu ekvivalentnih nejednakosti.

Dokaz teorema. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da su $x_i \ne y_i$ za svaki $i = 1, 2, \ldots, n$. Definirajmo brojeve d_i ovako

$$d_i = \frac{f(x_i) - f(y_i)}{x_i - y_i}, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Ako u nejednakost (3) stavimo

$$x_1 \to y_{i+1}, \quad x_2 \to x_{i+1}, \quad y_1 \to y_i, \quad y_2 \to x_i$$

dobivamo $\frac{f(x_{i+1}) - f(y_{i+1})}{x_{i+1} - y_{i+1}} \le \frac{f(x_i) - f(y_i)}{x_i - y_i}$, tj. $d_{i+1} \le d_i$. Uz oznake $X_k = \sum_{i=1}^{k} x_i$, $Y_k = \sum_{i=1}^{k} y_i$ imamo

$$\sum_{i=1}^{k} f(x_i) - \sum_{i=1}^{k} f(y_i) = \sum_{i=1}^{k} (f(x_i) - f(y_i)) = \sum_{i=1}^{n} d_i(x_i - y_i).$$

Budući da je $x_1 - y_1 = X_1 - Y_1$, $x_2 - y_2 = (X_2 - Y_2) - (X_1 - Y_1)$, $x_3 - y_3 = (X_3 - Y_3) - (X_2 - Y_2), \ldots,$ $x_n - y_n = (X_n - Y_n) - (X_{n-1} - Y_{n-1})$ dobivamo

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} d_i(x_i - y_i) &= d_1(X_1 - Y_1) + d_2((X_2 - Y_2) - (X_1 - Y_1)) + d_3((X_3 - Y_3) - (X_2 - Y_2)) \\
&\quad + \ldots + d_n((X_n - Y_n) - (X_{n-1} - Y_{n-1})) \\
&= (d_1 - d_2)(X_1 - Y_1) + (d_2 - d_3)(X_2 - Y_2) \\
&\quad + \ldots + (d_{n-1} - d_n)(X_{n-1} - Y_{n-1}) + d_n(X_n - Y_n).
\end{aligned}$$

Izraz $(X_n - Y_n)$ jednak je 0, a svi ostali izrazi oblika $X_k - Y_k$ su nepozitivni. Uz to je $d_k - d_{k+1} \ge 0$, pa je cijela suma na desnoj strani jednakosti nepozitivna, tj. $\sum_{i=1}^{k} f(x_i) \le \sum_{i=1}^{k} f(y_i)$ što je i trebalo dokazati.

Ovaj se teorem može primijeniti pri dokazivanju niza nejednakosti.

Primjer 2. Dokažimo da u šiljastokutnom trokutu vrijedi

$$2 \le \sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma \le \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Rješenje. Funkcija $f(x) = -\sin x$ je (strogo) konveksna na $(0, \pi)$, jer je $f''(x) = \sin x > 0$. Za kutove šiljastokutnog trokuta vrijedi majorizacija

$\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right) \prec (\alpha,\beta,\gamma) \prec \left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2},0\right)$, pa je prema teoremu

$$3f\left(\frac{\pi}{3}\right) \leq f(\alpha)+f(\beta)+f(\gamma) \leq f\left(\frac{\pi}{2}\right)+f\left(\frac{\pi}{2}\right)+f(0),$$

tj. $-\frac{3\sqrt{3}}{2} \leq -\sin\alpha-\sin\beta-\sin\gamma \leq -2$, odakle slijedi tražena nejednakost.

Primjer 3. (1. balkanska matematička olimpijada, 1984.) Neka je $n \geq 2$, te neka su $a_1,\ldots,a_n$ pozitivni realni brojevi za koje vrijedi $a_1+\ldots+a_n=1$. Dokažite da je

$$\frac{a_1}{1+a_2+\ldots+a_n}+\frac{a_2}{1+a_1+a_3+\ldots+a_n}+\ldots+\frac{a_n}{1+a_1+\ldots+a_{n-1}} \geq \frac{n}{2n-1}.$$

Rješenje. Zamijetimo da se zbog uvjeta $a_1+\ldots+a_n=1$ svaki od razlomaka s lijeve strane nejednakosti može napisati kao $\frac{a_k}{2-a_k}$. Dakle, nejednakost poprima oblik

$$\frac{a_1}{2-a_1}+\frac{a_2}{2-a_2}+\ldots+\frac{a_n}{2-a_n} \geq \frac{n}{2n-1}.$$

Ne smanjujući općenitost možemo pretpostaviti da je $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_n$. Funkcija $f(x)=\frac{x}{2-x}$ je konveksna na $(0,1)$ jer je $f''(x)=4(2-x)^{-3}>0$, pa primijenimo teorem na n-torke $(\frac{1}{n},\frac{1}{n},\ldots,\frac{1}{n}) \prec (a_1,a_2,\ldots,a_n)$. Dobivamo da je $f(\frac{1}{n})+\ldots+f(\frac{1}{n}) \leq f(a_1)+\ldots+f(a_n)$, tj. $n\cdot\frac{\frac{1}{n}}{2-\frac{1}{n}} \leq \frac{a_1}{2-a_1}+\ldots+\frac{a_n}{2-a_n}$, što je upravo tražena nejednakost. Zamijetimo da zbog majorizacije $(a_1,a_2,\ldots,a_n) \prec (1,0,\ldots,0)$ dobivamo i donju ogradu, tj. $\frac{a_1}{2-a_1}+\ldots+\frac{a_n}{2-a_n} \leq 1$.

Zadaci

1. Dokažite da u svakom trokutu vrijede ove nejednakosti:

a) $\sqrt{\sin\alpha}+\sqrt{\sin\beta}+\sqrt{\sin\gamma} \leq 3\sqrt[4]{\frac{3}{4}}$, b) $2<\cos\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\beta}{2}+\cos\frac{\gamma}{2} \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$,

c) $\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma \leq \frac{3}{8}\sqrt{3}$, (*uputa*: promatra se funkcija $f(x)=-\ln\sin x$).

2. Dokažite da u šiljastokutnom trokutu vrijedi:

a) $\frac{3}{4} \leq \sin^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\beta}{2}+\sin^2\frac{\gamma}{2} \leq 1$, b) $\frac{1}{2} \leq \cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2} \leq \frac{3\sqrt{3}}{8}$.

3. Neka su $x_1,\ldots,x_n$ pozitivni realni brojevi. Dokažite nejednakost

$$\frac{x_1}{x_2+x_3+\ldots+x_n}+\frac{x_2}{x_1+x_3+\ldots+x_n}+\ldots+\frac{x_n}{x_1+x_2+\ldots+x_{n-1}} \geq \frac{n}{n-1}.$$

4. Neka su x,y,z pozitivni realni brojevi takvi da je $x+y+z=1$. Dokažite da je

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)\left(1+\frac{1}{z}\right) \geq 64.$$

Literatura

[1] A. W. MARSHALL, I. OLKIN, *Inequalities: Theory of Majorization and Its Applications*, Academic Press, 1979.

[2] J. E. PEČARIĆ, F. PROSCHAN, Y. L. TONG, *Convex Functions, Partial Orderings and Statistical Applications*, Academic Press, 1992.

Šest dokaza jedne trigonometrijske nejednakosti

Ilija Ilišević, Osijek*

Znamo da je bolje riješiti jedan zadatak na više načina,
nego njih mnogo na isti način.

Pokazat ćemo kako dokazati jednu trigonometrijsku nejednakost na šest načina.

Zadatak. Neka su α, β, γ kutovi trokuta. Dokažite da vrijedi nejednakost

$$\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} \leq \frac{1}{8}.$$

Dokaz 1. Imamo

$$\begin{aligned}
\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} &= \frac{1}{2}\Big(\cos\frac{\alpha-\beta}{2} - \cos\frac{\alpha+\beta}{2}\Big)\sin\frac{\gamma}{2} \\
&= \frac{1}{2}\Big(\cos\frac{\alpha-\beta}{2} - \cos\frac{\alpha+\beta}{2}\Big)\sin\frac{\pi-(\alpha+\beta)}{2} \\
&= \frac{1}{2}\Big(\cos\frac{\alpha-\beta}{2} - \cos\frac{\alpha+\beta}{2}\Big)\sin\Big(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha+\beta}{2}\Big) \\
&= \frac{1}{2}\Big(\cos\frac{\alpha-\beta}{2} - \cos\frac{\alpha+\beta}{2}\Big)\cos\frac{\alpha+\beta}{2} \\
&\leq \frac{1}{2}\Big(1 - \cos\frac{\alpha+\beta}{2}\Big)\cos\frac{\alpha+\beta}{2}.
\end{aligned}$$

Prema AG-nejednakosti je

$$\Big(1-\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\Big)\cos\frac{\alpha+\beta}{2} \leq \left(\frac{\big(1-\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\big)+\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}{2}\right)^2 = \Big(\frac{1}{2}\Big)^2 = \frac{1}{4}.$$

Dakle,

$$\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} \leq \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{8}.$$

Jednakost vrijedi ako i samo ako je

$$\cos\frac{\alpha-\beta}{2} = 1 \quad \text{i} \quad 1-\cos\frac{\alpha+\beta}{2} = \cos\frac{\alpha+\beta}{2},$$

a to je ako i samo ako je $\alpha = \beta = \gamma = \frac{\pi}{3}$. $\square$

Dokaz 2. Primjenom kosinusovog poučka dobivamo

$$\cos\alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{1}{2}\Big(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\Big) - \frac{a^2}{2bc}.$$

Slijedi, prema AG-nejednakosti,

$$\cos\alpha \geq 1 - \frac{a^2}{2bc},$$

* Autor predaje matematiku u III. gimnaziji u Osijeku.

odakle je $1 - \cos\alpha \leq \dfrac{a^2}{2bc}$ i konačno $\sin^2\dfrac{\alpha}{2} \leq \dfrac{a^2}{4bc}$. Analogno, $\sin^2\dfrac{\beta}{2} \leq \dfrac{b^2}{4ac}$, $\sin^2\dfrac{\gamma}{2} \leq \dfrac{c^2}{4ab}$. Odavde je

$$\sin^2\frac{\alpha}{2}\sin^2\frac{\beta}{2}\sin^2\frac{\gamma}{2} \leq \frac{a^2}{4bc}\cdot\frac{b^2}{4ac}\cdot\frac{c^2}{4ab} = \frac{1}{64},$$

pa je

$$\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} \leq \frac{1}{8}.$$

Jednakost vrijedi ako i samo ako je

$$\frac{b}{c}+\frac{c}{b}=\frac{a}{c}+\frac{c}{a}=\frac{a}{b}+\frac{b}{a}=2,$$

a to je ako i samo ako je $a=b=c$. $\square$

Dokaz 3. Primjenom formule za sinus polukuta i kosinusovog poučka dobivamo

$$\begin{aligned}\sin^2\frac{\alpha}{2} &= \frac{1-\cos\alpha}{2} = \frac{1-\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}{2} = \frac{a^2-(b-c)^2}{4bc}\\ &= \frac{(a-b+c)(a+b-c)}{4bc} = \frac{2(s-b)\cdot 2(s-c)}{4bc} = \frac{(s-b)(s-c)}{bc},\end{aligned}$$

gdje je s poluopseg trokuta. Analogno,

$$\sin^2\frac{\beta}{2} = \frac{(s-a)(s-c)}{ac}, \qquad \sin^2\frac{\gamma}{2} = \frac{(s-a)(s-b)}{ab}.$$

Dakle,

$$\sin^2\frac{\alpha}{2}\sin^2\frac{\beta}{2}\sin^2\frac{\gamma}{2} = \left(\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{abc}\right)^2,$$

pa je

$$\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} = \frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{abc}.$$

Iz Heronove formule $P=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ slijedi

$$(s-a)(s-b)(s-c) = \frac{P^2}{s}.$$

Stoga je

$$\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} = \frac{P^2}{abcs}.$$

Kako je

$$R=\frac{abc}{4P}, \qquad r=\frac{P}{s},$$

gdje je P površina trokuta, a R i r redom polumjeri trokutu opisane i upisane kružnice, to je

$$\frac{P^2}{abcs} = \frac{P}{abc}\cdot\frac{P}{s} = \frac{1}{4R}\cdot r = \frac{r}{4R}.$$

Prema tome, dokazali smo da je

$$\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} = \frac{r}{4R}.$$

Obzirom da je $R \geq 2r$, to je $\frac{r}{4R} \leq \frac{1}{8}$. (Nejednakost $R \geq 2r$ se lako dokazuje bez trigonometrije. Primjerice, može se dokazati da je kvadrat udaljenosti središta trokutu opisane i središta trokutu upisane kružnice jednak $R^2 - 2Rr$. Odatle slijedi $R^2 - 2Rr \geq 0$, pa je $R - 2r \geq 0$.) Konačno,

$$\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} \leq \frac{1}{8}.$$

Jednakost vrijedi ako i samo ako je $R = 2r$, a to je ako i samo ako je trokut jednakostraničan. □

Dokaz 4. Kao u dokazu 3 dobivamo

$$\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{a^2-(b-c)^2}{4bc}, \qquad \sin^2\frac{\beta}{2} = \frac{b^2-(c-a)^2}{4ca}, \qquad \sin^2\frac{\gamma}{2} = \frac{c^2-(a-b)^2}{4ab}.$$

Stoga je

$$\begin{aligned}\sin^2\frac{\alpha}{2}\sin^2\frac{\beta}{2}\sin^2\frac{\gamma}{2} &= \frac{a^2-(b-c)^2}{4bc}\cdot\frac{b^2-(c-a)^2}{4ca}\cdot\frac{c^2-(a-b)^2}{4ab}\\ &= \frac{\big(a^2-(b-c)^2\big)\big(b^2-(c-a)^2\big)\big(c^2-(a-b)^2\big)}{64a^2b^2c^2}.\end{aligned}$$

Kako je

$$a^2-(b-c)^2 \leq a^2, \qquad b^2-(c-a)^2 \leq b^2, \qquad c^2-(a-b)^2 \leq c^2,$$

pri čemu sve tri nejednakosti postaju jednakosti ako i samo ako je $a = b = c$, to je

$$\sin^2\frac{\alpha}{2}\sin^2\frac{\beta}{2}\sin^2\frac{\gamma}{2} \leq \frac{a^2b^2c^2}{64a^2b^2c^2},$$

odakle slijedi

$$\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} \leq \frac{1}{8}.$$

□

Dokaz 5. Imamo

$$\begin{aligned}\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} &= \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2} - \cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\frac{\gamma}{2}\\ &= \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2} - \cos\frac{\pi-\gamma}{2}\right)\sin\frac{\gamma}{2}\\ &= \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2} - \cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\gamma}{2}\right)\right)\sin\frac{\gamma}{2}\\ &= \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2} - \sin\frac{\gamma}{2}\right)\sin\frac{\gamma}{2}\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} - \frac{1}{2}\sin^2\frac{\gamma}{2}.$$

Neka je

$$\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} = m.$$

Tada je

$$\frac{1}{2}\sin^2\frac{\gamma}{2} - \frac{1}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} = -m,$$

tj.

$$\sin^2\frac{\gamma}{2} - \cos\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} + 2m = 0.$$

Da bi korijeni ove kvadratne jednadžbe bili realni, njena diskriminanta mora biti nenegativna. Stoga je

$$\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2} - 8m \geq 0,$$

odnosno

$$m \leq \frac{1}{8}\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Međutim,

$$\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2} \leq 1,$$

pa je $m \leq \frac{1}{8}$. Dakle,

$$\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} \leq \frac{1}{8}.$$

Jednakost vrijedi ako i samo ako je

$$\cos\frac{\alpha-\beta}{2} = 1 \quad \text{i} \quad \sin^2\frac{\gamma}{2} - \sin\frac{\gamma}{2} + \frac{1}{4} = 0,$$

a to je ako i samo ako je $\alpha = \beta = \gamma = \frac{\pi}{3}$. $\square$

Dokaz 6. Prema AG-nejednakosti je

$$\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} \leq \left(\frac{\sin\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\beta}{2} + \sin\frac{\gamma}{2}}{3}\right)^3.$$

Kako je funkcija $f(x) = \sin x$ konkavna na intervalu $\langle 0, \frac{\pi}{2}\rangle$, to je prema Jensenovoj nejednakosti

$$\frac{\sin\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\beta}{2} + \sin\frac{\gamma}{2}}{3} \leq \sin\frac{\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2}}{3} = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2},$$

pa je

$$\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}.$$

Jednakost vrijedi ako i samo ako je $\frac{\alpha}{2} = \frac{\beta}{2} = \frac{\gamma}{2} = \frac{\pi}{6}$ odnosno $\alpha = \beta = \gamma = \frac{\pi}{3}$. $\square$

Matematičari slavenskih korijena

Neven Bogdanović, Split

Slavenski narodi, kao i mnogi drugi u Europi i u svijetu, dali su velik broj izvanredno dobrih matematičara. Mnogi su se od njih istaknuli ne samo pedagoškim djelovanjem, u pisanju udžbenika i stručnih knjiga, već i u znanstvenom doprinosu razvoju matematike.

Sve zapažene matematičare slavenskih korijena ovdje nije moguće navesti. Evo tek (kronološkim redom) nekoliko njihovih imena: **Jurij Vega** (Zagorica kod Dolskog u Sloveniji, 1754. – nestao 17.9.1802., mrtvo tijelo pronađeno u Nussdorfu (Beč) 26.9.1802.), **Nikolaj Ivanovič Lobačevskij** (Nižni Novgorod, 1792. – Kazan, 1856.), **Pafnutij Ljvovič Čebišev** (Okatovo, Kalužanska oblast, 1821. – Petrograd, 1894.), **Sofja Kovalevskaja** (Moskva, 1850. – Stockholm, 1891.), **Franc Hočevar** (Metlika u Sloveniji, 1853. – Graz, 1919.), **Nikola Saltikov** (Višnji Voločok u Rusiji, 1866. – Beograd, 1961.), **Mihailo Petrović** (Beograd, 1868. – Beograd, 1943.), **Josip Plemelj** (selo Grad na Bledu, 1873. – Ljubljana, 1967.), **Anton Bilimović** (Žitomir u Ukrajini, 1879. – Beograd, 1970.), **Waclaw Sierpinski** (Varšava, 1882. – Varšava, 1969.), **Tadija Pejović** (Drača blizu Kragujevca, 1892. – Beograd, 1982.), **Jovan Karamata** (Zagreb, 1902. – Ženeva, 1967.), **Andrej Nikolajevič Kolmogorov** (Tambov u Rusiji, 1903. – Moskva, 1987.), **Konstantin Orlov** (grad Ufa u Rusiji, 1907. – Beograd, 1985.).

Od spomenutih matematičara slavenskih korijena neki su svojim radom te otkrićem novih postupaka i metoda u matematici zavrijedili osobitu pozornost. Upoznajmo ih samo letimice.

Jurij Vega



Slovenski matematičar *Jurij Vega* (od 1780. *Veha*), poznati topnički ekspert, svoje obrazovanje utemeljio je na ljubljanskom liceju. Poslije završenih studija bio je navigacijski inženjer u Austriji, a 1780. stupio je u artiljerijski puk. Ubrzo je dobio čin potporučnika i bila mu je povjerena služba učitelja matematike u artiljerijskoj školi. Tu dužnost obavljao je do 1786. kad je postao profesor matematike na bombarderskom odjelu. Predavao je matematiku, dakle, na višim i visokim školama. Za potrebe artilerijskih škola napisao je na njemačkom jeziku predavanja iz matematike u četiri dijela. Tu je na stručno-znanstveni način izložio osnove algebre, infinitezimalnog računa i diferencijalnih jednadžbi te drugih disciplina za obrazovanje vojnih stručnjaka. Djelo je postiglo veliki uspjeh i u drugim zemljama. Pisao je i srednjoškolske udžbenike iz matematike (na njemačkom jeziku) koji su bili odlično prihvaćeni.

Vega je dao broj π na 140 decimala. Svoje čuvene logaritamske tablice (i još neke radove iz numeričke analize) na deset decimala objavio je 1794. u Leipzigu na latinskom i njemačkom jeziku. (Članak o broju π poslao je Akademiji znanosti u Sankt Peterburgu, koja ga je 1795. objavila u skraćenom obliku.) Vegine tablice, za koje su pohvalno govorili čuveni poznati matematičari ("blago svih logaritama"), čak i Gauss, prevedene su na devet europskih jezika. Njegova rasprava o sferoidnom preoblikovanju

zemaljske kugle zbog vrtnje izašla je 1798. u Erfurtu. U Beču je 1801. izdao raspravu o izračunavanju mase planeta. Vega je potpuno odobravao francuski metarski sustav s jedinicama metrom i kilogramom, nastojeći da se on usvoji i u Austriji.

Ovaj matematičar i vojni ekspert svjetskog ugleda bio je član raznih stručnih društava i akademija znanosti mnogih država. Za vojne zasluge car Franc II. dodijelio mu je titulu baruna, a jedan krater na Mjesecu nazvan je njegovim imenom. Jurij Vega je najslavniji slovenski matematičar proteklih stoljeća.

Nikolaj Ivanovič Lobačevskij



Veliki ruski matematičar *Nikolaj Ivanovič Lobačevskij* završio je gimnaziju i studij u Kazanu. Nakon studija ostao je odmah na Kazanskom univerzitetu predavati matematiku, čitav niz godina – do 1846. (Zadnjih 10 godina života bio je udaljen s Univerziteta radi političkih razloga.)

Lobačevskij je utemeljio tzv. *neeuklidsku geometriju*, pokušavajući dokazati V. (peti) Euklidov postulat o usporednicama (paralelama), i time stekao neprolaznu slavu. Peti Euklidov postulat, kojega su matematičari uzalud nastojali dokazati, glasi: *Točkom izvan pravca, u ravnini određenoj tom točkom i tim pravcem, može se povući samo jedan pravac koji ne siječe zadani pravac.* Polazeći, naime, od pretpostavke da se točkom izvan pravca mogu povući najmanje dva pravca, i ostalim Euklidovim aksiomima osim petog postulata, Lobačevskij 1829. – 1830. dolazi do *hiperbolične geometrije*, koja se zove *geometrija Lobačevskoga*, odnosno *geometrija Lobačevskog-Bolyaia* po mađarskom matematičaru Janosu Bolyaiu, koji je 1832. objavio rezultate slične rezultatima Lobačevskoga, ali se s time više nije bavio. (Čini se da je do ovih ideja najprije bio došao Gauss; međutim, nije ih objavio.) Na osnovi, dakle, Euklidovog geometrijskog sustava aksioma u kojemu je peti Euklidov postulat zamijenio svojim novim postulatom, Lobačevskij je izgradio neproturječnu geometriju, neeuklidsku geometriju, različitu od Euklidove. U geometriji Lobačevskoga zbroj kutova u trokutu manji je od 180°, odnosno četverokut može imati najviše tri prava kuta. Isto tako, sve točke koje su jednako udaljene od zadanog pravca leže na krivulji, a ne na pravcu, kao u Euklidovoj geometriji.

Izgleda da je već početkom 16. st. mišljenje o postojanju hiperbolične geometrije bio iznio hrvatski znanstvenik F. Grisogono.

Godine 1854. *Bernhard Riemann* (1826. – 1866.) našao je drugu vrstu neeuklidske geometrije, tzv. *eliptičnu geometriju*. U toj geometriji je zbroj kutova u trokutu veći od 180°, a odstupanje zbroja kutova od 180° razmjerno je površini trokuta.

Budući da ne postoji proturječnost ni u euklidskoj ni u neeuklidskoj geometriji, postavlja se pitanje koja je geometrija istinita. Premda je po Kantu pojam prostora aprioran, a ne empirijski (protivno Kantovoj filozofiji), Riemann je u svom radu istaknuo nužnost eksperimentalne odluke o prirodi trodimenzionalnog prostora. On dapače, dopušta i formalnu izgradnju euklidske, hiperbolične (geometrije Lobačevskoga) i eliptične (Riemannove) geometrije. (Uz navedena razmatranja, vidjeti ovdje naslov *Problem usporednica*.)

Lobačevskij se, osim geometrijom, bavio i drugim granama matematike: algebrom, matematičkom analizom, naročito teorijom beskonačnih redova i približnim rješavanjem algebarskih jednadžbi. Međutim, njegovo je otkriće neeuklidske geometrije genijalno matematičko ostvarenje. Ostvarenje s kojim je ovaj vrhunski matematički um zacrtao nove staze u razvoju cjelokupne matematike.

Pafnutij Ljvovič Čebišev



Za ruskog matematičara *Pafnutija Ljvoviča Čebiševa*, nadahnutog stvaralačkim genijem poput Lobačevskoga, po višestrukosti i dubini istraživanja te snazi matematičkog talenta, može se reći da je bio "ruski Gauss". Studij matematike završio je na Moskovskom sveučilištu s dvadeset godina života. No, već dvije godine nakon toga publicirao je svoj prvi znanstveni rad, poslije čega slijedi niz drugih vrijednih radova koji su brzo privukli pažnju znanstvenih krugova. U 20-oj godini brani svoju magistarsku radnju *Pokušaj elementarne analize teorije vjerojatnosti.* Nakon položenog doktorata (tema: *Teorija izjednačivanja*) predaje na Sveučilištu u Petrogradu matematičke kolegije: integralni račun, diferencijalne jednadžbe, višu algebru, teoriju brojeva, teoriju vjerojatnosti i dr.

Čebišev je bio član Petrogradske akademije znanosti, počani član gotovo svih sveučilišta u Rusiji, niza ruskih i inozemnih znanstvenih društava, potom član akademija znanosti u Berlinu, Parizu, te član Londonskog kraljevskog društva, Talijanske kraljevske akademije i Švedske akademije znanosti. U povodu njegova izbora za člana Francuske akademije znanosti, slavni francuski matematičar Charles Hermite u pismu Čebiševu piše, da je "ponos znanosti Rusije i jedan od prvih geometara Europe, kao i jedan od najvećih geometara svih vremena".

Postao je poznat u svijetu matematike u prvom redu svojim postignućima u teoriji brojeva (zakon raspodjele prostih brojeva). Kao naročito suptilni matematičar iskazao se u djelu (na ruskom jeziku): *O određivanju broja prostih brojeva koji ne prelaze zadanu veličinu,* 1848. Tu obrađuje probleme koji su u vezi s radovima priznatih i cijenjenih matematičara: Euklida, Eulera, Le Gendrea, Liouvillea, Dirichleta, Riemanna, Dedekinda, Bertranda, Hermitea i Minkowskoga. Dokazao je poznati Bertrandov postulat, koji glasi: *Za svaki prirodan broj x veći od 1 između x i $2x$ nalazi se bar jedan primbroj.*

Došao je do značajnih rezultata u teoriji približnog izračunavanja funkcija, u teoriji interpolacije, posebno u teoriji vjerojatnosti (zakon velikih brojeva, slučajna veličina, metoda momenata i dr.). Svojim nastojanjima Čebišev je rusku teoriju vjerojatnosti doveo na prvo mjesto u svijetu.

Dosta se bavio teorijom mehanizama i strojeva. U ovom je području dao brojne radove, poznate u njegovoj domovini i izvan nje. Pokazao je veliko znanje u području praktične mehanike. Obraćao se praksi kao izvoru teorijskih istraživanja.

Kao vrijednom, neobično darovitom matematičaru, plodonosnom i zaslužnom za razvoj matematike, Petrogradska akademija znanosti izdala je Čebiševljeva sabrana djela, 1899. – 1907. To isto je kasnije učinila Akademija znanosti Sovjetskog Saveza u pet tomova, u kojima su ove cjeline: *Teorija brojeva* (1. tom), *Analiza* (2. i 3. tom), *Teorija mehanizama* (4. tom) i *Drugi radovi i materijali povijesnog i biografskog značenja* (5. tom).

"Mnogobrojni znanstveni radovi u skoro svim područjima matematike i primijenjene mehanike, radovi duboki po sadržaju i snažni po originalnosti metoda ispitivanja, stvorili su Čebiševu slavu jednog od najvećih predstavnika matematičke misli. Ogromno bogatstvo ideja koje su posijane u tim radovima, bez obzira na dugi protok vremena od smrti njihova tvorca, nije ništa izgubilo na svojoj svježini i aktualnosti. . ." (Gnedenko)

Sofja Kovalevskaja



Ruska matematičarka *Sofja* (*Sonja*) *Vasiljevna Kovalevskaja* (rođ.: *Korvin-Krukovskaja*), iz ugledne obitelji (otac artiljerijski časnik, djed poznati astronom i glazbenik), bila je izuzetno nadarena. S 11 godina ispisala je zidove vlastite sobe zadacima iz algebre i geometrije, a s 12 godina kupila je knjigu za studente matematike i brzo je savladala. U Petrogradu je zapanjila profesore svojim talentom.

Kako u ondašnjoj carskoj Rusiji žene nisu smjele studirati, Sofja se fiktivno udaje za paleontologa Vladimira Kovalevskog da bi mogla otputovati u Heidelberg zbog studiranja. Tamo joj predaje glasoviti njemački matematičar Karl Weierstrass (1815. – 1897.), koji u svojim memoarima piše da je ona bila njegov najbistriji student. (Weierstrass je 1861. dao prvi primjer neprekinute funkcije koja ni u kojoj svojoj točki nije diferencijabilna.) U Berlinu oduševljava poznavatelje matematike svojim matematičkim darom. U Göttingenu 1874. postiže doktorat iz filozofije matematike. Budući da u Njemačkoj nije uspjela dobiti formalno priznanje za uspjeh u matematici, vraća se u Rusiju. Nakon što je rodila kćer i razvela se od muža (koji 1883. pokušava izvršiti suicid), odlazi u Stockholm. Nastojanjem G. Mitag-Lefflera god. 1884. postaje profesoricom na sveučilištu u Stockholmu. Kovalevskaja je prva žena koja je to postigla.

U Stockholmu izdaje poznatu reviju *Acta matematica*. Isticala se u radovima iz područja parcijalnih diferencijalnih jednadžbi, eliptičkih integrala te primjenom matematike na probleme iz astronomije. Dobila je nagradu Francuske akademije znanosti (Prix Bordin) za djelo: *Zadača o vraščenii tvrdogo tela vokrug nepodviženoj točki* (*Problem o vrtnji krutog tijela oko nepomične točke*). God. 1889. postaje član Ruske akademije znanosti – prva žena kojoj je pripala ta čast.

Bavila se i književnošću (pisala je romane i kazališna djela) te psihologijom. Napisala je: *Vospominenija detstva* (*Sjećanja na djetinjstvo*), roman *Nigilistka* (*Nihilizam*) i dr.

Mihailo Petrović



Mihailo Petrović, srpski matematičar izrazite darovitosti i velike energije, završio je studije prirodnih i matematičkih znanosti na Velikoj školi u Beogradu, nakon čega je nastavio studirati u Parizu, gdje je 1894. postigao doktorat iz matematike (tema na francuskom jeziku: *O nulama i beskonačnostima integrala algebarskih diferencijalnih jednadžbi*).

Više od 40 godina Petrović je predavao matematiku na Beogradskom univerzitetu. Bio je redoviti član Srpske akademije nauka, član niza akademija znanosti i mnogih znanstvenih društava, profesor više univerziteta i aktivni sudionik na raznim međunarodnim znanstvenim skupovima matematičara. Jedan je od osnivača znanstvenog časopisa *Puplications mathématiques de l'Université de Belgrade* (*Matematičke publikacije Univerziteta u Beogradu*), pokrenutog 1932. (danas drugog imena). Premda je Petrović pokazivao osobitu sklonost za diferencijalne jednadžbe, bavio se i: klasičnom algebrom, diferencijalnim i integralnim računom, teorijom brojeva, matematičkom i općom fenomenologijom.

Brojni su njegovi prilozi analitičkoj teoriji diferencijalnih jednadžbi. Naročito su mu značajni rezultati koji se odnose na teoriju uniformnih partikularnih integrala. U mnogim Petrovićevim radovima iz teorije diferencijalnih jednadžbi tretiraju se problemi kojima su se bavili eminentni matematičari moderna vremena. Zanima se također mehaničkom integracijom diferencijalnih jednadžbi pomoću hidrauličnih aparata. Pronašao je *hidrointegrator*. Dobio je međunarodna priznanja u ovoj domeni.

Drugo veliko područje Petrovićeva interesa pripada teoriji funkcija realne i teoriji funkcija kompleksne varijable. (Petrovićeve cijele funkcije koje se primjenjuju u aritmetici, u analizi...) Postavio je temelje i trasirao put izgradnje matematičke i opće fenomenologije. Napisao je respektabilna djela iz navedenih matematičkih disciplina na francuskom i na srpskom jeziku, recimo: *Les spectres numériques* (*Numerički spektri*) s uvodom E. Borela, 1919.; *Intégration qualitative des équations différentielles* (*Kvalitativna integracija diferencijalnih jednadžbi*), 1931.; *Fenomenološko preslikavanje*, 1933.

M. Petrović je god. 1931. i god. 1933. bio član znanstvenih ekspedicija u sjevernom (arktičkom) području, a god. 1935. u južnom (antarktičnom) području. Ta je putovanja zanimljivo opisao u svojim knjigama: *Kroz polarnu oblast*, *U carstvu gusara*, *Sa okeanskim ribarima*, *Po zabačenim ostrvima*... Bio je strastveni ribič, rado se družio s ribarima na Dunavu; zato su ga zvali "Mika-Alas". Bavio se i književnošću. Napisao je djela: *Jedna nedovršena ili zagubljena pripovetka Stevana Sremca*, *Roman jegulje*, *Đerdapski ribolovci u prošlosti i u sadašnjosti*... Popularni "Mika-Alas" pokazivao je interes i za kriptografiju.

Ovaj vrsni i talentirani matematičar, literarni stvaratelj, zaljubljenik u ribarenje i putovanja po dalekim polarnim prostranstvima, pored toga što je intenzivno proučavao mnoga područja matematike, zanimao se različitim pitanjima geometrije, mehanike, fizike i kemije. Objavio je oko 250 zapaženih radova. Minucioznim pristupom problemima i kreativnošću ideja Mihailo Petrović je ostavio svoje jasne tragove na putovima razvoja matematike, naročito na stazama razvoja matematike u vlastitoj zemlji.

Josip Plemelj



Slovenski matematičar *Josip Plemelj* potječe iz siromašne obitelji. Iako je ostao bez oca kad je imao tek jednu godinu, završio je gimnaziju u Ljubljani, gdje se već tada interesirao za višu matematiku. Dobro je savladao latinski jezik, pa je čitao neke čuvene matematičke autore (primjerice, Gaussa) na tom jeziku. Uz matematiku, Plemelj je volio astronomiju i nebesku mehaniku. Studij matematike i fizike završio je u Beču. God. 1898. doktorirao je s temom (na njemačkom jeziku): *O linearnim homogenim diferencijalnim jednadžbama s jednoznačnim periodičnim koeficijentima.* Poslije toga se znanstvno usavršavao u Berlinu i u Göttingenu (kod F. Kleina i D. Hilberta). Predavao je matematiku na raznim razinama dok 1919. nije postao redoviti profesor Ljubljanskog univerziteta, kojemu je bio prvi rektor.

Na ljubljanskom Filozofskom fakultetu, uz opći tečaj matematike, držao je predavanja iz diferencijalnih jednadžbi, teorije analitičkih funkcija i algebre s teorijom brojeva. Plemelj se u prvom redu bavio diferencijalnim i integralnim jednadžbama, a onda teorijom potencijala (harmonijske funkcije) i teorijom analitičkih funkcija. U teoriji diferencijalnih jednadžbi poučavao je jednadžbe klase Fuchsa i teoreme Kleina. Među ostalim njegovim doprinosima je jednostavni dokaz Fermatove tvrdnje za pete potencije,

tj. za $n = 5$. (Vidjeti ovdje naslov *Veliki Fermatov problem*.) Početkom 20. st. objavio je, pretežno u Beču, nekoliko vrijednih rasprava na njemačkom jeziku. Najvažniji rad u području primjene integralnih jednadžbi u teoriji potencijala je njegova knjiga: *Potentialtheoretische Untersuchungen* (*Istraživanja u teoriji potencijala*), Leipzig, 1911. za koju je dobio nagradu Znanstvenog društva kneza Jablonowskega u Leipzigu.

J. Plemelj je objavio tri sveučilišna udžbenika iz područja koja je neprestano proučavao; to su: *Teorija analitičnih funkcij* (*Teorija analitičkih funkcija*), 1953.; *Diferencialne in integralne enačbe. Teorija in uporaba* (*Diferencijalne i integralne jednadžbe. Teorija i primjena*), 1960. i *Algebra in teorija števil* (*Algebra i teorija brojeva*), 1962. Na engleskom jeziku objelodanjena je njegova knjiga: *Problems in the Sense of Riemann and Klein* (*Problemi u smislu Riemanna i Kleina*), New York, London, Sydney – 1964. i rasprava o Newtonovom potencijalu za elipsoid u rotaciji. Njegov najveći uspjeh je izvorno i jednostavno rješenje (objavljeno 1908.) Riemannova problema o postojanju diferencijalne jednadžbe sa zadanom monodromskom grupom. Pri rješavanju se koristio vlastitim formulama (Plemeljeve formule). Iz njegovih metoda za rješavanje Riemannova problema razvila se teorija integralnih jednadžbi.

Plemeljeva bibliografija obuhvaća 33 jedinice, od čega je 30 znanstvenih rasprava.

Osim spomenute nagrade u Leipzigu, J. Plemelj je za svoj rad dobio 1912. u Beču nagradu Richarda Liebna i 1954. u Ljubljani Prešernovu nagradu. Dodijeljena su mu brojna priznanja: bio je redoviti član SAZU (od 1938.), dopisni član JAZU u Zagrebu (od 1923.) i Bavarske akademije znanosti u Münchenu (od 1954.) te redoviti član SANU u Beogradu (od 1930.). Bio je također počasni doktor Univerziteta u Ljubljani.

Josip Plemelj je lucidnim umom i prodornom intuitivnošću obogatio matematiku značajnim i respektabilnim djelima, a vlastitim originalnim radovima potpomogao je općenito razvoj ove stare egzaktne znanosti, osobito u svojoj rodnoj Sloveniji.

Waclaw Sierpinski



Waclaw Francisk Sierpinski, zasigurno najveći poljski matematičar, studirao je u Varšavi i Krakowu, predavao matematiku na sveučilištima u Lvovu i Varšavi. Bio je član mnogih akademija znanosti i uglednih društava (Accademie dei Lince, Mathematic Society u Londonu itd.). Osim za teoriju funkcija realne varijable, pokazao je veliki interes osobito za probleme teorije skupova, teorije grupa, teorije brojeva i topologije. Osnovao je časopis: *Fundamenti matematike*.

Bavio se tzv. *fraktalnom geometrijom* (*Sierpinskijev trokut*). Kažimo usput: Fraktalna geometrija, kojoj je začetnik Benoft Mandelbrot (rođ. 20.11.1924. u Varšavi), je geometrija prirodnog svijeta – svijeta životinja, biljaka i minerala. Ona zrcali nepravilne ali stvarne oblike prirode, a ne idealizirane likove euklidske geometrije. Fraktale viđamo svugdje. Postoje brojne definicije fraktala, naprimjer: Fraktal je objekt "sebi sličan", repetitivan u obliku, različit u veličini; odnosno: fraktal je geometrijski oblik sličan samom sebi u različitim mjerilima.

W. Sierpinski bio je izuzetno plodan pisac; napisao je više od 700 radova i preko 50 knjiga. Najvažnije njegove knjige su: *Teorija iracionalnih brojeva* (1910.), *Uvod u teoriju grupa* (1912.), *Teorija brojeva* (1912.), *Osnove teorije brojeva* (1946.), *Opća topologija* (1952.), *Glavni i prosti brojevi* (1958.).

Andrej Nikolajevič Kolmogorov



Poslije završenog studija na Moskovskom sveučilištu, čuveni ruski matematičar *Andrej Nikolajevič Kolmogorov* obnašao je visoke stručne dužnosti. Niz godina vodio je u Moskvi Katedru za vjerojatnost i Laboratorij statističkih metoda. Ne napunivši četrdesetu godinu života, postaje članom Akademije znanosti Sovjetskog Saveza; bio je član mnogih inozemnih akademija znanosti i znanstvenih društava.

Kolmogorov se intezivno bavio teorijom funkcija realne varijable, gdje je dao uspješne radove o konvergenciji trigonometrijskih redova, poopćenju pojma integrala i dr. Vrijedni su također njegovi radovi u teoriji približnih vrijednosti funkcija i funkcinalnoj analizi. Ta su njegova postignuća izložena u djelima (na ruskom jeziku): *Uvod u teoriju funkcija realne varijable* (1938.) i *Elementi teorije funkcija i funkcionalne analize* (1972.). Zapažen je Kolmogorovljev rad u topologiji, u kojoj je utemeljio teoriju tzv. "gornjih homologija", a važni su i njegovi radovi u teoriji diferencijalnih jednadžbi.

Kolmogorov je teoriju vjerojatnosti, koja se intenzivno počela razvijati u prvoj polovici 20. st., osuvremenio i modernizirao, zasnovavši je na aksiomatskim načelima. Naime, nakon što je s A. J. Hinčinom počeo u teoriji vjerojatnosti primjenjivati metode teorije funkcija realne varijable, objavio je 1933. na njemačkom jeziku djelo: *Osnovni pojmovi računa vjerojatnosti*, u kojemu je iznio aksiomatske temelje teorije vjerojatnosti. Tu polazi od skupa Ω *elementarnih događaja*. U skupu Ω promatra skup F kojemu su elementi podskupovi skupa Ω i koji se zovu *slučajni događaji*. Slijedi dalje pet aksioma, od kojih 3. aksiom glasi: Svakom slučajnom događaju $A \in F$ pridružuje se nenegativan broj $P(A)$ koji se zove *vjerojatnost* događaja A. Skup (prostor) Ω elementarnih događaja, skup F slučajnih događaja i funkcija P, definirana na skupu F, čine *prostor vjerojatnosti* $\{\Omega, F, P\}$. Ako se javlja beskonačno mnogo elementarnih događaja, onda Kolmogorov uvodi još jedan, 6. aksiom. (Današnjom matematičkom terminologijom Kolmogorovljevi aksiomi se formuliraju pomoću tzv. algebre događaja.)

U svojim je kasnijim radovima Kolmogorov razvio teoriju stacioniranih slučajnih procesa i dao važan prilog teoriji informacije; vršio je statistička istraživanja u kontroli masovne proizvodnje, u biologiji i u matematičkoj lingvistici. Ispitivao je granične raspodjele za sume nezavisnih slučajnih veličina.

Uz ostala matematička ostvarenja, objavio je 20-ak povijesno-matematičkih radova. Sadržajem, načinom obrade i kakvoćom, posebno se izdvajaju njegova djela (na ruskom jeziku): *Suvremena matematika* (1936.) i *Matematika* (1954., 1974.). U njima autor razmatra prijelaz osnovnih matematičkih pojmova s nižeg stupnja općenitosti i apstrakcije na viši stupanj; naglašava rastuću ulogu matematike u znanstvenoj spoznaji svijeta; izlaže razvoj matematike, od rađanja prvih aritmetičkih i geometrijskih znanja te početaka algebre i trigonometrije preko njezinih epohalnih pronalazaka, sve do sredine 20. st. Na kraju ističe veliko značenje otkrića neeuklidske geometrije Lobačevskoga.

Ime ovoga velikana matematike ostat će zabilježeno ne samo u teoriji vjerojatnosti, već i mnogim drugim granama ove drevne znanosti, osobito u povijesti, metodologiji i filozofiji matematike. Znameniti američki matematičar Norbert Wiener (1894. – 1964.), koji je s 14 godina završio studij matematike i postigao izvanredno uspješne rezultate u primjeni matematike (uveo naziv *kibernetika* i razvio *teoriju kibernetike*, 1948.), drži da je A. N. Kolmogorov jedan od najvećih matematičara 20. st.

Vječna renta

Boško Šego[1], *Marija Špekuljak*[2], *Zagreb*

U ovom radu odgovorit ćemo na sljedeće pitanje: Koliko se mora uložiti danas ako se želi na osnovi tog jednog iznosa vječno podizati nominalno jednake iznose R krajem svake godine[3] uz pretpostavku da je obračun kamata složen, godišnji i dekurzivan uz primjenu fiksnog godišnjeg kamatnjaka p? Taj iznos nazivamo *vječnom rentom*.

Vidjeli smo[4] da sadašnju vrijednost C_0 jednog iznosa C_n, uz pretpostavku da je obračun kamata složen, godišnji i dekurzivan uz primjenu fiksnog godišnjeg kamatnjaka p, računamo koristeći formulu

$$C_0 = \frac{C_n}{r^n}, \tag{1}$$

pri čemu je $r = 1 + \frac{p}{100}$ dekurzivni kamatni faktor. To znači da ako imamo konačno mnogo iznosa C_1, C_2, ..., C_n, njihovu sadašnju vrijednost možemo izračunati koristeći formulu

$$A_n = \frac{C_1}{r} + \frac{C_2}{r^2} + \ldots + \frac{C_n}{r^n}. \tag{2}$$

Posebno, ako je riječ o nominalno jednakim iznosima R, onda njihovu sadašnju vrijednost možemo izračunati koristeći formulu za zbroj prvih n članova *geometrijskog niza* kojemu je prvi član 1, a kvocijent r, na sljedeći način:

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{R}{r} + \frac{R}{r^2} + \ldots + \frac{R}{r^{n-1}} + \frac{R}{r^n} = \frac{R}{r^n}\left(r^{n-1} + r^{n-2} + \ldots + r + 1\right) \\ &= \frac{R}{r^n}\left(1 + r + \ldots + r^{n-2} + r^{n-1}\right) = \frac{R}{r^n}\,\frac{r^n - 1}{r - 1}. \end{aligned} \tag{3}$$

Budući da nas zanima sadašnja vrijednost beskonačno mnogo nominalno jednakih iznosa R koji dospijevaju krajem godine, znači da trebamo zbrojiti sadašnje vrijednosti *svih* tih iznosa. Dakle, zanima nas iznos

$$A_\infty = \frac{R}{r} + \frac{R}{r^2} + \ldots + \frac{R}{r^n} + \ldots. \tag{4}$$

Riječ je o beskonačnom redu, pa s obzirom na to da se traži vječna renta, treba vidjeti što se s tim redom događa kada broj nominalno jednakih postnumerando iznosa raste u neizmjerno, što možemo zapisati ovako: $n \to \infty$. U tom procesu formula (4) transformira se u sljedeći izraz:

$$\begin{aligned} A_\infty &= \lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty}\left(R \cdot \frac{r^n - 1}{r^n(r-1)}\right) = \frac{R}{r-1}\lim_{n\to\infty}\frac{r^n - 1}{r^n} \\ &= \frac{R}{r-1}\lim_{n\to\infty}\frac{r^n - 1}{r^n} : \frac{r^n}{r^n} = \frac{R}{r-1}\lim_{n\to\infty}\frac{1 - \frac{1}{r^n}}{1} = \frac{R}{r-1} = \frac{R}{\frac{p}{100}} = \frac{100R}{p}. \end{aligned}$$

---

[1] Redoviti profesor na Ekonomskom fakultetu u Zagrebu.

[2] Apsolventica na Ekonomskom fakultetu u Zagrebu.

[3] U slučaju kada je riječ o iznosima koji se plaćaju krajem razdoblja, govorimo o *postnumerando* iznosima.

[4] Pavić Eva, Šego Boško, *Složeni kamatni račun*, MFL, LVII, 2 (2006. – 2007.), str. 88–96.

Prema tome, sadašnju (aktualnu) vrijednost vječne rente R računamo formulom

$$A_\infty = \frac{100R}{p}. \tag{5}$$

Uočimo da smo do formule (5) mogli doći i bez upotrebe granične vrijednosti. Naime, želimo li krajem svake godine *vječno* podizati nominalno jednak iznos R uz uvjet da je obračun kamata složen, godišnji i dekurzivan i uz primjenu fiksnog godišnjeg kamatnjaka p, onda to znači da *krajem svake* godine treba podizati *samo* kamate za razmatranu godinu, to jest iznos

$$R = \frac{pA_\infty}{100}, \tag{6}$$

a iz ove formule onda možemo izračunati traženu sadašnju vrijednost

$$A_\infty = \frac{100R}{p}.$$

Dakle, ako je poznat iznos koji se danas ulaže A_∞, da bi se na temelju njega mogla podizati vječna renta R, onda je njezin iznos jednak

$$R = \frac{pA_\infty}{100}.$$

Naravno, fiksni godišnji kamatnjak p uz koji se sadašnja vrijednost A_∞ može vječno dati u najam računamo koristeći formulu

$$p = \frac{100R}{A_\infty}. \tag{7}$$

Želimo li uspoređivati dvije ili više opcija, ponekad se koristimo upravo vječnom rentom. Primjerice, zemlja se tretira kao dobro koje je neuništivo, pa možemo usporediti (godišnji) prinos izražen u novcu, pretpostavljajući da je fiksan, s drugom opcijom – prodajom te zemlje i prihodom od (godišnjih) kamata od novca dobivenog prodajom zemlje i oročenog uz fiksni kamatnjak, pri čemu glavnicu ne mijenjamo. Ilustrirat ćemo rečeno sljedećim primjerom.

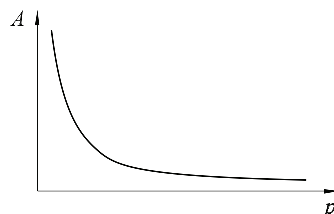
Primjer 1. Ako godišnji neto prihod s neke zemlje iznosi 60 000 kn, kolika je cijena te zemlje (danas) ako je godišnji kamatnjak na oročena financijska sredstva u poslovnoj banci $p_0 = 7.5$? Da li se cijena zemlje povećava ili smanjuje ako se godišnji kamatnjak poveća na $p_1 = 10$, odnosno smanji na $p_2 = 6$? Poopćite posljednji rezultat.

Dakle, zanima nas sadašnja vrijednost ako je poznato da je iznos vječne rente 60 000 kn, a godišnji kamatnjak $p_0 = 7.5$. Budući da je

$$A_\infty = \frac{100R}{p},$$

to je danas cijena zemlje

$$A_\infty = \frac{100 \cdot 60\,000}{7.5} = 800\,000 \text{ kn}.$$



Slika 1.

Iz formule (5) slijedi da je sadašnja vrijednost obrnuto razmjerna kamatnjaku, što znači da u slučaju da se poveća kamatnjak p, smanjuje se aktualna vrijednost vječne

rente, a ako se on smanji, ona se povećava (slika 1). Doista, za $p_1 = 10$ je

$$A_\infty = \frac{100R}{p_1} = \frac{100 \cdot 60\,000}{10} = 600\,000 \text{ kn},$$

a za $p_2 = 6$ je

$$A_\infty = \frac{100R}{p_2} = \frac{100 \cdot 60\,000}{6} = 1\,000\,000 \text{ kn}.$$

Primjer 2. Tržišna vrijednost nekog dvosobnog stana u Zagrebu je 600 000 kn. Ako poslovne banke na oročena sredstva plaćaju godišnje kamate 8%, odredite minimalnu godišnju neto najamninu za taj stan?

U ovom primjeru razmatramo isplati li se više prodati stan po tržišnoj cijeni ili ga dati u najam uz fiksnu godišnju najamninu. Uočimo da pretpostavljamo da je i tržišna cijena promatranog stana nepromjenjiva. Prodajom stana dobiva se 600 000 kn, pa nas zanima možemo li, uz navedene pretpostavke, dobivati veći godišnji iznos iznajmljivanjem stana ili oročavanjem u poslovnoj banci iznosa dobivenog prodajom stana. Dakle, uzimamo da je $A_\infty = 600\,000$ kn, a $p = 8$. Budući da se iznos vječne rente računa formulom

$$R = \frac{pA_\infty}{100},$$

minimalna godišnja najamnina koju treba na tržištu nekretninama ostvariti je

$$R = \frac{8 \cdot 600\,000}{100} = 48\,000 \text{ kn}.$$

Ako se na tržištu ne može ostvariti godišnja neto najamnina od barem 48 000 kn, onda se vlasniku stana uz navedene uvjete više isplati prodati stan i dobiveni novac oročiti u poslovnoj banci *PB* koja na oročena sredstva plaća 8% godišnjih kamata.

Primjer 3. Je li povoljnije prodati dvosobni stan u Zagrebu kojemu je tržišna vrijednost 600 000 kn i dobiveni novac oročiti u poslovnoj banci *PB* koja na oročena sredstva plaća fiksne godišnje kamate 5.6% ili stan dati u najam za godišnju neto najamninu od 36 000 kn?

Ako vlasnik proda stan i dobiveni novac oroči u banci *PB* uz 5.6% godišnje, može računati s godišnjom rentom u iznosu

$$R = \frac{5.6 \cdot 600\,000}{100} = 33\,600 \text{ kn},$$

pa mu se, uz navedene uvjete, više isplati stan dati u najam, jer u ovom drugom slučaju imat će godišnju rentu (u obliku godišnje neto najamnine) u iznosu 36 000 kn.

Primjer 4. Uz koji je najmanji godišnji kamatnjak na oročena sredstva u poslovnoj banci *PB* povoljnije prodati dvosobni stan u Zagrebu kojemu je tržišna vrijednost 600 000 kn i dobiveni novac oročiti u poslovnoj banci *PB*, nego ga dati u najam za godišnju neto najamninu od 42 000 kn?

Ponovo razmatramo dvije opcije: prva je prodaja stana i oročavanje dobivenih financijskih sredstava u poslovnoj banci *PB* uz fiksni godišnji kamatnjak i podizanje na kraju godine samo dospjelih kamata, a druga je iznajmljivanje razmatranog stana uz fiksnu godišnju neto najamninu u iznosu 42 000 kn.

Traženi minimalni godišnji kamatnjak izračunat ćemo koristeći formulu

$$p = \frac{100R}{A_\infty}.$$

Dakle, u razmatranom primjeru je

$$p = \frac{100 \cdot 42\,000}{600\,000} = 7,$$

što interpretiramo na sljedeći način: ako poslovna banka *PB* na oročena sredstva daje fiksne godišnje kamate veće od 7%, onda se vlasniku stana više isplati prva opcija (prodaja stana i oročavanje dobivenog iznosa). Ako su godišnje kamate manje od 7%, više mu se isplati druga opcija (iznajmljivanje stana). U slučaju kada je godišnji kamatnjak na oročena sredstva upravo 7, onda su razmatrane dvije opcije ekvivalentne, to jest uz navedene pretpostavke (ne ulazeći u podrobniju analizu razmatranih opcija) vlasnik stana će njegovom prodajom polučiti jednak financijski učinak onom koji bi imao iznajmljivanjem tog stana.

U pravilu kada se razmatra vječna renta riječ je o iznosima koji se isplaćuju krajem svakog razmatranog razdoblja, to jest o *postnumerando* iznosima. No, to ne mora nužno biti tako. Ponekad je riječ o iznosima koji se odnose na početak razdoblja. Kažemo da tada imamo *prenumerando* rente.

Primjer 5. Poduzeće *Croatian Math* izdaje vrijednosne papire. Investitori trebaju na temelju tih vrijednosnica od dana kupnje primati nominalno jednake novčane iznose i to u iznosu 5% nominalne vrijednosti iznosa uloženog u *Croatian Math* pri čemu im samo ulaganje nikad ne bi bilo vraćeno. Kako utvrditi vrijednost ove ponude?

Dakle, investitori će *početkom* svake godine primati iznos R na temelju investicije u iznosu A'_∞. Iz danih uvjeta slijedi

$$R = 5\% \cdot A'_\infty = \frac{5 \cdot A'_\infty}{100} = 0.05 \cdot A'_\infty. \tag{8}$$

Uočimo da je, zanemarimo li prvu isplatu, sadašnja vrijednost svih preostalih isplata

$$A_\infty = \frac{R}{r} + \frac{R}{r^2} + \ldots + \frac{R}{r^n} + \ldots, \qquad \text{to jest} \qquad A_\infty = \frac{100R}{p}.$$

No, budući da je u ovom slučaju prva isplata izvršena istovremeno s uloženom investicijom, to je sadašnja vrijednost svih isplata

$$A'_\infty = R + A_\infty = R + \frac{R}{r} + \frac{R}{r^2} + \ldots + \frac{R}{r^n} + \ldots,$$

to jest

$$A'_\infty = R + \frac{100R}{p} = R\left(1 + \frac{100}{p}\right) = R\left(1 + \frac{1}{\frac{p}{100}}\right) = R\left(1 + \frac{1}{r-1}\right) = \frac{rR}{r-1}. \tag{9}$$

Uvjet (8) možemo zapisati i ovako:

$$\frac{R}{A'_\infty} = 0.05,$$

odnosno

$$\frac{A'_\infty}{R} = \frac{1}{0.05} = 20, \tag{10}$$

Iz (9) nalazimo

$$\frac{A'_\infty}{R} = \frac{r}{r-1}. \tag{11}$$

Sada iz (10) i (11) zaključujemo

$$\frac{r}{r-1} = 20,$$

pa se lako pokaže da je jedino rješenje algebarske jednadžbe

$$r = 20r - 20 \quad \text{tj.} \quad r = \frac{20}{19}.$$

Uvažavajući definiciju dekurzivnog kamatnog faktora r, dolazimo do jednadžbe

$$1 + \frac{p}{100} = \frac{20}{19},$$

rješenje koje je

$$p = \frac{100}{19} \approx 5.26316.$$

Zaključak: Za investitora je kupnja vrijednosnih papira poduzeća *Croatian Math* uz navedene uvjete ekvivalentna (po financijskim učincima) oročavanju financijskih sredstava potrebnih za kupnju vrijednosnica tog poduzeća uz godišnji kamatnjak 5.26316 i podizanje početkom svake godine 5% nominalnog iznosa uloženog u *Croatian Math*.

Primjer 6. (*Dionice s redovitom isplatom dividendi* (*obične dionice*).) Kupnjom dionica dioničar stječe zakoniti udio u dioničkom društvu. Vrijednost dionica za dioničara prije svega ovisi o očekivanim budućim dividendama, koje se diskontiraju (to jest svode na sadašnju vrijednost) primjerenom diskontnom stopom (do sada smo govorili kamatnjakom p). Dividende koje isplaćuje poduzeće su dio njegove ostvarene godišnje dobiti. Tako možemo dionicu vrednovati tretirajući dividende kao vječnu rentu, to jest vrijednost dionice danas izjednačujemo sa sadašnjom vrijednošću očekivanih budućih isplata dividendi C.

Budući da se dividende isplaćuju na kraju razdoblja nakon što su poznati rezultati poslovanja dioničkog društva, obično se sadašnja vrijednost dionice (uz pretpostavku da su dividende fiksne i iznose C) računa koristeći formulu

$$SV = \frac{C}{i}, \tag{12}$$

pri čemu je $i = \frac{p}{100}$ vremenska preferencija novca, odnosno mjera razmjene novčane jedinice raspoložive u različitim vremenskim trenucima, koju identificiramo s postotkom godišnjeg kamatnjaka p. Uočimo da su zapisi (5) i (12) ekvivalentni.

Primjer 7. Koliko vrijede dionice koje posjedujemo ako procjenjujemo da donose dividende od 10 000 kn godišnje? Godišnji kamatnjak je 6.

Koristeći formulu (12), nalazimo da je tražena vrijednost dionica

$$SV = \frac{10\,000}{\frac{6}{100}} = \frac{10\,000}{0.06} \approx 166\,666.67 \text{ kn}.$$

Drugim riječima, financijski je ekvivalentno imati danas iznos 166 666.67 kn s vječnom isplatom dividendi u iznosu 10 000 kn uz navedene uvjete.

Očekivanja glede budućih isplata dividendi formiraju se u ovisnosti o mnogim čimbenicima. Pored promjena koje se odnose na poduzeće čije dionice želi kupiti investitor, bitnu ulogu igraju i mnogobrojni makroekonomski faktori, kao što su primjerice očekivanja o konjunkturi, kamatama, ali i naznake o mogućim političkim promjenama.

Da bismo na temelju očekivanih budućih dividendi mogli izračunati cijenu dionice, u formulu je potrebno uključiti i godišnju stopu rasta g. U nastavku ćemo pretpostaviti

da je stopa rasta na godišnjoj razini g fiksna. Ova pretpostavka znači da ako je prva isplata na kraju prvog razdoblja (godine) C, onda je isplata na kraju drugog razdoblja $C(1+g)$, trećeg $C(1+g)^2$ itd. Dakle, uz fiksnu godišnju stopu rasta g, isplatu C na kraju prvog razdoblja i fiksni godišnji kamatnjak p, sadašnju vrijednost sada računamo na sljedeći način:

$$SV = \frac{C}{1+i} + \frac{C(1+g)}{(1+i)^2} + \frac{C(1+g)^2}{(1+i)^3} + \frac{C(1+g)^3}{(1+i)^4} + \ldots + \frac{C(1+g)^{n-1}}{(1+i)^n} + \ldots \quad (13)$$

Ako prethodni izraz ima smisla (to jest ako konvergira navedeni beskonačni red), množeći prethodnu jednakost s $\frac{1+i}{1+g}$, dobivamo kako slijedi:

$$\frac{1+i}{1+g} \cdot SV = \frac{C}{1+g} + \underbrace{\frac{C}{1+i} + \frac{C(1+g)}{(1+i)^2} + \frac{C(1+g)^2}{(1+i)^3} + \ldots + \frac{C(1+g)^{n-1}}{(1+i)^n} + \ldots}_{=SV}$$

$$\frac{1+i}{1+g} \cdot SV = \frac{C}{1+g} + SV,$$

$$\frac{1+i}{1+g} \cdot SV - SV = \frac{C}{1+g},$$

$$\left(\frac{1+i}{1+g} - 1\right) \cdot SV = \frac{C}{1+g},$$

$$\frac{i-g}{1+g} \cdot SV = \frac{C}{1+g},$$

$$SV = \frac{C}{i-g}. \quad (14)$$

Formulom (13) možemo izračunati sadašnju vrijednost dionica ako je prva isplata C na *kraju* prvog razdoblja, a svaka iduća veća za faktor $1+g$ i također se plaća *krajem* razdoblja, pri čemu je i fiksna vremenska preferencija novca zadana na godišnjoj razini. Naravno, ako je riječ o isplatama *početkom* svakog razdoblja, onda se sadašnja vrijednost dionica računa formulom

$$SV = C \cdot \frac{i+1}{i-g}. \quad (15)$$

Uočimo da formula (14), odnosno (15), ima smisla samo za rastuću vječnu rentu, to jest samo ako je vremenska preferencija novca (ili, s aspekta, dioničara godišnji kamatnjak) veća od godišnje stope rasta; simbolički: $i > g$. U slučaju da je $i < g$, renta raste brže od kamata, sadašnja vrijednost rente je beskonačna, a ne negativna kao što bi se moglo zaključiti na temelju formule (14). Uvjet $i > g$ znači da je $\frac{1+g}{1+i} \in \langle 0, 1\rangle$, a to upravo garantira konvergenciju reda (13).

Primjer 8. U prvoj polovini 2006. godine *ABC Math* je slovilo kao najprofitabilnije i najbrže rastuće poduzeće čije su dionice kotirale na burzi. Dana 15. travnja 2006. zaključna cijena dionica navedene firme bila je 2395 kn, što je potaknulo raspravu financijskih analitičara o tome je li *ABC Math* precijenjen ili podcijenjen. Koristeći se modelom konstantno rastućih renti, pokušat ćemo procijeniti vrijednost dionica *ABC Math*. Kolika je vrijednost njihovih dionica ako sljedeće očekivane dividende iznose 60 kn po dionici? Koja konstantna stopa rasta dividendi g opravdava postojeći tečaj dionice ako se zahtijeva profitabilnost na investicije sličnog rizika 8%?

Najprije uočimo da je u razmatranom primjeru vremenska preferencija novca

$$i = \frac{p}{100} = \frac{8}{100} = 0.08.$$

Koristeći formulu (14), sada možemo izračunati korespondentnu stopu rasta dividendi:

$$2\,395 = \frac{60}{0.08 - g}, \qquad 0.08 - g = \frac{60}{2\,395},$$

to jest

$$g \approx 5.49\%.$$

Dakle, tečaj od 2395 kn uz navedene uvjete implicira godišnji rast dividendi od 5.49%. Zato će analitičari koji prognoziraju da poduzeće ne može ostvariti tu stopu rasta u idućim godinama, smatrati da je *ABC Math* precijenjen, a oni analitičari koji prognoziraju da će *ABC Math* ostvariti veću stopu rasta od 5.49%, da je *ABC Math* podcijenjen.

Do sada smo pretpostavljali da se vječna renta isplaćuje godišnje. Međutim, to ne mora uvijek biti tako. Zaposleni tijekom radnog vijeka uplaćuju u mirovinske fondove kako bi na temelju tih uplata mogli dobivati *mjesečne* isplate od trenutka umirovljenja do kraja života. Premda se u ovom slučaju ne radi o vječnoj renti, pretpostavit ćemo (u nemogućnosti da definiramo vrijeme smrti osiguranika) da će on živjeti vječno.

Primjer 9. Gospodin Matko Matkić je 40 godina redovito uplaćivao novac na svoj račun u fondu mirovinskog osiguranja, pa će mu osiguranje od trenutka njegovog umirovljenja do kraja života mjesečno isplaćivati 2000 kn. Kolika je sadašnja vrijednost ovih renti za gospodina Matka Matkića ako primijenimo formulu za vječnu rentu? Odredimo sadašnju vrijednost tih renti pretpostavljajući da su izračunane na temelju pretpostavke da će osiguranik primiti: (a) 4, (b) 44, (c) 444 mjesečnih renti. Sve izračune treba izvršiti uz pretpostavku da je vremenska preferencija novca konstantna i na godišnjoj razini jednaka 6%.

Budući da je riječ o mjesečnim rentama, potrebno je godišnji kamatnjak $p = 100i = 100 \cdot 6\% = 6$ pretvoriti u mjesečni. Naime, kod izračuna sadašnje vrijednosti rente, duljina razdoblja između dvije rente mora odgovarati duljini razdoblja na koje se odnosi kamatnjak. Neka je

$$m = \frac{d_1}{d},$$

pri čemu je d_1 – duljina vremenskog intervala na koji se odnosi kamatnjak p, a d – duljina vremenskog intervala u kojem se obavlja ukamaćivanje.

Može se pokazati da je svejedno da li, primjerice, štediša oroči neki iznos na razdoblje na koje se odnosi kamatnjak p ili na m razdoblja na koje se odnosi kamatnjak

$$p' = 100\left[\sqrt[m]{1 + \frac{p}{100}} - 1\right].$$

Kamatnjak p' nazivamo konformnim kamatnjakom. Ako je p godišnji kamatnjak, onda je

$$p' = 100\left[\sqrt[12]{1 + \frac{p}{100}} - 1\right]$$

mjesečni konformni kamatnjak. Primijenimo li formulu za vječnu rentu, prije nego što koristeći modifikaciju formule (5)

$$A_\infty = \frac{100R}{p'} \tag{16}$$

izračunamo sadašnju vrijednost navedenih renti za gospodina Matka Matkića, očito moramo izračunati mjesečni konformni kamatnjak koji odgovara godišnjem kamatnjaku $p = 6$. Budući da je

$$p' = 100\left(\sqrt[12]{1+\frac{p}{100}}-1\right) = 100\left(\sqrt[12]{1.06}-1\right) \approx 0.486755,$$

tražena sadašnja vrijednost je

$$A_\infty = \frac{100\cdot 2\,000}{0.486755} \approx 410\;884.28 \text{ kn}.$$

Ostatak primjera pretpostavlja da će osiguranik konačno mnogo mjeseci (recimo, k), krajem svakog mjeseca, primati navedeni iznos. To znači da je sadašnja vrijednost tih isplata

$$\begin{aligned} A_k &= \frac{R}{r'}+\frac{R}{(r')^2}+\ldots+\frac{R}{(r')^{k-1}}+\frac{R}{(r')^k} = \frac{R}{(r')^k}\left((r')^{k-1}+(r')^{k-2}+\ldots+r'+1\right) \\ &= \frac{R}{(r')^k}\left(1+r'+\ldots+(r')^{k-2}+(r')^{k-1}\right) = \frac{R}{(r')^k}\,\frac{(r')^k-1}{r'-1}, \end{aligned} \tag{17}$$

pri čemu je r' mjesečni dekurzivni konformni faktor: $r' = 1+\frac{p'}{100} \approx 1.00486755$.

(a) Ako je $k = 4$, onda je

$$A_4 = \frac{2\,000}{1.00486755^4}\,\frac{1.00486755^4-1}{1.00486755-1} \approx 7\,903.59 \text{ kn}.$$

(b) Za $k = 44$ je

$$A_{44} = \frac{2\,000}{1.00486755^{44}}\,\frac{1.00486755^{44}-1}{1.00486755-1} \approx 79\,042.28 \text{ kn}.$$

(c) Konačno, ako je $k = 444$, onda je

$$A_{444} = \frac{2\,000}{1.00486755^{444}}\,\frac{1.00486755^{444}-1}{1.00486755-1} \approx 363\,306.68 \text{ kn}.$$

Uočimo da ako umjesto formule (16) koristimo formulu (17), za dovoljno velik k dobit ćemo identičan rezultat. Primjerice,

$$A_{9999} = \frac{2\,000}{1.00486755^{9999}}\,\frac{1.00486755^{9999}-1}{1.00486755-1} \approx 410\,884.28 \text{ kn}.$$

Literatura

[1] ORSAG, S. (2003), *Vrijednosni papiri*, Revicon, Sarajevo.

[2] PAVIĆ E., ŠEGO B., *Složeni kamatni račun*, MFL, LVII, 2 (2006.–2007.), str. 88–96.

[3] RELIĆ, B., (2002), *Gospodarska matematika*, Hrvatska zajednica računovođa i financijskih djelatnika, Zagreb.

[4] SALAMON, Đ., ŠEGO, B., (2006), *Matematika* 3 – udžbenik sa zbirkom zadataka za treći razred ekonomske škole, Alka script, Zagreb.

[5] ŠEGO, B., (2005), *Matematika za ekonomiste*, Narodne novine, Zagreb.

[6] ŠEGO, B., ŠIKIĆ, T., (2006), *Četiri računa za ekonomiste*, VŠPU "Baltazar Adam Krčelić", Zaprešić.

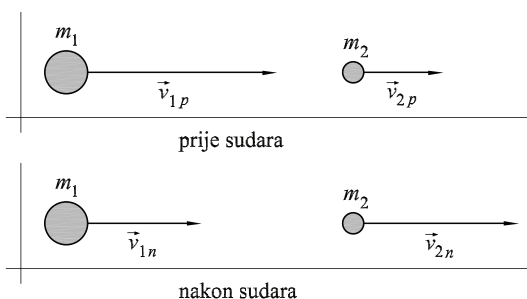


Sudari kuglica: simulacija u programskom jeziku C

Igor Rončević[1], *Rijeka i Goranka Bilalbegović*[2], *Zagreb*

O sudarima u fizici

Sudari objekata su vrlo važni u svakodnevnom životu, prirodi i znanosti. Sudaraju se galaktike i tako nastaju nove strukture u svemiru [1]. Sudaraju se čestice u velikim akceleratorima i tako dolazimo do novih spoznaja o strukturi materije na najsitnijim skalama duljina [2]. Nažalost, sudaraju se i automobili i ljudi nekad ginu. Simulacije sudara su dio mnogih računalnih igara koje su za neke dobra zabava, a za druge dobra zarada. Vrlo je važno istražiti i naučiti zakone sudara. Fizičari polaze od jednostavnih modela na kojima se formuliraju i provjeravaju osnovni zakoni. Najjednostavniji slučaj sudara je pri gibanju kuglica po pravcu. Za takve sudare kažemo da su jednodimenzionalni. Animacije koje prikazuju jednodimenzionalno gibanje i sudare samo dvije [3], te većeg broja [4] kuglica možete gledati na Internetu.



Slika 1.

U većini slučajeva sile koje djeluju prilikom sudara nisu poznate. Stoga se stanje sustava nakon sudara najčešće određuje iz zakona očuvanja količine gibanja i zakona očuvanja energije [5,6]. Zakon očuvanja količine gibanja vrijedi u svakom sudaru pri kojem ne djeluju vanjske sile. Tada je i energija promatranog sustava također

[1] Diplomirao je 2006. godine na Filozofskom fakultetu Sveučilišta u Rijeci, studijska grupa profesor fizike i politehnike. Apsolvent je na smjeru profesor matematike i informatike na istom fakultetu,
e-mail: `ironcev@hotmail.com`.
[2] Izvanredni je profesor fizike na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu, Sveučilište u Zagrebu,
e-mail: `goranka@phy.hr`.

očuvana. Općenito, ukupna energija ne mora uključivati samo kinetičku energiju već i ostale oblike poput unutarnje energije, energije deformacija, rotacijske energije, itd. U elastičnom sudaru zanemarujemo sve ove energije i uzimamo u obzir samo potencijalnu i kinetičku energiju. Izvedimo sada relacije koje nam povezuju brzine kuglica prije i nakon elastičnog sudara. Zamislimo dvije kuglice koje se gibaju duž pravca koji spaja njihove centre (i koji ujedno čini x-os koordinatnog sustava) te se sudare nastavljajući se gibati duž iste linije poslije sudara (slika 1). Kuglice tijekom sudara djeluju jedna na drugu silama koje imaju smjer duž početne linije gibanja te će i konačno gibanje biti usmjereno duž iste koordinatne osi. Stoga u izvodu ne koristimo vektorski oblik brzine već pišemo isključivo iznose brzina. Pri tome vrijedi: iznos brzine kuglice je negativan ukoliko se ona giba u negativnom smjeru x-osi, odnosno pozitivan ukoliko se giba u pozitivnom smjeru x-osi.

Mase kuglica su m_1 i m_2, a iznosi brzina v_{1p} i v_{2p} prije sudara te v_{1n} i v_{2n} nakon sudara. Iz zakona očuvanja količine gibanja dobivamo:

$$m_1 v_{1p} + m_2 v_{2p} = m_1 v_{1n} + m_2 v_{2n}. \tag{1}$$

Iz zakona očuvanja energije dobivamo:

$$\frac{1}{2} m_1 v_{1p}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2p}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1n}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2n}^2. \tag{2}$$

Ako znamo mase i početne brzine kuglica iz gornjih jednadžbi možemo izračunati krajnje brzine v_{1n} i v_{2n}. Jednadžbu (1) zapisujemo na sljedeći način:

$$m_1 \left(v_{1p} - v_{1n}\right) = m_2 \left(v_{2n} - v_{2p}\right). \tag{3}$$

Jednadžbu (2) zapisujemo kao:

$$m_1 \left(v_{1p}^2 - v_{1n}^2\right) = m_2 \left(v_{2n}^2 - v_{2p}^2\right). \tag{4}$$

Budući je došlo do sudara vrijedi $v_{1n} \neq v_{1p}$ i $v_{2n} \neq v_{2p}$. Podijelimo jednadžbu (4) s jednadžbom (3) i dobivamo:

$$\begin{aligned} v_{1p} + v_{1n} &= v_{2p} + v_{2n}, \\ v_{1p} - v_{2p} &= -(v_{1n} - v_{2n}). \end{aligned} \tag{5}$$

Rezultat (5) znači da je u jednodimenzionalnom elastičnom sudaru relativna brzina približavanja prije sudara iznosom jednaka, a smjerom suprotna relativnoj brzini udaljavanja nakon sudara, bez obzira na mase sudarajućih čestica. Kako bi našli iznose brzina v_{1n} i v_{2n} iz poznatih brzina v_{1p} i v_{2p}, koristimo jednadžbe (3) i (5) da eliminiramo v_{2n} te riješimo sustav po v_{1n}:

$$v_{1n} = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right) v_{1p} + \left(\frac{2m_2}{m_1 + m_2}\right) v_{2p}. \tag{6}$$

Analogno eliminiramo v_{1n} te riješimo sustav po v_{2n}:

$$v_{2n} = \left(\frac{2m_1}{m_1 + m_2}\right) v_{1p} + \left(\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\right) v_{2p}. \tag{7}$$

Dobiveni izrazi su općeniti rezultati koji nam omogućuju određivanje konačnih brzina u bilo kojem jednodimenzionalnom elastičnom sudaru. Posebno nam je zanimljiv slučaj kada su mase sudarajućih objekata jednake. Uvrštavajući $m_1 = m_2$ u (6) i (7) dobivamo:

$$v_{1n} = v_{2p}, \quad v_{2n} = v_{1p}. \tag{8}$$

Rezultat (8) znači da kuglice jednakih masa prilikom elastičnog sudara jednostavno zamijene iznose svojih brzina. Iznos krajnje brzine prve kuglice jednak je iznosu početne brzine druge kuglice i obratno. Slučaj više kuglica koje se gibaju po pravcu i većeg broja njihovih sudara može se riješiti primjenom računalnog programiranja. Možemo

zamisliti da su kuglice raspoređene po pravcu između dva nepokretna zida koji su međusobno na rastojanju L. Animaciju koja to prikazuje možete gledati na Internetu [4]. Masa zida (npr. m_1) je mnogo veća od mase kuglice (m_2), tj. vrijedi $m_1 \gg m_2$. Zid miruje (tj. $v_{1p} = 0$) te se u tom slučaju iz (7) dobiva da nakon sudara sa zidom kuglica samo promijeni predznak brzine (tj. giba se od zida s brzinom čiji je iznos jednak iznosu njene brzine prije sudara). Ako se na rastojanju L nalaze prepreke čija je masa m_1 usporediva s masom kuglice m_2, analiza sudara je složenija. U tom slučaju se promijeni i iznos brzine kuglice nakon sudara s preprekom.

Simulacija sudara kuglica u programskom jeziku C

Za numeričko rješavanje zadataka o sudarima može se koristiti bilo koji programski jezik. O primjenama programskog jezika F (dio Fortrana 90/ 95) je pisano u jednom od prethodnih brojeva Matematičko-fizičkog lista [7]. Za sudare kuglica izabrali smo programski jezik C koji je jedan od najvažnijih za rad u fizici, matematici i računalnoj znanosti [8,9,10]. Program `Sudari1d.c` koji predstavlja jednu realizaciju rješenja zadatka jednodimenzionalnog sudara kuglica možete preuzeti s Interneta [11]. Za prevođenje programa na strojni jezik računala može se koristiti bilo koji komercijalni ili besplatni prevoditelj (compiler) za C jezik. Jedan od besplatnih prevoditelja za Windowse je Dev-C++ [12]. Instalirajte ovaj prevoditelj na vaše računalo i u prozoru editora (`File/Open Project or File`) otvorite datoteku `Sudari1d.c` koju ste prethodno preuzeli s Interneta [11] i snimili na vaše računalo. Prevedite program izborom `Execute/Compile`, a zatim ga izvršite pomoću `Execute/Run`. Kad se program završi formira se izlazna datoteka `Rezultat.txt` koju možete otvoriti i čitati u editoru Dev-C++ ili u bilo kojem drugom tekstualnom editoru koji je instaliran na vašem računalu (npr. Notepad). Ako koristite Dev-C++ izlaznu datoteku s rezultatima možete otvoriti izborom `File/Open Project or File`, ako nakon toga u prozoru `Open file` izaberete prvo `Files of type: All files (*.*)`, a zatim `Rezultat.txt`. Program `Sudari1d.c` u verziji s Interneta simulira samo 10 sudara, i to za samo tri kuglice, ali se ti brojevi (kao i drugi parametri simulacije) lako mogu promijeniti u editoru Dev-C++. Prvi red u izlaznoj datoteci `Rezultat.txt` sadrži broj sudara, drugi broj kuglica u simulaciji, treći gustoću kuglica duž pravca, četvrti promjer kuglice, a peti rastojanje L između zidova. U simulaciji pojam gustoće je broj između 0 i 1 i jednak je: $(\text{broj kuglica} \cdot \text{promjer kuglice})/L$. Dakle, ako je taj broj veći (bliži jedinici) između zidova se nalazi više kuglica, a ako je manji (bliži nuli) između zidova se nalazi manje kuglica. Na početku simulacije kuglice su na jednakim razmacima, a njihove početne brzine su slučajni pozitivni i negativni brojevi, po iznosu između 0 i 1. U izlaznu datoteku `Rezultat.txt` program piše od šestog reda koordinate i brzine svih kuglica u trenutku sudara i to: prvo koordinate kuglica u jednom redu, a onda u idućem redu odgovarajuće brzine kuglica i tako naizmjence za sve sudare u simulaciji.

Predlažemo vam da analizirate jednodimenzionalne sudare kuglica kao važan zadatak iz fizike. Komentari u programu `Sudari1d.c [11]` mogu vas voditi u analizi računalnog programa. Sudare kuglica možete simulirati uporabom bilo kojeg programskog jezika. Programski jezik C je vrlo značajan za suvremenu znanost i primjene te ga je dobro učiti već u školi [8,9,10]. Pored Dev-C++-a za prevođenje i izvršavanje programa u C-u možete koristiti besplatne prevoditelje lcc (Windows) [13] i gcc (Linux, Windows) [14].

Literatura

[1] J. DUBINSKI, *Milky Way–Andromeda Galaxy Collision*, http://haydenplanetarium.org/resources/ava/page/index.php?file=G0601andmilwy

[2] *CERN: Large Hadron Collider, animacija sudara*, http://hands-on-cern.physto.se/ani/acc_lhc_atlas/lhc_atlas.swf

[3] *HyperPhysics, Collisions in One Dimension*, http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/col1d.html-c1

[4] I. VORAS, *Java Applet za simulaciju jednodimenzionalnog gibanja i sudara kuglica*, http://eskola.hfd.hr/inter_fizika/voras/eskolasim_kugle.html

[5] V. PAAR, *Fizika 1*, Školska knjiga, Zagreb (1997).

[6] T. ANDREIS, M. PLAVČIĆ, N. SIMIĆ, *Fizika 1*, Profil, Zagreb (2002).

[7] S. KRIŽ, A. ŠVOB, G. BILALBEGOVIĆ, *Programski jezik F i Fortrani (1954. – 2003.): Madelungova konstanta jednodimenzionalnog kristala* NaCl, Matematičko-fizički list, LV 1 (2004. – 2005.).

[8] M. BRAIN, *How C Programming Works*, http://computer.howstuffworks.com/c.htm

[9] V. TOMIĆ, T. ANDROKOVIĆ, *Programski jezik C*, udžbenik za četvrti razred gimnazije, Školska knjiga, Zagreb (2006).

[10] R. VULIN, *Zbirka riješenih zadataka iz C-a* (za srednje škole), Školska knjiga, Zagreb (2003).

[11] I. RONČEVIĆ, *Program za simulaciju jednodimenzionalnog sudara kuglica*, http://www.phy.hr/~goranka/Igor/Sudari1d.c

[12] *Dev-C++, besplatni prevoditelj za programske jezike C i C++*, http://prdownloads.sourceforge.net/dev-cpp/devcpp-4.9.9.2_setup.exe

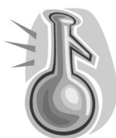
[13] *lcc-win32: A Compiler system for windows*, http://www.cs.virginia.edu/~lcc-win32/

[14] *GCC, the GNU Compiler Collection*, http://gcc.gnu.org/

⋆ ⋆ ⋆

Ako filozofa pitate "Što je filozofija?", ili povjesničara "Što je povijest?", oni će vam bez teškoća dati odgovor. Ali nitko se od njih, u stvari, ne može baviti svojim područjem a da ne zna što traži. Ali, pitate li matematičara "Što je matematika?", on će opravdano reći da ne zna odgovor, ali to ga neće spriječiti da se i dalje bavi matematikom.

P. S. Laplace

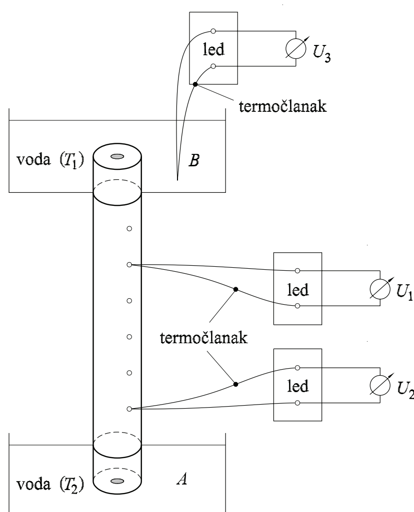


Određivanje toplinske vodljivosti metala

Josip Pajić[1], *Šibenik*

Uvod

Toplina je energija koja se prenosi s tijela na tijelo u toplinskim procesima. Kroz metale se toplina prenosi ako u njima postoji temperaturna razlika. Tada toplinska energija vođenjem prelazi s mjesta više temperature prema mjestu niže temperature [1].



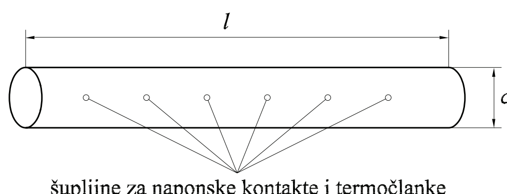
Slika 1. Shema eksperimenta za mjerenje toplinske vodljivosti.

Toplinsku vodljivost metala možemo odrediti pomoću uređaja prikazanog na slici 1. Njegov glavni dio je metalna šipka od bakra ili aluminija, duljine L između 20 i 30 cm, a promjera poprečnog presjeka d od 2 do 3 cm (slika 2).

Duž njenoga plašta izbušeno je nekoliko jednoliko raspoređenih utora promjera do 1 mm koji služe za umetanje spojišta termočlanka radi ostvarenja što boljeg toplinskog kontakta između termočlanka i metalne šipke [2]. Metalna je šipka svojim krajevima uronjena u dvije posude A i B (posuda B je s donje strane probušena, a rub je

[1] Autor je magistar znanosti iz didaktike prirodnih znanosti, usmjerenje fizika i profesor fizike na Gimnaziji Antuna Vrančića u Šibeniku. e-mail: `Josip.Paic@pmfst.hr`.

zabrtvljen). U posudi A se nalazi uzavrela voda, koja se grije kuhalom. Pošto vrenjem voda isparava, potrebno ju je stalno dodavati (pri tome treba voditi računa da se dolijeva uzavrela voda). Posuda B je kalorimetar u kojem se nalazi voda ohlađena na $0\,^{\circ}\mathrm{C}$. Hlađenje vode se postiže tako da se komadi leda stave u gazu i urone u vodu. Dva su termočlanka postavljena u utore na plaštu šipke i mjere temperaturu dviju različitih točaka na šipki, čija je razlika ΔT. Naponski krajevi termočlanaka uronjeni su u led. Treći termočlanak mjeri temperaturu vode u kalorimetru B.



Slika 2. Shema metalne šipke za mjerenje toplinske vodljivosti.

Kada je voda u posudi A zagrijana na $t_2 = 100\,^{\circ}\mathrm{C}$, a u kalorimetru B ohlađena na $t_1 = 0\,^{\circ}\mathrm{C}$, eksperiment može početi. Eksperiment započinje odmicanjem gaze s ledom iz kalorimetra B, čime se temperatura vode u njemu počinje povećavati. Povećanje temperature je posljedica primanja topline iz okoline (ΔQ_{ok}) te dotoka topline iz posude A putem metalne šipke (ΔQ):

$$\Delta Q_{uk} = \Delta Q_{ok} + \Delta Q, \tag{1}$$

gdje je ΔQ_{uk} ukupna toplina koju primi voda u kalorimetru B. Iz gornje jednadžbe slijedi da je brzina izmjene ili prijenosa topline:

$$\frac{\Delta Q_{uk}}{\Delta t} = \frac{\Delta Q_{ok}}{\Delta t} + \frac{\Delta Q}{\Delta t}. \tag{2}$$

Za toplinski tok kroz uzorak vrijedi sljedeća jednakost [3]:

$$\frac{P_Q}{A} = -\kappa \frac{\Delta T}{l}, \tag{3}$$

gdje su A i l površina poprečnog presjeka i duljina uzorka (metalne šipke), a P_Q toplinska snaga koja prolazi uzorkom, koja je po definiciji jednaka brzini izmjene topline:

$$P_Q = \frac{\Delta Q}{\Delta t}. \tag{4}$$

Kombiniranjem jednadžbi (3) i (4), za toplinsku vodljivost κ dobije se sljedeći izraz:

$$\kappa = -\frac{l}{A} \cdot \frac{1}{\Delta T} \cdot \frac{\Delta Q}{\Delta t}. \tag{5}$$

Dakle, problem određivanja toplinske vodljivosti κ svodi se na problem određivanja brzine izmjene topline $\Delta Q/\Delta t$ kroz metalnu šipku iz posude A u kalorimetar B. Iz jednadžbe (2) slijedi

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{\Delta Q_{uk}}{\Delta t} - \frac{\Delta Q_{ok}}{\Delta t} \tag{6}$$

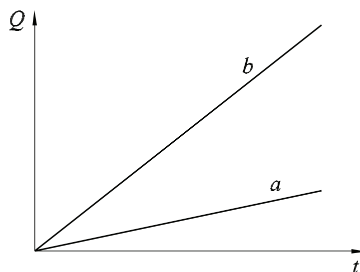
Brzina izmjene topline iz okoline u kalorimetar mora se odrediti prije samog mjerenja, kada na kalorimetar nije spojena metalna šipka. U kalorimetar se ulije određena količina vode i uranjanjem leda umotanog u pamučnu gazu ohladi na $0\,^{\circ}\mathrm{C}$. Nakon ohlađivanja vode, led se izvadi iz kalorimetra i bilježi se kako se toplina, koju okolina preda

kalorimetru i vodi, mijenja tijekom vremena. Ta se toplina računa sljedećom formulom:

$$\Delta Q_{ok} = (c_v \cdot m_v + C) \cdot \Delta T, \qquad (7)$$

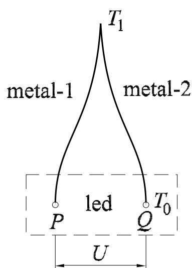
gdje je c_v specifični toplinski kapacitet vode, m_v masa vode u kalorimetru, a C toplinski kapacitet samog kalorimetra[2]. Nadalje, $\Delta T = T - T_0$, gdje je T_0 temperatura vode u trenutku $t = 0$, a T temperatura vode u trenutku $t > 0$.

Na slici 3 pravac a prikazuje ovisnost topline (koju voda primi u kalorimetru bez uronjene šipke) o vremenu. Pravac b prikazuje ovisnost topline, koju voda primi u kalorimetru sa šipkom uronjenom u nju, o vremenu.



Slika 3. Ovisnost topline o vremenu.

Kao što je već rečeno, eksperiment mjerenja toplinske vodljivosti metalne šipke, shematski prikazanog na slici 1, počinje u trenutku kada se iz kalorimetra B odstrani gaza s ledom. Termočlankom uronjenim u vodu kalorimetra bilježi se promjena temperature vode za određeno vrijeme, te se pomoću jednadžbe (7) može odrediti $\Delta Q_{uk}/\Delta t$, prikazana pravcem b na slici 3. Veličina $\Delta Q/\Delta t$ je razlika nagiba pravaca a i b.



Slika 4. Shema termočlanka.

Temperaturu mjerimo termočlankom (sl. 4). Termočlanak se sastoji od dviju žica načinjenih od različitih metala (na slici su označene s 'metal-1' i 'metal-2'). Ako temperature krajeva jedne žice T_1 i T_0 nisu jednake, duž metala '1' se stvara napon ΔU_1:

$$\Delta U_1 = S_1 \cdot (T_1 - T_0), \qquad (8)$$

gdje je S_1 termostruja metala '1'. Na krajevima metala '2' se stvara napon ΔU_2:

$$\Delta U_2 = S_2 \cdot (T_1 - T_0). \qquad (9)$$

Napon na otvorenim krajevima termočlanka (označenim točkama P i Q) je

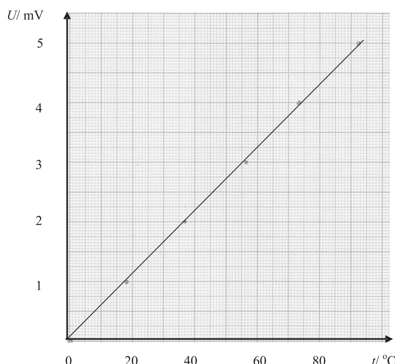
$$\Delta U_{PQ} = (S_2 - S_1) \cdot (T_1 - T_0). \qquad (10)$$

Da bi se odredila temperatura spojišta termočlanka T_1, nužno je da temperatura otvorenog kraja termočlanka, T_0, bude dobro definirana. Zato se otvoreni kraj termočlanka obično uranja u usitnjeni led ($T_0 = 0\,°\mathrm{C}$) te se izmjerenim naponom ΔU_{PQ}, pomoću relacije (10), lako odredi temperatura spojišta T_1.

Na slici 5 prikazana je karakteristika termočlanka sačinjenog od željeza i konstantana s otvorenim krajem uronjenim u usitnjeni led (dobivena u kabinetu Gimnazije Antuna Vrančića u Šibeniku). Podaci o temperaturama i pripadnim naponima uneseni su u tablicu i prema njima je napravljena karakteristika.

t/ °C	18.0	36.5	56.0	73.0	92.0
U/ mV	1.0	2.0	3.0	4.0	5.0

[2] Toplinski kapacitet kalorimetra C se odredi standardnim eksperimentom u kojemu se pomiješaju topla i hladna voda te izmjeri konačna temperatura vode.



Slika 5. Karakteristika termočlanka.

Vidimo da je napon razmjeran temperaturnoj razlici i da se poveća za 1 mV kada temperatura poraste za oko 18 °C. Milivoltmetar pokazuje i desetinke milivota, pri čemu svakoj desetinki milivolta odgovara povećanje temperature za oko 1.8 °C [4].

Pomoću ovako baždarenog milivoltmetra možemo izmjeriti nepoznatu temperaturu držeći hladni kraj termočlanka u usitnjenom ledu, a vrući na mjestu gdje želimo izmjeriti temperaturu.

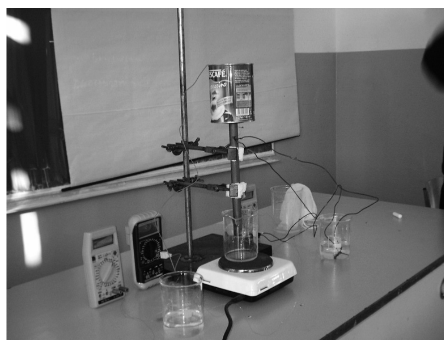
Na slici 6 prikazan je eksperimentalni uređaj za određivanje toplinske vodljivosti bakrene šipke (napravljen u Gimnaziji Antuna Vrančića u Šibeniku).

Na opisani način izvršena su mjerenja za bakrenu šipku a podaci mjerenja uneseni su u tablicu.

l/m	A/m^2	$\Delta T_{ok}/$ °C	$\Delta T_{uk}/$ °C	$\Delta T/$ °C	$m_v/$ kg	$C/$ Jkg^{-1}	$\Delta t/$ s
0.2	$3.14 \cdot 10^{-4}$	5	14	30	0.4	20	710

Prema dobivenim podacima za rezultat toplinske vodljivosti bakra dobiveno je $\kappa = 456\ \mathrm{WK^{-1}m^{-1}}$, a u podacima dostupnim u stručnoj literaturi nalazimo $\kappa = 385\ \mathrm{WK^{-1}m^{-1}}$ [1].

Uočavamo, odstupanje dobivene vrijednosti toplinske vodljivosti $((456 \pm 71)\ \mathrm{WK^{-1}m^{-1}})$ od standardne vrijednosti iz stručne literature iznosi oko dvadesetak posto. Bolji rezultat mjerenja bio bi kada bi posude A i B zamijenile svoja mjesta, tj. kada bi se zagrijavala voda u gornjoj posudi. Tada bi prijenos topline okolnim zrakom prilikom zagrijavanja gornje posude na kalorimetar (sada donja posuda) bio dosta slabiji. No, poteškoće u rješenju tog problema su tehničke naravi (teško se rješava brtvljenje sa šipkom u posudi koja se zagrijava).



Slika 6. Eksperimentalni uređaj za određivanje toplinske vodljivosti bakrene šipke.

Literatura

[1] P. KULIŠIĆ, *Mehanika i toplina*, Školska knjiga, Zagreb, 2005.

[2] Phywe Laboratory Experiments, CD-ROM, 2005.

[3] Ž. JAKOPOVIĆ, P. KULIŠIĆ, *Fizika 1*, Školska knjiga, Zagreb, 2001.

[4] J. LABOR, *Određivanje koeficijenta linearnog termičkog rastezanja*, MFL, Zagreb, 2001.



Otkriće planeta sličnog Zemlji pomoću metode gravitacijske leće

Dijana Dominis Prester[1], *Rijeka*

Pred godinu dana javnosti je obznanjeno otkriće planeta OGLE-2005-BLG-390Lb, planeta udaljenog od nas oko 20 tisuća svjetlosnih godina. Od svih planeta dosad otkrivenih izvan Sunčeva sustava, on je najsličniji Zemlji. Što to znači "sličan Zemlji"? Na njemu ne postoje oceani tekuće vode, niti zelene šume. "Sličan Zemlji" za nas astrofizičare znači male mase, čvrst i hladan, za razliku od ostalih ekstrasolarnih planeta koji su veliki, plinoviti i vrući. S masom 5.5 puta većom od Zemljine mase i temperaturom od oko 50 Kelvina, to je do danas najmanji i najhladniji ekstrasolarni planet poznat čovjeku. U ovom članku objasnit ću kako smo otkrili OGLE-2005-BLG-390Lb koristeći metodu gravitacijske leće.

Potraga za ekstrasolarnim planetima

Prvi planet izvan Sunčeva sustava otkrili su 1995. godine tzv. metodom radijalnih brzina, švicarski astrofizičar Michel Mayor i njegov student Didier Queloz. Taj se planet nalazi vrlo blizu svoje matične zvijezde, golem je, vruć i plinovit, puno veći od Jupitera, najvećeg planeta našeg Sunčevog sustava. "Da li je na tom planetu moguć život?" – bilo je pitanje koje su mnogi postavili po tom velikom otkriću. Odgovor na takva pitanja istražuje grana znanosti koja se naziva egzobiologija. Na vrućim plinovitim planetima život nije moguć iz više razloga. Visoka temperatura 'skuhala' bi svaki oblik života. Gusta plinovita atmosfera ne bi mogla omogućiti disanje. Jaka gravitacijska sila uslijed velike mase planeta razorila bi svaki složeni oblik života. A k tome bi blizina matične zvijezde svojim jakim plimnim silama djelovala razorno. Egzobiologija govori o tzv. naseljivim zonama, područjima u svemiru i tipovima planeta koji mogu podržavati život. Sistemom eliminacije postepeno se sužava izbor, i dolazi do toga da je život moguć na vrlo rijetkim planetima, koje imaju masu reda veličine Zemljine mase, nalaze se na udaljenosti od matične zvijezde koja nije ni premala ni prevelika, imaju čvrstu površinu, atmosferu, male oscilacije u orbiti (prevelike bi izazivale ekstremne temperaturne razlike), te se nalaze u orbiti oko stabilne zvijezde bez druge zvijezde pratioca (odnosno ne nalaze se u orbiti tzv. dvojne zvijezde), koja k tome nema velikih oscilacija u svojoj aktivnosti. To su samo neki od nužnih uvjeta. Naposlijetku zaključujemo da takvih planeta – kandidata za život ima jako, jako malo.

K tome treba imati u vidu da je upravo takve planete puno teže otkriti. Naime, planeti nemaju poput zvijezda vlastito zračenje, te ih možemo otkrivati samo posrednim

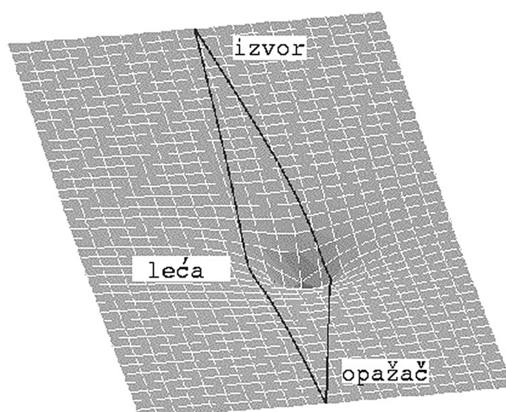
[1] Autorica je viša savjetnica na Filozofskom fakultetu u Rijeci, a područje njezinog interesa je astrofizika, email: `dijana@ffri.hr`.

metodama. Vrlo veliki planeti odat će svoje prisustvo reflektirajući zračenje matične zvijezde, te ćemo ih moći direktno snimiti. Takvih objekata je dosad pronađeno svega nekoliko. Neki će veliki planeti zaklanjati svjetlo zvijezde prolazeći ispred nje u odnosu na nas promatrače, te ćemo mjerenjem promjene u sjaju zvijezde moći izvesti zaključak o postojanju pratioca. Glavnina planeta odat će se prisustvom svoje mase. Kod spomenute metode radijalnih brzina mjerimo vremenske promjene pomaka valne duljine linija u spektru zvijezde uslijed Dopplerovog efekta. Pomaci su uzrokovani gibanjem zvijezde uslijed prisustva nevidljivog pratioca, odnosno zakona očuvanja centra mase. Ova je metoda osjetljiva uglavnom na planete velike mase u orbitama blizu matičnih zvijezda. Godine 2004. otkriven je i jedan planet male mase pomoću metode radijalnih brzina, no on je vrlo blizu matične zvijezde.

Metoda astrometrije, te spomenuti zakon očuvanja centra mase, razotkrit će i planete velike mase u dalekim orbitama. Koristeći interferometrijske uređaje, možemo vrlo precizno izmjeriti promjene položaja zvijezde na nebu, te pomoću toga odrediti ne samo masu nego i orbitu planeta pratioca. Uz to, sve su te metode ograničene na objekte na maloj udaljenosti od Sunčeva sustava, što ograničava broj potencijalnih planeta. U svim opisanim slučajevima, signal za detekciju će biti manji (odnosno detekcija manje vjerojatna) što je planet manje mase. Do danas je otkriveno 209 ekstrasolarnih planeta. Njih 196 je otkriveno kao i prvi, pomoću metode radijalnih brzina. Ti su planeti uglavnom velike mase, vrući i plinoviti. Samo je jedna postojeća metoda sposobna otkriti hladne planete male mase, odnosno planete na kojima je moguć život: metoda gravitacijske leće.

Metoda gravitacijske leće

Pred desetak godina poljski astrofizičar Boghdan Paczynski dosjetio se da bi se ekstrasolarni planeti mogli otkrivati pomoću efekta gravitacijske leće, fenomena koji je još početkom prošlog stoljeća objasnio Albert Einstein. Metoda koristi činjenicu da svaka masa zakrivljava prostor oko sebe, odnosno da će se svjetlo, prolazeći pokraj nevidljive mase, lomiti pod kutem ovisnim o toj nevidljivoj masi, slično kao u slučaju optičke leće.

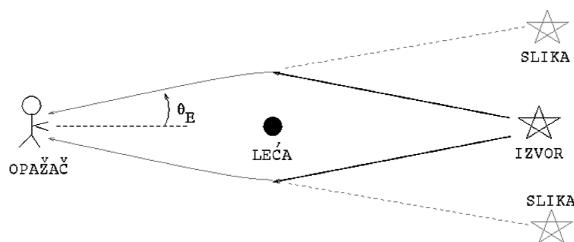


Slika 1. Masa zakrivljuje prostor oko sebe zbog prisustva gravitacijskog polja. Zraka svjetla koja prolazi kraj mase bit će zakrivljena pod većim kutem ukoliko je masa veća.

Ako prostor zamislimo kao elastičnu membranu, a gravitacijsku leću kao kuglicu konačne mase na toj membrani, zakrivljenje će biti veće što je veća masa leće, a zrak svjetla će se lomiti pod većim kutom (slika 1). Na slici 2 vidimo shematski prikaz jednostavne gravitacijske leće, odnosno točkaste mase koja djeluje kao leća (crna točka u sredini). Ta masa može biti i vidljiva i nevidljiva. U slučajevima pomoću kojih pronalazimo planete, to su uglavnom ili zvijezde, ili planete, ili sustavi sačinjeni od zvijezda i planeta. Zamislimo za početak da je ta masa (leća) zvijezda malog sjaja (dakle nevidljiva za nas), koja se nalazi na udaljenosti D_L od nas (opažača), a da se na istom pravcu, na udaljenosti D_S nalazi sjajna zvijezda (izvor). Svjetlosne zrake koje dolaze od pozadinske zvijezde lomit će se prolazeći kraj leće pod kutem θ_E. Uz samu zvijezdu izvor, vidjet ćemo i prstenastu sliku oko zvijezde. Veličina tog prstena bit će određena kutem θ_E i tzv. Einsteinovim polumjerom R_0,

$$R_0 = \sqrt{\frac{4GM(D_S - D_L)}{c^2 D_L D_S}},$$

gdje je G gravitacijska konstanta, c brzina svjetlosti, a M ukupna masa leće.



Slika 2. Shematski prikaz jednostavne gravitacijske leće. Promatramo li sjajnu zvijezdu, a na pravcu između nje i nas se nalazi nevidljivo tijelo, vidjet ćemo prstenastu sliku oko zvijezde izvora, uslijed skretanja zraka svjetla koje prolaze kraj nevidljive mase (gravitacijske leće).

Gravitacijska mikroleća

Ukoliko je polumjer Einsteinovog prstena premalen da bismo ga mogli razlučiti teleskopom, nećemo vidjeti izvor i sliku, nego će se ti doprinosi svjetla zbrajati, što će dovesti do prividnog povećanja sjaja zvijezde izvora. U tom slučaju govorimo o efektu *gravitacijske mikroleće*. Tipični izvori se nalaze u blizini središta Mliječnog puta, a leće na putu između nas i središta. Zvijezde u Galaksiji gibaju se u odnosu na nas, kao i jedne u odnosu na druge. Zamislimo da se izvor giba u odnosu na leću projiciranom brzinom v_T (slika 3). Povećanje sjaja izvora A (od *engl.* Amplification) bit će funkcija vremena t, odnosno kutne udaljenosti na nebu leće od izvora $u(t)$:

$$A(t) = \frac{u^2(t) + 2}{u(t)\sqrt{u^2(t) + 4}},$$

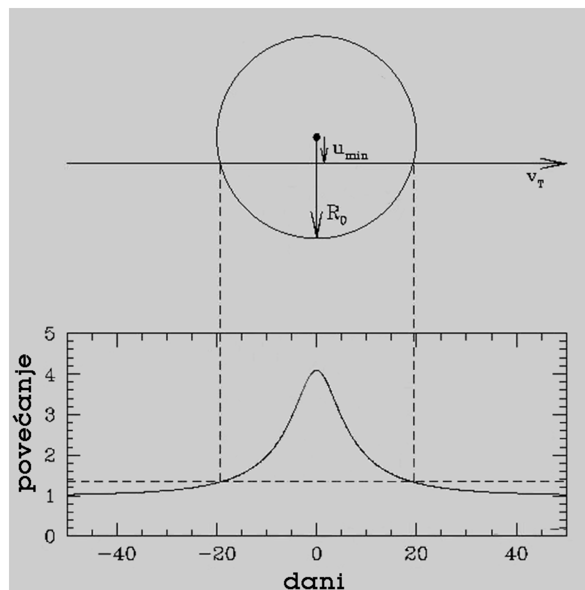
$$u(t) = \sqrt{u_{\min}^2 + \frac{t - t_{\max}}{t_E}}.$$

Najveće povećanje bit će ostvareno u trenutku $t_{\max}$, odnosno u trenutku najmanje kutne udaljenosti između leće i izvora $u_{\min}$. Vrijeme t_E potrebno izvoru za prolaz kroz

Einsteinov polumjer R_0 ovisit će o projiciranoj brzini v_T,

$$t_E = \frac{R_0}{v_T}.$$

Na slici 3 vidimo kako se mijenja povećanje sjaja s vremenom dok izvor prividno prolazi kroz Einsteinov prsten, za slučaj točkaste leće i točkastog izvora. Na donjem dijelu slike vidimo tzv. svjetlosnu krivulju, odnosno krivulju promjene sjaja u vremenu.

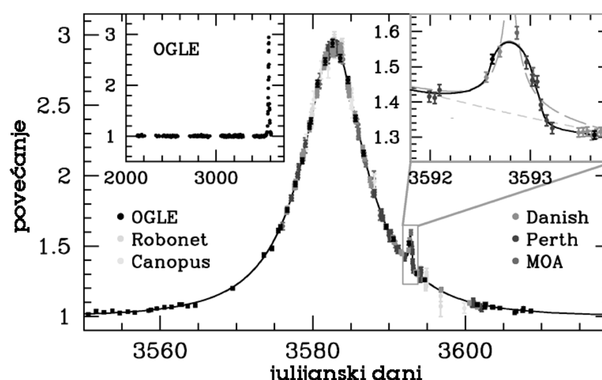


Slika 3. Povećanje svjetla izvora kod efekta mikroleće u ovisnosti o vremenu, i nastanak svjetlosne krivulje (R_0 je polumjer Einsteinovog prstena, v_T projicirana brzina izvora u odnosu na leću, $u_{\min}$ najmanja kutna udaljenost između leće i izvora).

Ukoliko je leća sastavljena od dva ili više tijela, što je slučaj kod dvojnih zvjezdanih sustava ili sustava zvijezde koja ima planet kao pratioca, račun više nije tako jednostavan, jer tijela lome zrake u različitim smjerovima, ovisno o položajima i masama pojedinih tijela. Problem više nije rješiv analitičkim putem, te moramo korisiti numeričke metode da bismo izračunali povećanje na pojedinim dijelovima neba. Svjetlosna krivulja više nije glatka i simetrična, već poprima oštre i nesimetrične oblike. Dvojne zvijezde kao leće stvorit će često svjetlosne krivulje s vrlo velikim i naglim promjenama povećanja. Planet kao pratilac zvijezde također se može odati asimetrijom u svjetlosnoj krivulji (slika 5). Što je masa planeta manja u odnosu na masu zvijezde, taj će signal biti manji i kraćeg trajanja, odnosno bit će ga teže izmjeriti.

Numeričke simulacije su pokazale da bi se metodom gravitacijske leće mogli otkriti i planeti vrlo malene mase u orbitama od nekoliko astronomskih jedinica (A.U. = astronomska jedinica = srednja udaljenost Zemlje od Sunca, iznosi približno 150 milijuna kilometara), odnosno planeti slični Zemlji na kojima je moguć život.

Tom se idejom oduševila grupica entuzijasta i osnovala kolaboraciju pod nazivom PLANET (od *engl.* Probing Lensing Anomalies NETwork). Ideja je bila pratiti promjene sjaja što većeg broja zvijezda u smjeru središta Mliječnog puta, da bi se pomoću toga odredilo postoje li planeti u orbitama zvijezda koje se nalaze između nas i opažanih zvijezda, djelujući pritom poput gravitacijskih leća. Da bi se omogućila takva opažanja, bilo je potrebno načiniti mrežu teleskopa na južnoj Zemljinoj hemisferi (zbog toga što je središte Mliječnog puta najbolje vidljivo s južne hemisfere), da bi se mogla vršiti 24-satna opažanja odabranih objekata. Naime, signal planeta poput Zemlje vidljiv je svega nekoliko sati, te bi opažanje samo jednim teleskopom uslijed smjene dana i noći onemogućilo detekciju. S druge strane, za opažanja svjetlosnih krivulja gravitacijskih mikroleća nisu potrebni veliki teleskopi, dovoljni su promjeri zrcala promjera jedan do dva metra, te je stoga bilo moguće načiniti takvu mrežu i omogućiti da PLANET dobije dovoljno opažačkog vremena.



Slika 4. Opažana svjetlosna krivulja mikroleće pomoću koje je otkriven planet OGLE-2005-BLG-390Lb. Različite boje mjerenja označavaju 6 korištenih teleskopa. U lijevom gornjem kutu je svjetlosna krivulja kolaboracije OGLE, a u desnom gornjem kutu je povećan dio krivulje koji je razotkrio planet. Puna linija označava model u kojem u sustavu leće postoji planet a izvor nema pratioca, duga crtkana krivulja je model u kojem je izvor dvojna zvijezda leća – zvijezda bez pratioca, a kratka crtkana je model u kojem su i leća i izvor zvijezde bez pratioca. Vidimo da se model koji uključuje planet najbolje podudara s mjerenjima.

Kako PLANET zna koje objekte treba opažati, imajući u vidu da u smjeru središta Mliječnog puta vidimo toliko mnogo zvijezda?

Zahvaljujući uzbunama (*engl.* alerts) kolaboracija poput OGLE (od *engl.* Optical Gravitational Lensing Experiment) i MOA (od *engl.* Microlensing Observations in Astrophysics) koje vrše automatsko praćenje širokih polja, i izvješćuju o objektima kod kojih je uočen porast sjaja. PLANET odabire prikladne opažačke mete među tim objektima, koje se potom opažaju vrlo često uz maksimalnu moguću preciznost, da bi se dobile što detaljnije svjetlosne krivulje. U svakoj opažačkoj sezoni, koja traje od svibnja do rujna, izmjeri se više stotina svjetlosnih krivulja. Većina je simetrična, i pokazuje da je gravitacijska leća bila usamljena zvijezda. Oko desetina razotkriva dvojne sustave zvijezda. U jedanaest godina opažanja, izmjereno je nekoliko tisuća svjetlosnih krivulja mikroleće, od kojih je svega četiri razotkrilo planete u sustavu leće.

Otkriće planeta OGLE-2005-BLG-390Lb

Dana 11. srpnja 2005. OGLE je objavio uzbunu događaja OGLE-2005-BLG-390, odnosno početak povećanja sjaja zvijezde tipa žuti div (kratica BLG dolazi od *engl.* Bulge, odnosno označava da se događaj zbiva u smjeru središta Mliječnog puta, a 390 je redni broj događaja oglašenog u sezoni 2005. godine). PLANET kolaboracija ga je odlučila pratiti svojim teleskopima vođenih našim opažačima-astronomima, te uz pomoć robotskog teleskopa RoboNET kolaboracije. Na slici 5 vidimo dio neba između zviježđa Strijelca i Škorpiona i zvijezdu izvor, opažan u crvenom dijelu spektra. S obzirom da gledamo u smjeru središta Mliječnog puta, zvijezde su vrlo guste, što otežava opažanje. Maksimum povećanja dogodio se 31. srpnja, kad je izvor bio tri puta sjajniji no prije povećanja. Nakon deset dana, opazili smo malo i kratko povećanje sjaja koje nam je ukazalo na mogućnost postojanja planeta u sustavu. Opažanu svjetlosnu krivulju (slika 5), načinjenu paralelno pomoću šest teleskopa, podvrgli smo modeliranju pomoću kompjutorskih programa, da bismo saznali što se krije u sustavu leće odnosno izvora.



Slika 5. Dio neba na kojem se vidi zvijezda izvor spektralnog tipa G2 (žuti div) u vrijeme povećanja sjaja, opažan u crvenom spektralnom području. U tom području najmanja je apsorpcija svjetla međuzvjezdanom tvari koja je vrlo gusta oko središta Mliječnog puta.

Modeliranje opažanja

Kako možemo iz svjetlosne krivulje saznati postoji li u sustavu leće planet ili druga zvijezda, odnosno postoji li druga zvijezda u sustavu izvora?

Svjetlosne krivulje analiziramo *numeričkim modeliranjem*, odnosno *simulacijama*. Konkretno, pišemo računalne programe koji s jedne strane simuliraju svjetlosne krivulje koje bismo opažali u slučaju različitih sustava leća i izvora, a s druge variraju sve parametre (mase zvijezda, planeta, udaljenosti, kut pod kojim se dva sustava

relativno gibaju itd.) dok ne pronađu skup parametara koji stvara svjetlosnu krivulju koja se najbolje podudara s izmjerenom krivuljom. Taj se proces naziva *optimizacija rješenja*. Postoje različite metode optimizacije, a u ovom radu ih je korišteno nekoliko. Najuspješnijom se pokazalo korištenje *genetičkog algoritma*, koji je s jedne strane primijenjen za traženje rješenja koje uključuje postojanje planeta u leći. S druge strane, vrlo slična svjetlosna krivulja može nastati i u slučaju zvijezde bez pratioca kao leće, koja zakrivljuje svjetlo dvojnog sustava zvijezda. Za takav sam model napisala program koji koristi također genetičke algoritme, i analizira isti skup mjerenja. Naposlijetku smo uspoređivanjem rezultata utvrdili da model koji uključuje planet u sustavu leće točnije opisuje izmjerenu svjetlosnu krivulju, čime smo potvrdili postojanje planeta. Modeliranjem je izračunato da najbolje rješenje svjetlosne krivulje odgovara planeti mase 5.5 puta većoj od Zemljine mase temperature od oko 50 K, u orbiti zvijezde spektralnog tipa M (crveni patuljak), mase 0.22 puta veće od Sunčeve mase, i temperature od oko 3000 K, na udaljenosti od zvijezde 2.6 astronomske jedinice, te da je cijeli sustav udaljen od nas oko 20 000 svjetlosnih godina. Izvor zračenja je zvijezda spektralnog tipa G (žuti div), temperature 5200 K.

Na planetu vjerojatno nije moguć život, zbog vrlo niske temperature. Međutim, radost otkrića leži u tome što je po prvi put pronađen mali, čvrsti i hladni planet, što je potvrdilo sposobnost metode gravitacijske leće za otkrivanje planeta koji je uistinu poput Zemlje, odnosno koji se nalazi u tzv. naseljivoj zoni. Uz taj aspekt, zanimljiv javnosti, za nas astrofizičare ovo je otkriće otvorilo i neke druge spoznaje. Npr. zajedno s kasnijim otkrićem planeta OGLE-2005-BLG-169 (mase 13 puta veće od Zemljine) istom metodom, potvrdilo je jednu od postojećih teorija o nastanku planeta, koja predviđa da se planeti stvaraju nakupljanjem tvari na male protoplanetarne jezgre, te da su mali čvrsti ledeni planeti česti u orbitama zvijezda male mase. Ti planeti nisu uspjeli skupiti dovoljno mase da bi stvorili plinovite divove poput Jupitera. To je uzbudljiv rezultat, koji nam govori da izgleda da su ti mali nevidljivi planeti na kojima je moguć život češće u Svemiru no što se ranije pretpostavljalo.

Više o ovom otkriću, metodi i radu PLANET-a može se pronaći na stranici `http://planet.iap.fr`. Otkriće je objavljeno u siječnju 2006. u časopisu Nature: Beaulieau et al. (PLANET/ RoboNET, OGLE, MOA), 2006, Nature, 439, 437–440).

⋆ ⋆ ⋆

Mostovi bi bili mnogo sigurniji kad bi se dopustilo da ih grade samo ljudi koji znaju točnu definiciju realnih brojeva.

Norman David Mermin

ZABAVNA MATEMATIKA

Šest putnika

U kupeu brzog vlaka nalazi se 6 naših zemljaka koji se vraćaju iz inozemstva. Njihova su prezimena po abecednom redu Horvat, Kralj, Marić, Petek, Savin i Zvrko, a gradovi u kojima žive su Karlovac, Osijek, Pula, Rijeka, Sisak i Županja. Evo nekih činjenica iz njihovog razgovora:

1) Horvat i Karlovčanin su profesori, Savin i Osječanin odvjetnici, a Marić i Puljanin novinari.

2) Kralj i Zvrko su po prvi puta bili u inozemstvu, dok Puljanin svake godine barem jedanput prelazi granicu.

3) Siščanin je stariji od Horvata, a Županjac od Marića.

4) Kralj i Karlovčanin su oženjeni, a Marić i Siščanin nisu.

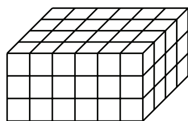


U kojem gradu živi i što je po zanimanju svaki od ovih šest putnika?

Kockice u plavom

Tijekom razgovora sa susjedom Bistrićem modelaru Šeprtljiću drveni kvadar dimenzija $6 \times 4 \times 3$ pao je u plavu boju. Nakon toga Šeprtljić je kvadar razrezao na 72 jednake kockice, a onda susjedu postavio sljedeće pitanje:

— Koliku površinu ovih kockica, izraženu u postocima, još treba obojiti istom bojom da bi sve one bile potpuno plave?



Bistrić se zamislio. Možete li vi brzo odgovoriti na ovo pitanje?

Zbrajaljka

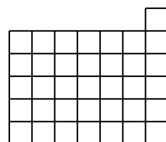
Pogledajte pozorno donji račun zbrajanja. Jasno je da *TRI* i *PET* uvijek daju *OSAM*. No, postoje i zamjene devet slova, A, E, I, M, O, P, R, S, T brojkama od 1 do 9 tako da i na taj način račun bude ispravan. I to ne jedna, već 30 zamjena! Nađite ih što više. Početak je lagan: uvijek je $O = 1$.

```
  TRI
+ PET
-----
 OSAM
```

Kako do kvadrata?

Branka je nacrtala nepravilan lik sastavljen od 36 jednakih kvadratića. Podsjetila se da toliko jednakih kvadratića ima i kvadrat 6×6. A voljela je pravilne likove. Zato je prirodno postavila pitanje:

— Kako i na koliko se načina može ovaj lik razrezati na dva dijela od kojih se dade složiti kvadrat?



Malo košarke

U prvom dijelu košarkaškog prvenstva neke zemlje dvije momčadi postigle su isti broj pobjeda. Pokažite da postoje tri momčadi A, B i C takve da je momčad A pobijedila momčad B, momčad B pobijedila momčad C i momčad C pobijedila momčad A.



Zdravko Kurnik



ZADACI I RJEŠENJA

Redakcija, iz tehničkih razloga, daje ovo upozorenje:

Krajnji rok za primanje rješenja iz ovog broja je 31. svibnja 2007. Rješenja (i imena rješavatelja) bit će objavljena u br. 1/ 229.

Ujedno molimo da pripazite na upute rješavateljima koje su na dnu treće strane omota.[1]

A) Zadaci iz matematike

3035. Neka su a, b, c i α, β, γ pozitivni realni brojevi takvi da je $\alpha+\beta+\gamma=1$. Dokaži nejednakost

$$\alpha a+\beta b+\gamma c+2\sqrt{(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha(ab+bc+ca)} \leq a+b+c.$$

3036.* Odredi kutove α, β, γ trokuta ABC ako za duljine njegovih stranice a, b, c vrijedi

$$a+2b+3c=2\sqrt{ac}+4\sqrt{bc}.$$

3037. Ako su a i b racionalni brojevi, $a>1$, $b>0$ i ako je $ab=a^b$ te $\dfrac{a}{b}=a^{3b}$, koliko je a?

3038. Ako kompleksni brojevi z_1, z_2, z_3 imaju jednake module i ako su oni, u kompleksnoj ravnini, vrhovi jednakostraničnog trokuta, tada su brojevi z_1z_2, z_2z_3, z_3z_1 također vrhovi jednakostraničnog trokuta. Dokaži!

3039. Odredi skup svih točaka z kompleksne ravnine koji je određen jednadžbom

$$|z-2|^2+|z+2|^2=26.$$

3040.* Na stranicama $\overline{AB}$ i $\overline{BC}$ trokuta ABC odabrane su točke M i N tako da je $|AM|:|MB|=|BN|:|NC|=k$. Točka Q je sjecište pravaca AN i CM. Dokaži da je površina četverokuta $MBNQ$ jednaka površini trokuta ACQ.

3041.* Na stranicama $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ i $\overline{CA}$ trokuta ABC dane su redom točke K, M i N tako da je četverokut $KBMN$ paralelogram. Kolika je njegova površina ako je $P(\triangle AKN)=P_1$ i $P(\triangle NMC)=P_2$?

3042.* Duljine stranica trokuta su a, b i c, a nasuprotni kutovi α, β i γ. Poznato je $a=4$, $b=5$ i $\gamma=2\alpha$. Izračunaj c.

3043. Kružnice k_1 i k_2 sa središtima S_1 i S_2 sijeku se u točkama A i B. Na spojnici $\overline{AB}$ odaberimo točku koja nije polovište te dužine. Pravac kroz točku P okomit na PS_1 siječe k_1 u točkama C i D. Analogno, pravac kroz P okomit na PS_2 siječe k_2 u točkama E i F. Dokaži da su točke C, D, E i F vrhovi pravokutnika.

3044. Ako je $\sin\alpha+\sin\beta=a$ i $\cos\alpha+\cos\beta=b$, pričem a i b nisu oba jednaki nuli, dokaži da je

$$\sin(\alpha+\beta)=\frac{2ab}{a^2+b^2}.$$

3045. Kutovi trokuta su α, β i γ. Dokaži da za svaki neparan prirodan broj n vrijedi

$$\sin n\alpha+\sin n\beta+\sin n\gamma=(-1)^{\frac{n-1}{2}}\cdot 4\cos\frac{n\alpha}{2}\cos\frac{n\beta}{2}\cos\frac{n\gamma}{2}.$$

3046. Baza piramide $ABCV$ je jednakostraničan trokut ABC duljine stranice $a=2\sqrt{2}$. Bočni brid, $\overline{VC}$ duljine 1, okomit je na ravninu baze. Nađi kut između pravaca od kojih jedan prolazi vrhom V i polovištem stranice $\overline{BC}$, a drugi vrhom C i polovištem stranice $\overline{AB}$.

3047. Suma pozitivnih brojeva $a_1, a_2, \ldots, a_n$ jednaka je 1. Dokaži nejednakost

$$\frac{a_1^2}{a_1+a_2}+\frac{a_2^2}{a_2+a_3}+\ldots+\frac{a_{n-1}^2}{a_{n-1}+a_n}+\frac{a_n^2}{a_n+a_1}\geq\frac{1}{2}.$$

3048. Nađi sva rješenja jednažbe

$$\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x+\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x=2^x.$$

[1] Zadaci označeni zvjezdicom predviđeni su prvenstveno za 15 – 16 godišnje učenike.

B) Zadaci iz fizike

OŠ – 258. Sara se želi ljuljati na drvenoj dasci. Daska je dugačka 4 m, široka 40 cm i debela 5 cm. Sara ima masu 20 kg i sjedi na jednom kraju daske. Koliko treba biti potporanj udaljen od Sare da bi se ona mogla ljuljati sama? Gustoća drva od kojeg je daska napravljena je 800 kg/ m^3.

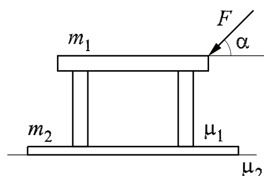
OŠ – 259. Ivan i Luka trče s istog mjesta u suprotnim smjerovima oko nogometnog igrališta koje je dugačko 110 metara, a široko 70 metara. Luka trči brzinom 5 m/ s, a Ivan brzinom 4 m/ s. Koliko metara će svaki od njih pretrčati kad se prvi put sretnu? Nakon koliko vremena će to biti?

OŠ – 260. Može li se elektroskop nabiti pozitivno pomoću negativno nabijenog štapa? Opišite kako.

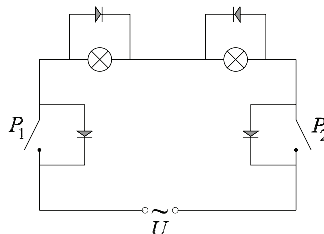
OŠ – 261. Bakrena žica debljine 1 mm je namotana na valjak promjera 40 cm. Kroz nju teče struja jakosti 2 A kad je spojena na izvor napona 9 V. Koliko ima namotaja žice na valjku? Električna otpornost bakra je 0.017 Ωmm^2 / m.

1357. Padobranac iskače iz aviona te nakon 3 s otvara padobran. Nakon otvaranja padobrana on naglo (trenutno) usporava te nastavlja padati brzinom od 5.4 m / s. Deset sekundi nakon njegovog iskakanja iz aviona iskače drugi padobranac. Nakon koliko vremena on mora otvoriti padobran da bi zajedno stigli do tla? Pretpostavite da je otpor zraka prije otvaranja padobrana zanemariv.

1358. Stol mase m_1 nalazi se na malenom tepihu mase m_2. Koeficijent trenja između stola i tepiha je μ_1, a između tepiha i poda je μ_2. Stol se gura silom iznosa F pod kutom α prema horizontali. Koje uvjete treba zadovoljavati sila F da bi stol mirovao u odnosu na tepih, a tepih klizao po podu?



1359. Dvije žaruljice, četiri diode, dva prekidača (P_1 i P_2) i izvor izmjenične električne struje frekvencije 50 Hz spojeni su u električni krug kao na slici. Koja žaruljica svijetli kada je zatvoren samo prekidač P_1, odnosno samo P_2, a koja kada su zatvorena oba?



1360. Strujna petlja kvadratičnog oblika duljine stranice 2 cm nalazi se u homogenom magnetskom polju indukcije 0.1 T. Ravnina petlje zatvara kut od 60° u odnosu na smjer magnetskog polja. Koliki moment sile djeluje na petlju ako njom teče struja jakosti 0.5 A?

1361. Kolika je najmanja kinetička energija piona (π^+) u laboratorijskom sustavu potrebna da se u reakciji $\pi^+ + \mathrm{n} \rightarrow \mathrm{K}^+ + \Lambda$ stvori kaon (K^+) čiji je smjer gibanja pod kutom od 90° u odnosu na smjer gibanja piona? U laboratorijskom sustavu neutron (n) miruje. Mase čestica su $m_\pi = 140$ MeV/ c^2, $m_n = 940$ MeV/ c^2, $m_K = 494$ MeV/ c^2 i $m_\Lambda = 1115$ MeV/ c^2, gdje je c brzina svjetlosti.

1362. Vodikov atom nalazi se u osnovnom stanju i apsorbira X-zraku valne duljine 50 nm. Nađi kinetičku energiju izbačenog elektrona u eV ako je poznato da je energija ionizacije vodikovog atoma 13.6 eV. Kolika je minimalna frekvencija X-zrake koja će ionizirati vodik u osnovnom stanju?

1363. Dva staklena balona volumena 200 cm^3 i 100 cm^3 spojena su kratkom cijevi koja sadrži porozan čep kao izolator, dopuštajući izjednačenje tlakova, ali ne i temperatura. Sustav se nalazi na temperaturi od 27 °C i tlaku od 100 000 Pa. Mali balon se stavi u posudu s ledom, a veći se izloži djelovanju pare na temperaturi od 100 °C. Koliki je konačni tlak unutar sustava? Zanemarite termičko širenje balona.

C) Rješenja iz matematike

3007. *Ako je*

$$a=\sqrt{\sqrt{3}-\sqrt{2}}\Big(\sqrt{\sqrt{3}-1}+\sqrt{\sqrt{3}+1}\Big),$$
$$b=\sqrt{\sqrt{3}+\sqrt{2}}\Big(\sqrt{\sqrt{3}-1}-\sqrt{\sqrt{3}+1}\Big),$$

koliko je $a+b$*?*

Rješenje. Koristit ćemo identitet.

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2.$$

$$a^2=\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\Big(\sqrt{3}-1+2\cdot \cdot\sqrt{\sqrt{3}-1}\cdot\sqrt{\sqrt{3}+1}+\sqrt{3}+1\Big)$$
$$=2\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)=2;$$

$$2ab=2\cdot\sqrt{\sqrt{3}-\sqrt{2}}\sqrt{\sqrt{3}+\sqrt{2}} \cdot\left(\sqrt{\sqrt{3}-1}+\sqrt{\sqrt{3}+1}\right) \cdot\left(\sqrt{\sqrt{3}-1}-\sqrt{\sqrt{3}+1}\right)$$
$$=2\cdot\sqrt{3-2}[\sqrt{3}-1-(\sqrt{3}+1)]$$
$$=2\cdot 1\cdot(-2)=-4;$$

$$b^2=\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)\Big(\sqrt{3}-1-2\cdot \cdot\sqrt{\sqrt{3}-1}\cdot\sqrt{\sqrt{3}+1}+\sqrt{3}+1\Big)$$
$$=2\cdot\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)=2.$$

Dobivamo $(a+b)^2=0$, tj. $a+b=0$.

Ivan Artić (8),
OŠ Augusta Cesarca, Krapina

3008. *Ako je* x *rješenje jednadžbe*

$$x^2-x-1=0,$$

pokaži da se za svaki prirodan broj $n\geqslant 2$ *može zapisati*

$$x^n=a_nx+b_n.$$

Odredi a_n *i* b_n *za svaki* $n\geqslant 2$.

Rješenje. Ako je $n=2$, kada je $x^2=x+1$, pa je $a_2=1$, $b_2=1$.

Za $n=3$ je

$$x^3=\underbrace{(x^3-x^2-x)}_{=0}+\underbrace{x^2-x-1}_{=0}+2x+1,$$

tj. $a_3=2$, $b_3=1$.

Za $n=4$ je

$$x^4=\underbrace{(x^4-x^3-x^2)}_{=0}+\underbrace{(x^3-x^2-x)}_{=0}$$
$$+\underbrace{(2x^2-2x-2)}_{=0}+3x+2=3x+2,$$

tj. $a_4=3$, $b_4=2$.

Za $n=5$ je

$$x^5=\underbrace{(x^5-x^4-x^3)}_{=0}+\underbrace{x^4-x^3-x^2}_{=0}$$
$$+\underbrace{2x^3-2x^2-2x}_{=0}+\underbrace{3x^2-3x-3}_{=0}+5x+3$$

tj. $a_5=5$, $b_5=3$.

Naslućujemo da je za $n\geqslant 2$, $x^n=F_nx+F_{n-1}$, tj. $a_n=F_n$, $b_n=F_{n-1}$, gdje su F_n i F_{n-1} Fibonaccijevi brojevi (pri tome je $F_{n+1}=F_n+F_{n-1}$, $n\geqslant 2$, $F_1=F_2=1$).

Za $n=2$ i $n=3$ tvrdnja vrijedi!

Pretpostavimo da ona vrijedi za neki $n\geqslant 3$. Tada je

$$x^{n+1}=x^{n+1}-x^n-x^{n-1}+x^n+x^{n-1}$$
$$=x^{n-1}\underbrace{(x^2-x-1)}_{=0}+(F_nx+F_{n-1})$$
$$+(F_{n-1}x+F_{n-2})$$
$$=(F_n+F_{n-1})x+(F_{n-1}+F_{n-2})$$
$$=F_{n+1}x+F_n.$$

Gabrijel Guberović (2),
Gimnazija Nova Gradiška, Nova Gradiška

3009. *Nađi sva rješenja jednadžbe*

$$\log_{2-2x^2}(2-x^2-x^4)=2-\frac{1}{\log_{\frac{4}{3}}(2-2x^2)}.$$

Rješenje. Moraju biti zadovoljeni uvjeti

$$2-2x^2>0 \implies |x|<1,$$
$$2-2x^2\neq 1 \implies x\neq\pm\frac{\sqrt{2}}{2},$$
$$2-x^2-x^4>0 \implies -2<x^2<1$$

$$\Longrightarrow\ x \in (-1,1) \setminus \left\{-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right\}.$$

$$\log_{2-2x^2}(2-2x^2+x^2-x^4)$$
$$= 2 - \log_{2-2x^2}\frac{4}{3},$$
$$\log_{2-2x^2}\Big(2(1-x^2)+x^2(1-x^2)\Big)$$
$$+\log_{2-2x^2}\frac{4}{3} = 2,$$
$$\log_{2-2x^2}\left[(1-x^2)(2+x^2)\cdot\frac{4}{3}\right]$$
$$-\log_{2-2x^2}(2-2x^2)^2 = 0,$$
$$\log_{2-2x^2}\frac{(1-x^2)(2+x^2)\cdot\frac{4}{3}}{(2-2x^2)^2} = 0,$$
$$\log_{2-2x^2}\frac{(1-x^2)(2+x^2)\cdot\frac{4}{3}}{4(1-x^2)^2} = 0,$$
$$\log_{2-2x^2}\frac{2+x^2}{3(1-x^2)} = \log_{2-2x^2}1.$$

Antilogaritmiranjem imamo:

$$\frac{2+x^2}{3(1-x^2)} = 1 \Longrightarrow 2+x^2 = 3-3x^2,$$
$$4x^2 = 1, \qquad x = \pm\frac{1}{2}.$$

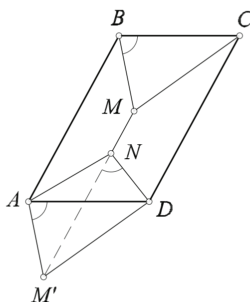
Šimun Romić (3),
Gimnazija Metković, Metković

3010. *Unutar paralelograma $ABCD$ dana je točka M, a unutar trokuta AMD točka N takva da je*

$$\sphericalangle MNA + \sphericalangle MCB = \sphericalangle MND + \sphericalangle MBC = 180^\circ.$$

Dokaži da su pravci MN i AB paralelni.

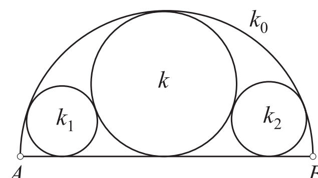
Rješenje.



Translacijom za vektor $\overrightarrow{BA}$ točka M prelazi u M'. Pritom trokut BMC prelazi u $AM'D$. Četverokut $ANDM'$ je tetivni četverokut jer vrijedi: $\sphericalangle AM'D + \sphericalangle AND = \sphericalangle BMC + \sphericalangle AND = (180^\circ - \sphericalangle MBC - \sphericalangle MCB) + (360^\circ - \sphericalangle MNA - \sphericalangle MND) = 180^\circ$. Prema tome $\sphericalangle M'ND = \sphericalangle M'AD$ i $\sphericalangle MND + \sphericalangle M'ND = \sphericalangle MND + \sphericalangle M'AD = \sphericalangle MND + \sphericalangle MBC = 180^\circ$. To znači točke M, N i M' leže na istom pravcu, tj. $MN \| \overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{BA}$.

Ur.

3011. *Dana je polukružnica k_0 s promjerom $\overline{AB}$. Kružnice k, k_1, k_2 dodiruju k_0 i dužinu $\overline{AB}$; kružnica k dodiruje k_1 i k_2. Neka su r, r_1, r_2 redom polumjeri od k, k_1, k_2.*



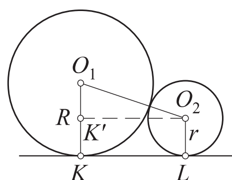
Dokaži da je

$$\frac{1}{\sqrt{r_1}} + \frac{1}{\sqrt{r_2}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{r}}.$$

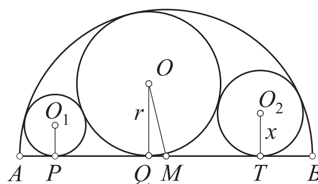
Rješenje. U rješenju ćemo koristiti sljedeću tvrdnju.

Lema. *Ako se dvije kružnice polumjera R i r dodiruju izvana, tada je duljina zajedničke tangente između njih jednaka $2\sqrt{Rr}$.*

Dokaz.



Neka je $R \geqslant r$. Tada je $|KL|^2 = |K'O_2|^2 = (R+r)^2 - (R-r)^2 = 4Rr$ tj. $|KL| = 2\sqrt{Rr}$.



Neka je M polovište dužine $\overline{AB}$; P, Q, T su točke u kojima tangenta AB dodiruje k_1, k, k_2 i r_1, r, r_2 polumjeri kružnica k_1, k, k_2. Stavimo $|AB| = 2R$, $|TO_2| = r_2 = x$. Imamo $|MO| = R - r$, a iz pravokutnog trokuta OQM dobivamo: $|QM| = \sqrt{R^2 - 2Rr}$. Slično se dobiva $|MT| = \sqrt{R^2 - 2Rx}$. Primijetimo da je $|QM| = ||QT|| - |MT||$. Iz leme dobivamo $|QT| = 2\sqrt{rx}$. Uvrštavanjem u $|QM|^2 = (|QT| - |MT|)^2$ dobivamo

$$R^2 - 2Rr = 4rx + R^2 - 2Rx - 4\sqrt{rx}\sqrt{R^2 - 2Rx},$$

$$2\sqrt{rx}\sqrt{R^2 - 2Rx} = Rr - (R - 2r)x,$$

$$4rx(R^2 - 2Rx) = (R - 2r)^2x^2 - 2Rr(R - 2r)x + R^2r^2,$$

$$(R + 2r)^2x^2 - 2Rr(3R - 2r) + R^2r^2 = 0. \quad (*)$$

Primijetimo da ova jednadžba vrijedi, ne samo za $x = r_2$, nego i za $x = r_1$, jer se jednadžba za r_1 izvodi iz slične jednakosti $|QM| = ||QP| - |MP||$. Drugim riječima, r_1 i r_2 su rješenja kvadradne jednadžbe $(*)$. Koristeći Viètetove formule dobivamo

$$r_1 + r_2 = \frac{2Rr(3R - 2r)}{(R + 2r)^2}$$

$$r_1r_2 = \frac{R^2r^2}{(R + 2r)^2}.$$

Iz druge jednadžbe je $\sqrt{r_1r_2} = \dfrac{Rr}{R + 2r}$.

Sada dobivamo

$$r_1 + r_2 + 2\sqrt{r_1r_2} = \frac{2Rr(3R - 2r)}{(R + 2r)^2} + \frac{2Rr(R + 2r)}{(R + 2r)^2}$$

$$= \frac{8R^2r}{(R + 2r)^2} = \frac{8r_1r_2}{r},$$

$$(\sqrt{r_1} + \sqrt{r_2})^2 = \frac{8r_1r_2}{r},$$

$$\sqrt{r_1} + \sqrt{r_2} = \frac{2\sqrt{2}\sqrt{r_1r_2}}{\sqrt{r}}.$$

Dijeljenjem ove jednakosti $\sqrt{r_1r_2}$, dobivamo traženu tvrdnju.

Ur.

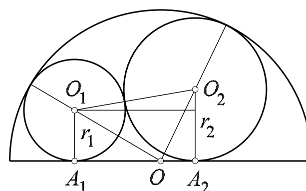
3012. *Unutar polukružnice polumjera 1 koja je omeđena promjerom, upisane su dvije kružnice polumjera r_1 i r_2 od kojih svaka dodiruje polukružnicu i njezin promjer, te se dodiruju međusobno. Dokaži nejednakost*

$$r_1 + r_2 \leqslant 2(\sqrt{2} - 1).$$

Rješenje. Uz oznake kao na slici je $|O_1O_2| = r_1 + r_2$, $|O_1A_1| = r_1$, $|OA_2| = r_2$. Nadalje,

$$|A_1A_2|^2 = |O_1O_2|^2 - (|OA_2| - |OA_1|^2)$$

$$= (r_1 + r_2)^2 - (r_2 - r_1)^2 = 4r_1r_2. \quad (1)$$



Dalje imamo,

$$|OO_1| = 1 - r_1, \qquad |OO_2| = 1 - r_2,$$

pa je

$$|OA_1|^2 = |OO_1|^2 - |O_1A_1|^2$$

$$= (1 - r_1)^2 - r_1^2 = 1 - 2r_1,$$

$$|OA_2|^2 = |OO_2|^2 - |O_2A_2|^2$$

$$= (1 - r_2)^2 - r_2^2 = 1 - 2r_2.$$

Iz (1) dobivamo

$$2\sqrt{r_1r_2} = |A_1A_2| = |OA_1| + |OA_2|$$

$$= \sqrt{1 - 2r_1} + \sqrt{1 - 2r_2}.$$

Kvadriranjem slijedi

$$4r_1r_2 = 1 - 2r_1 + 1 - 2r_2 + 2\sqrt{(1 - 2r_1)(1 - 2r_2)}$$

$$\iff \sqrt{(1 - 2r_1)(1 - 2r_2)}$$

$$= 2r_1r_2 + r_1 + r_2 - 1$$

$$\iff (1 - 2r_1)(1 - 2r_2)$$

$$= (2r_1r_2 + r_1 + r_2 - 1)^2$$

$$\iff 1 - 2r_1 - 2r_2 + 4r_1r_2$$

$$= (2r_1r_2 + r_1 + r_2)^2 + 1 - 2(2r_1r_2 + r_1 + r_2)$$

$$\iff 2r_1r_2 + r_1 + r_2 = \sqrt{8r_1r_2}$$

$$\iff r_1 + r_2 = \sqrt{8r_1r_2} - 2r_1r_2.$$

Pretpostavimo da je $r_1 + r_2 > 2(\sqrt{2} - 1)$. Stavimo $x = \sqrt{r_1r_2}$. Tada je

$$\sqrt{8r_1r_2} - 2r_1r_2 > \sqrt{8} - 2$$

$$\iff \sqrt{8}x - 2x^2 > \sqrt{8} - 2$$

$$\iff 2x^2 - \sqrt{8}x + \sqrt{8} - 2 < 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6-4\sqrt{2}}}{2} < x < \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6-4\sqrt{2}}}{2}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \frac{\sqrt{2}-\sqrt{2^2-2\cdot 2\sqrt{2}+(\sqrt{2})^2}}{2} < x < \frac{\sqrt{2}+\sqrt{2^2-2\cdot 2\sqrt{2}+(\sqrt{2})^2}}{2}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \frac{\sqrt{2}-(2-\sqrt{2})}{2} < x < \frac{\sqrt{2}+2-\sqrt{2}}{2}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \sqrt{2}-1 < x < 1. \qquad (*)$$

$$r_1+r_2 = 2\sqrt{2r_1r_2}-2r_1r_2$$

$$\Longrightarrow \quad 2\sqrt{r_1r_2} \leqslant 2\sqrt{2r_1r_2}-2r_1r_2$$

$$r_1r_2 \leqslant (\sqrt{2}-1)\sqrt{r_1r_2}$$

$$\sqrt{r_1r_2} \leqslant \sqrt{2}-1$$

$$x \leqslant \sqrt{2}-1$$

Kontradikcija sa $(*)$, odakle slijedi

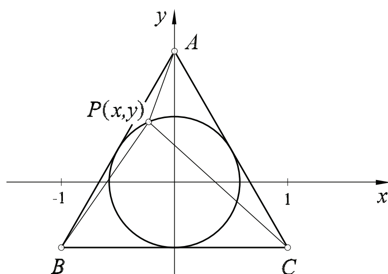
$$r_1+r_2 \leqslant 2(\sqrt{2}-1).$$

Ur.

3013. *Neka je P točka na kružnici upisanoj u jednakostraničan trokut ABC, duljine stranice 2. Dokaži jednakost*

$$|PA|^2+|PB|^2+|PC|^2 = 5.$$

Rješenje.



Postavimo Kartezijev koordinatni sustav kojemu je ishodište u središtu trokutu upisane kružnice. Tada je $A\left(0, \dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)$, $B\left(-1, \dfrac{-1}{\sqrt{3}}\right)$, $C\left(1, \dfrac{-1}{\sqrt{3}}\right)$. Polumjer upisane kružnice je $r = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$. Koordinate točke $P(x, y)$, pri čemu je $x^2+y^2 = r^2 = \dfrac{1}{3}$.

$$|PA|^2+|PB|^2+|PC|^2 = \left[x^2+\left(y-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2\right] + \left[(-1-x)^2+\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}-y\right)^2\right] + \left[(1-x)^2+\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}-y\right)^2\right] = 3(x^2+y^2)+4 = 5.$$

Elmedina Hodžić (1),
Gimnazija Visoko, Visoko, BiH

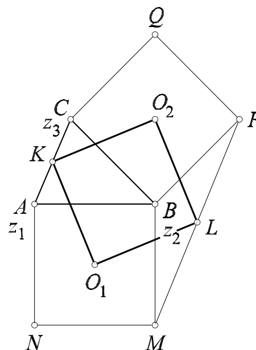
3014. *Na stranicama $\overline{AB}$ i $\overline{BC}$ trokuta ABC konstruirani su s vanjske strane jednako orijentirani kvadrati $ABMN$ i $BCQP$. Njihova središta su O_1 i O_2, K je polovište stranice $\overline{AC}$ i L je polovište od $\overline{MP}$. Dokaži da je četverokut O_1LO_2K kvadrat.*

Rješenje. Promatrajmo problem u kompleksnoj ravnini, pri čemu su točkama A, B i C pridruženi kompleksni brojevi z_1, z_2 i z_3. Točkama K, O_1 i O_2 pridruženi su brojevi

$$z_K = \frac{1}{2}(z_1+z_3),$$

$$z_{O_1} = z_1+\frac{\sqrt{2}}{2}(z_2-z_1)e^{-\frac{i\pi}{4}} = -\frac{1}{2}z_1+\frac{i}{2}z_1+\frac{1}{2}z_2-\frac{i}{2}z_2,$$

$$z_{O_2} = z_2+\frac{\sqrt{2}}{2}(z_3-z_2)e^{-\frac{i\pi}{4}} = \frac{1}{2}z_2+\frac{i}{2}z_2+\frac{1}{2}z_3-\frac{i}{2}z_3.$$



Točkama M, P i L pridruženi su kompleksni brojevi z_M, z_P i z_L takvi da je

$$z_M = z_2 + (z_1 - z_2)e^{\frac{i\pi}{2}} = z_2 + i(z_1 - z_2),$$
$$z_P = z_2 + (z_3 - z_2)e^{-\frac{i\pi}{2}} = z^2 - i(z_3 - z_2),$$
$$z_L = \frac{1}{2}(z_M + z_P) = z_2 + \frac{i}{2}(z_1 - z_3).$$

Vektorima $\overrightarrow{KO_1}$ i $\overrightarrow{KO_2}$ pridruženi su brojevi:

$$z_{KO_1} = z_{O_1} - z_K = \frac{i}{2}z_1 + \frac{1}{2}z_2 - \frac{i}{2}z_2 - \frac{1}{2}z_3,$$
$$z_{KO_2} = z_{O_2} - z_K = -\frac{1}{2}z_1 + \frac{1}{2}z_2 + \frac{i}{2}z_2 - \frac{i}{2}z_3,$$
$$\Longrightarrow z_{KO_2} = iz_{KO_1}.$$

što znači da je $KO_1 \perp KO_2$ i $|KO_1| = |KO_2|$. Preostaje još pokazati da se vektor $\overrightarrow{O_1K}$ dobije iz $\overrightarrow{O_1L}$ rotacijom za $\frac{\pi}{2}$, tj. da je $z_{O_1K} = iz_{O_1L}$. Sada je

$$z_{O_1K} = -\frac{i}{2}z_1 - \frac{1}{2}z_2 + \frac{i}{2}z_2 + \frac{1}{2}z_3,$$
$$z_{O_1L} = z_L - z_{O_1} = -\frac{1}{2}z_1 + \frac{1}{2}z_2 + \frac{i}{2}z_2 - \frac{i}{2}z_3.$$

Odavde slijedi $z_{O_1K} = iz_{O_1L}$, tj. $O_1K \perp O_1L$ i $|O_1K| = |O_1L|$. Time je dokazano da je četverokut O_1LO_2K kvadrat.

Ur.

3015. *Odredi produkt*

$$\cos\frac{2\pi}{17}\cos\frac{4\pi}{17}\cos\frac{6\pi}{17}\cos\frac{8\pi}{17}\cdot\cos\frac{10\pi}{17}\cos\frac{12\pi}{17}\cos\frac{14\pi}{17}\cos\frac{16\pi}{17}.$$

Rješenje. Stavimo $v = \frac{\pi}{17}$. Treba odrediti

$$x = \cos 2v\cos 4v\cos 6v\cos 8v\cos 10v\cdot\cos 12v\cos 14v\cos 16v.$$

Označimo li

$$y = \sin 2v\sin 4v\sin 6v\sin 8v\sin 10v\cdot\sin 12v\sin 14v\sin 16v,$$

dobivamo

$$xy = \sin 2v\cos 2v\cdot\sin 4v\cos 4v\cdot\sin 6v\cos 6v\cdot\sin 8v\cos 8v\cdot\sin 10v\cos 10v\cdot\sin 12v\cos 12v\cdot\sin 14v\cos 14v\cdot\sin 16v\cos 16v$$
$$= \frac{1}{2}\sin 4v\cdot\frac{1}{2}\sin 8v\cdot\frac{1}{2}\sin 12v\cdot\frac{1}{2}\sin 16v\cdot\frac{1}{2}\sin 20v\cdot\frac{1}{2}\sin 24v\cdot\frac{1}{2}\sin 28v\cdot\frac{1}{2}\sin 32v.$$

Koristit ćemo formulu $\sin x = -\sin(2\pi - x)$. Dobivamo

$$2^8xy = \sin 4v\cdot\sin 8v\cdot\sin 12v\cdot\sin 16v\cdot(-\sin 14v)(-\sin 10v)(-\sin 6v)(-\sin 2v)$$
$$\iff 2^8xy = y \iff x = \frac{1}{256}.$$

Šimun Romić (3),
Gimnazija Metković, Metković

3016. *Dokaži da za pozitivne brojeve a, b, c vrijedi nejednakost*

$$\frac{a(3a-b)}{c(a+b)} + \frac{b(3b-c)}{a(b+c)} + \frac{c(3c-a)}{b(c+a)} \leqslant \frac{a^3+b^3+c^3}{abc}.$$

Rješenje. Pokažimo da za pozitivne brojeve a, b i c vrijedi nejednakost

$$\frac{a(3a-b)}{c(a+b)} \leqslant \frac{a^3}{abc}.$$

Ova nejednakost ekvivalentna je s

$$a(3a-b)\cdot abc \leqslant a^3\cdot c(a+b)$$
$$\iff (3a-b)b \leqslant a(a+b)$$
$$\iff 3ab - b^2 \leqslant a^2 + ab$$
$$\iff a^2 + b^2 - 2ab \geqslant 0$$
$$\iff (a-b)^2 \geqslant 0.$$

Analogno dobivamo

$$\frac{b(3b-c)}{a(b+c)} \leqslant \frac{b^3}{abc} \quad \text{i} \quad \frac{c(3c-a)}{b(c+a)} \leqslant \frac{c^3}{abc}.$$

Zbrajanjem se dobiva tražena nejednakost. Jednakost vrijedi ako i samo ako je $a = b = c$.

Sara Muhvić (3),
III. gimnazija, Osijek

3017. *Koliko puta treba baciti dva novčića da vjerojatnost pojave dva grba bude veća od $\frac{1}{2}$?*

Rješenje. Pretpostavimo da dva novčića bacamo n puta. Skup mogućih ishoda je jednak 4^n. Broj ishoda kod kojih se ne

dobiju dva grba je jednak 3^n. Dakle, dva grba pojavljuju se u $4^n - 3^n$ slučaja. Točna vjerojatnost je

$$p = \frac{4^n - 3^n}{4^n} = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n.$$

Da bi vjerojatnost bila veća od $\frac{1}{2}$ mora biti

$$1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n > \frac{1}{2} \qquad \text{tj.} \qquad \frac{1}{2} > \left(\frac{3}{4}\right)^n.$$

Za $n = 2$ je $\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16} > \frac{1}{2}$, a za $n = 3$ je $\left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{27}{64} < \frac{1}{2}$, pa je tražen minimalan broj bacanja jednak 3.

Ur.

3018. *Na koliko načina se na šahovskoj ploči* 8×8 *mogu postaviti crni i bijeli skakač tako da se međusobno ne napadaju?*

Rješenje. U poljima tablice je napisano na koliko polja se može nalaziti bijeli skakač da ne napada crnog kad se crni nalazi na nekom polju.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	61	60	59	59	59	59	60	61
2	60	59	57	57	57	57	59	60
3	59	57	55	55	55	55	57	59
4	59	57	55	55	55	55	57	59
5	59	57	55	55	55	55	57	59
6	59	57	55	55	55	55	57	59
7	60	59	57	57	57	57	59	60
8	61	60	59	59	59	59	60	61

Ako se crni skakač nalazi na polju A1 bijeli se može nalaziti na svim poljima osim A1, B3 i C2, tj. može se nalaziti na 61-om polju. Ako se crni skakač nalazi na polju B1 bijeli se može nalaziti na svim poljima osim B1, A3, C3 i D2, tj. može se nalaziti na 60 polja. . . .

$$4 \cdot 61 + 8 \cdot 60 + 20 \cdot 59 + 16 \cdot 57 + 16 \cdot 55 = 3\,696.$$

Na šahovskoj ploči 8×8 crni i bijeli skakač se mogu postaviti na 3 696 načina da se međusobno ne napadaju.

Nikolina Artić (3),
SŠ Krapina, Krapina

3019. *Dana je funkcija* $f : \mathbf{R} \setminus \{\frac{1}{3}\} \longrightarrow \mathbf{R}$ *relacijom* $f\left(\frac{x+1}{1-3x}\right) = x - f(x)$. *Da li je* 2 006 *višekratnik od* $f(1)$*?*

Rješenje. Za $x = 1$ je $f\left(\frac{2}{-2}\right) = 1 - f(1)$; $f(-1) = 1 - f(1)$, odnosno vrijedi

$$f(-1) + f(1) = 1. \qquad (*)$$

Za $x = -1$ je $f(0) = -1 - f(-1)$ odnosno

$$f(-1) + f(0) = -1. \qquad (**)$$

Za $x = 0$ je $f(-1) = 0 - f(0)$ odnosno

$$f(1) + f(0) = 0. \qquad (***)$$

Sada imamo sistem s tri jednadžbe $(*)$, $(**)$, $(***)$

$$\left.\begin{array}{l} f(-1) + f(1) = 1 \\ f(-1) + f(0) = -1 \\ f(1) + f(0) = 0 \end{array}\right\} +$$

$$2(f(-1) + f(1) + f(0)) = 0$$

$$f(1) + f(-1) + f(0) = 0$$

$$f(1) + (-1) = 0;$$

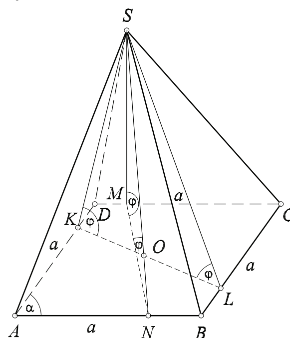
$$\Longrightarrow f(1) = 1.$$

Stoga je 2 006 višekratnik od $f(1)$.

Mehmed Brkić (4),
II. gimnazija, Sarajevo, BiH

3020. *Baza piramide je romb čija duljina stranice je jednaka* a*, i šiljasti kut između njegovih stranica je* α*. Svaki prostorni kut uz bridove baze je* φ*. Odredi ukupnu površinu bočnih strana piramide.*

Rješenje.



Neka je $\overline{SO}$ visina piramide. Iz vrha S povucimo okomicu SN na AB i okomicu SL na BC. Tada povucimo pravce NO i LO. Oni sijeku stranice $\overline{CD}$ i $\overline{AD}$ u točkama M i K, tim redom. Tada je $\sphericalangle SNO = \sphericalangle SLO = \sphericalangle SMO = \sphericalangle SKO = \varphi$ i $\triangle SON \cong \triangle SOL \cong \triangle SOM \cong \triangle SOK$ tj. $|ON| = |OL| = |OM| = |OK|$ i točka O je jednako udaljena od stranica baze. Površina točnih strana je $P = 4P_1$ gdje je $P_1 = P_1(ABS)$, jer je $\triangle ABC \cong \triangle CBS \cong \triangle CDS \cong \triangle ADS$. Dužina $\overline{SN}$ je visina $\triangle ABS$. Kako je $MN \perp AB$, $|MN| = |AD| \cdot \sin\alpha$ tj. $|MN| = a\sin\alpha$. Iz $\triangle ONS$ ($\sphericalangle SON = \dfrac{\pi}{2}$) se dobiva duljina visine $\triangle ABS$:

$$|NS| = \frac{|NO|}{\cos\varphi} = \frac{\frac{a}{2}\sin\alpha}{2\cos\varphi} = \frac{a\sin\alpha}{2\cos\varphi}.$$

Sada je

$$P_1 = \frac{1}{2}|AB| \cdot |NS| = \frac{a^2\sin\alpha}{4\cos\varphi},$$

$$P = 4P_1 = \frac{a^2\sin\alpha}{\cos\varphi}.$$

Ur.

D) Rješenja iz fizike

OŠ – 250. *Stojeći nepomično na pomičnim stepenicama, putnik u trgovačkom centru stigne s prvog kata na drugi za 8 s. Kad se uspinje nepomičnim stepenicama potrebne su mu 24 s. Za koje će vrijeme putnik stići s prvog na drugi kat, ako se uspinje pomičnim stepenicama?*

Rješenje. Kad putnik stoji nepomično na pomičnim stepenicama za 1 sekundu prijeđe $\dfrac{1}{8}$ puta. Kad se uspinje na nepomičnim stepenicama za 1 sekundu prijeđe $\dfrac{1}{24}$ puta.

$$\frac{1}{8} + \frac{1}{24} = \frac{1}{6}.$$

Kada se uspinje pomičnim stepenicama za 1 sekundu prijeđe $\dfrac{1}{6}$ puta. Iz toga proizlazi da mu je za cijeli put potrebno 6 sekundi.

Ivan Artić (8),
OŠ Augusta Cesarca, Krapina

OŠ – 251. *Da bi odredio promjer žice učenik je namotao 1.57 m žice na olovku promjera 5 mm, tako da su navoji žice jedan do drugoga. Navoji su prekrili olovku u duljini 10 cm. Koliki je promjer žice?*

Rješenje.

$l = 1.57$ m

$d = 2r = 5$ mm

$s = 10$ cm

$a = ?$

Prvo postavimo jednadžbu iz koje očitavamo vrijednosti a: $\dfrac{s}{a} = n$, $s = a \cdot n$, $a = \dfrac{s}{n}$, pri čemu je n broj namotaja žice na olovki. Da bismo pronašli a, moramo odrediti n. Kako je n jednak omjeru duljine žice i opsega o olovke imamo

$$n = \frac{l}{o} = \frac{l}{2r\pi} = \frac{1.57 \text{ m}}{5 \text{ mm} \cdot 3.14} = \frac{1\,570 \text{ mm}}{15.7 \text{ mm}} = 100.$$

Uvrstimo n u početnu jednadžbu:

$$a = \frac{s}{n} = \frac{10 \text{ cm}}{100} = 0.1 \text{ cm} = 1 \text{ mm}.$$

Odgovor: promjer žice je 1 mm.

Emanuel Guberović (7),
OŠ Ljudevita Gaja, Nova Gradiška

OŠ – 252. *Koliki rad izvrši trkač svladavajući otpor zraka na putu 100 m, ako na 1 m površine djeluje otpor od 0.5 kN? Dio površine tijela na koji izravno djeluje otpor zraka iznosi* $0.5\,m^2$.

Rješenje.

$s = 100$ m

$F = 0.5\,\text{kN/ m}^2$

$S_1 = 0.5\ \text{m}^2$

$W = ?$

$W = F \cdot s \cdot S$

$W = 0.5\,\text{kN/ m}^2 \cdot 100\ \text{m} \cdot 0.5\ \text{m}^2$

$W = 500\,\text{N} \cdot 50\ \text{m}$

$W = 25\,000\,\text{J} = 25\,\text{kJ}$

Trkač izvrši rad od 25 kJ.

Katarina Vatavuk (8),
OŠ Fausta Vrančića, Šibenik

OŠ – 253. *U čašu ulijemo vode od $100\,^\circ C$ do $\frac{3}{4}$ volumena čaše, a zatim dodamo hladne vode toliko da čaša bude puna. Odredite kolika je konačna temperatura vode u čaši, ako je hladna voda imala temperaturu $20\,^\circ C$.*

Rješenje.

$$t_1 = 100\,^\circ\mathrm{C}, \qquad V_1 = \frac{3}{4}V$$

$$t_2 = 20\,^\circ\mathrm{C}, \qquad V_2 = \frac{1}{4}V$$

$$\rho = \frac{m}{V}$$

$$m_1 = \rho_1 \cdot V_1 = \rho \cdot \frac{3}{4}V,$$

$$m_2 = \rho \cdot \frac{1}{4}V,$$

$$t = \frac{m_1 \cdot t_1 + m_2 \cdot t_2}{m_1 + m_2},$$

$$t = \frac{\rho \cdot \frac{3}{4}V \cdot 100\,^\circ\mathrm{C} + \rho \cdot \frac{1}{4}V \cdot 20\,^\circ\mathrm{C}}{\rho \cdot \frac{3}{4}V + \rho \cdot \frac{1}{4}V},$$

$$t = \frac{\frac{3}{4} \cdot 100\,^\circ\mathrm{C} + \frac{1}{4} \cdot 20\,^\circ\mathrm{C}}{\frac{3}{4} + \frac{1}{4}},$$

$$t = 75\,^\circ\mathrm{C} + 5\,^\circ\mathrm{C} = 80\,^\circ\mathrm{C}.$$

Ivan Artić (8),
OŠ Augusta Cesarca, Krapina

1343. *Promatrač stoji kraj početka prvog vagona vlaka koji se počne gibati jednoliko ubrzano. Prvi vagon prolazi pokraj promatrača 5 s. Koliko će dugo pored njega prolaziti peti vagon, ako su svi vagoni jednake duljine?*

Rješenje.

l – duljina vagona u m

t_1 – vrijeme prolaza prvog vagona pokraj promatrača

t_4 – vrijeme prolaska četiri vagona pokraj promatrača

t_5 – vrijeme prolaska pet vagona pokraj promatrača

t – vrijeme prolaska petog vagona pokraj promatrača

$t_1 = 5$ s

$t = ?$

$$a = \frac{2l}{t_1^2} = \frac{2l}{25}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2},$$

$$t = t_5 - t_4,$$

$$t = \sqrt{\frac{2 \cdot 5l}{a}} - \sqrt{\frac{2 \cdot 4l}{a}},$$

$$t = \sqrt{\frac{2 \cdot 5l\ \mathrm{m}}{\frac{2l}{25}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}} - \sqrt{\frac{2 \cdot 4l\ \mathrm{m}}{\frac{2l}{25}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}},$$

$$t = \sqrt{125\,\mathrm{s}^2} - \sqrt{100\,\mathrm{s}^2},$$

$$t = 11.8s - 10\,\mathrm{s} = 1.18\,\mathrm{s}.$$

Vanja Ubović (1),
Gimnazija Petra Preradovića, Virovitica

1344. *Astrolozi tvrde da na život osobe utječe položaj planeta prilikom njezina rođenja. Da biste provjerili da li taj utjecaj potječe od gravitacijske sile, usporedite sljedeće dvije vrijednosti:*

a) iznos promjene gravitacijske sile na dijete u rodilištu zbog promjene položaja planeta Jupitera u jednom danu i

b) vrijednost promjene gravitacijske sile na dijete zbog prisustva ili odsustva kamiona mase 4 t na parkiralištu udaljenom 75 m od rodilišta.

Jupiter ima masu $1.9 \cdot 10^{27}$ kg, njegova srednja udaljenost od Sunca je $0.78 \cdot 10^9$;km, a period revolucije mu je 11.9 godina. Pretpostavite da je putanja Jupitera, kao i Zemlje, kružna, te da je udaljenost Zemlje od Sunca $1.5 \cdot 10^8$ km. Odaberite područje kada su planeti najbliži. Komentirajte rezultate.

Rješenje.

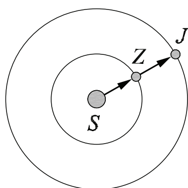
$t = 1$ dan
$m_k = 4\,\mathrm{t} = 4\,000$ kg
$r_p = 75$ m
$m_J = 1.9 \cdot 10^{27}$ kg
$r_{JS} = 0.78 \cdot 10^9$ km $= 0.78 \cdot 10^{12}$ m
$T_J = 11.9$ god $= 4343.5$ dana
$r_{zs} = 1.5 \cdot 10^8$ km $= 1.5 \cdot 10^{11}$ m

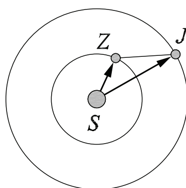
a) Slike prikazuju položaje Zemlje i Jupitera u razmaku od jednog dana.

Prema slici 1 gravitacijska sila na dijete jednaka je:

$$F_{JD1} = G \cdot \frac{m_J m_D}{r_{ZJ1}^2},$$

gdje je $r_{ZJ1} = r_{JS} - r_{ZS} = 6.3 \cdot 10^{11}$ m.



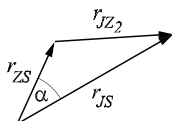


Slika 1. *Slika 2.*
Položaji Zemlje i Jupitera.

Prema slici 2 gravitacijska sila na dijete jednaka je:

$$F_{JD2} = G \cdot \frac{m_J m_D}{r_{ZJ2}^2},$$

gdje ćemo r_{ZJ2} odrediti iz trokuta na slici 2.



Kut α možemo odrediti iz pomaka planeta u jednom danu. Pretpostavimo da su u početku planeti najbliži, tj. da leže na jednom pravcu. Nakon jednog dana, kut koji opiše zemlja iznosi $\alpha_Z = \dfrac{360^\circ}{365} = 0.9863^\circ$, a kut koji opiše Jupiter je $\alpha_J = \dfrac{360^\circ}{4343.5} = 0.0829^\circ$.

Iz toga slijedi $\alpha = \alpha_Z - \alpha_J = 0.9863^\circ - 0.0829^\circ = 0.9034^\circ$.

Sada iz poučka o kosinusu dobivamo r_{ZJ2}.

$$r_{JZ2}^2 = r_{ZS}^2 + r_{JS}^2 - 2r_{ZS}r_{JS}\cos\alpha,$$
$$r_{JZ2}^2 = 6.3 \cdot 10^{11} \text{ m}.$$

Promjena gravitacijske sile zbog pomaka planeta u jednom danu jednaka je:

$$\Delta F_g = F_{JD1} - F_{JD2}$$
$$= Gm_J m_D \cdot \left(\frac{1}{r_{ZJ1}^2} - \frac{1}{r_{ZJ2}^2}\right),$$
$$\Delta F_{g_{Jupiter}} = 7.369 m_D.$$

b) Promjena gravitacijske sile zbog prisustva ili odsustva kamiona jednaka je:

$$\Delta F_{g_{kamion}} = G \cdot \frac{m_k m_D}{r_p^2} = 3.557 m_D$$

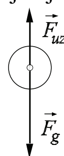
Sada možemo usporediti te dvije sile:

$$\frac{\Delta F_{g_{Jupiter}}}{\Delta F_{g_{kamion}}} = \frac{7.369 m_D}{3.557 m_D} \approx 2.$$

Ur.

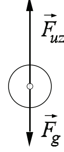
1345. *Dijete puše u opnu od sapunice i pravi mjehure. Hoće li se mjehuri uvijek dizati uvis? Da li na to utječe temperatura prostorije? Obrazložite odgovor.*

Rješenje. Mjehur se neće uvijek dizati uvis. Dizanje, odnosno spuštanje mjehura ovisi o odnosu sile teže (F_g) i sile uzgona (F_{uz}) koje djeluju na mjehur.



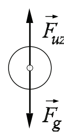
Ukoliko je iznos sile teže veći od iznosa sile uzgona, mjehur će se spuštati,

$$F_g > F_{uz}.$$



Kad bi iznos sile teže bio manji od sile uzgona, mjehur bi se dizao,

$$F_g < F_{uz}.$$



U slučaju da su iznosi sile teže i sile uzgona jednaki, mjehur bi stajao na visini na kojoj ga je dječak postavio.

$$F_g = F_{uz}.$$

$$F_{uz} = V_{\text{mjehura}} \cdot \rho_{\text{zraka}} \cdot g,$$
$$F_g = m_{\text{mjehura}} \cdot g = \rho_{\text{z u mjehuru}} \cdot V_{\text{mjehura}} \cdot g.$$

ρ_{zraka} ovisi o temperaturi. Ako je $T_{\text{vanjsko}} < T_{\text{tjelesno}}$ mjehurić će se dizati jer će tada ρ_{zraka} u mjehuriću biti manja od ρ_{zraka} izvan mjehurića.

Jadran Berbić (3),
Gimnazija Antuna Vrančića, Šibenik

1346. *U smjesu koja se sastoji od 21 l vode i 11 kg leda na temperaturi* $0\,^\circ C$*, ulije se tekuće olovo pri temperaturi njegova tališta. Na kraju miješanja, temperatura smjese iznosi* $100\,^\circ C$*, i pri toj temperaturi ispari 205 g vode. Koliko je olova uliveno u smjesu, ako je temperatura tališta olova* $327\,^\circ C$*, specifična toplina taljenja olova* $\lambda_{to} = 25\,103$ *J/kg, specifični toplinski kapacitet olova* $c_o = 130$ *J/kgK, specifična*

toplina taljenja leda je $\lambda_{\text{tl}} = 3.35 \cdot 10^5$ J/kg, a specifična toplina isparavanja vode $q_{\text{i}} = 22.6 \cdot 10^5$ J/kg?

Rješenje. U zadatku imamo dva sustava. Prvi sustav čine voda i led na temperaturi od $0\,^\circ\mathrm{C}$, a drugi tekuće olovo na temperaturi od $327\,^\circ\mathrm{C}$. Kada se pomiješaju, sustav s većom temperaturom predaje toplinu sustavu s manjom temperaturom.

a) U zadatku najprije trebamo izračunati toplinu koju je potrebno dati smjesi vode i leda tako da nastane smjesa vode i vodene pare. Toplina koju je potrebno dati smjesi vode i leda tako da nastane smjesa vode i vodene pare je jednaka zbroju topline koja se troši na taljenje leda, topline koja je potrebna za zagrijavanje vode i topline koja je potrebna za isparavanje jednog dijela vode.

Toplina koja je potrebna za taljenje leda iznosi:

$$Q_1 = \lambda_{tl} m_{\text{leda}} = 3.35 \cdot 10^5 \text{ J/kg} \cdot 11 \text{ kg} = 3\,685\,000 \text{ J}.$$

Masa vode je sada povećana za masu leda koji se rastalio od $0\,^\circ\mathrm{C}$ do $100\,^\circ\mathrm{C}$. Znači da je sada $m_{\text{vode}} = 21 \text{ kg} + 11 \text{ kg} = 32 \text{ kg}$ (uzimamo da je približno $21 \text{ l} = 21 \text{ kg}$), a $\triangle t = 100\,^\circ\mathrm{C} - 0\,^\circ\mathrm{C} = 100\,^\circ\mathrm{C} = 100 \text{ K}$. Još jedino trebamo znati da je specifični toplinski kapacitet vode $c = 4\,186 \text{ J/kg K}$. Toplina koja je potrebna za zagrijavanje vode iznosi:

$$Q_2 = mc\triangle t = 32 \text{ kg} \cdot 4\,186 \text{ J/kg K} \cdot 100 \text{ K} = 13\,395\,200 \text{ J}.$$

Toplina koja je potrebna za isparavanje jednog dijela vode iznosi:

$$Q_3 = q_l m_{\text{vode koja je isparila}} = 22.6 \cdot 10^5 \text{ J/kg} \cdot 0.205 \text{ kg} = 463\,300 \text{ J}.$$

Ukupna toplina koju je potrebno dati smjesi vode i leda tako da nastane smjesa vode i vodene pare iznosi:

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 = 17\,543\,500 \text{ J}.$$

b) Sada zapišemo jednadžbu za toplinu koju će izgubiti tekuće olovo kada se ohladi na $100\,^\circ\mathrm{C}$. Ta toplina je jednaka zbroju topline koja je potrebna da tekuće olovo očvrsne u krutinu na toj istoj temperaturi i topline koja je potrebna da se olovo u krutom stanju ohladi s temperature tališta na temperaturu od $100\,^\circ\mathrm{C}$.

Jednadžba za toplinu koja je potrebna da tekuće olovo očvrsne u krutinu glasi:

$$Q_1 = \lambda_{to} m_{\text{olova}} = 25\,103 \text{ J/kg} \cdot m_{\text{olova}}.$$

Jednadžba za toplinu koja je potrebna da se olovo u krutom stanju ohladi s temperature tališta na temperaturu od $100\,^\circ\mathrm{C}$ glasi:

$$\begin{aligned} Q_2 &= m_{\text{olova}} c_O \triangle t \\ &= m_{\text{olova}} \cdot 130 \text{ J/kg K} \cdot (327 - 100) \text{ K} \\ &= m_{\text{olova}} \cdot 130 \text{ J/kg K} \cdot 227 \text{ K} \\ &= m_{\text{olova}} \cdot 29\,510 \text{ J/kg}. \end{aligned}$$

Zbroj ovih dviju jednadžbi je

$$\begin{aligned} Q &= Q_1 + Q_2 \\ &= m_{\text{olova}} \cdot (29\,510 \text{ J/kg} + 25\,103 \text{ J/kg}) \\ &= m_{\text{olova}} \cdot 54\,613 \text{ J/kg}. \end{aligned}$$

Konačno, trebamo izjednačiti ukupnu toplinu dobivenu pod a) i ukupnu toplinu dobivenu pod b).

$$17\,543\,000 \text{ J} = m_{\text{olova}} \cdot 54\,613 \text{ J/kg}.$$

Iz toga slijedi da je masa olova jednaka:

$$m_{\text{olova}} = 321.2 \text{ kg}.$$

Iva Musa (4),
Gimnazija M. A. Reljkovića, Vinkovci

1347. *Kružna zavojnica sa 100 zavoja, površine poprečnog presjeka $100\,\mathrm{cm}^2$, postavljena je u homogeno magnetsko polje, jakosti 105 A/m, i to tako da se os zavojnice poklapa sa smjerom silnica magnetskog polja. Kolika količina naboja proteče kroz kratko spojenu zavojnicu, kad se u nju stavi željezna šipka, relativne permeabilnosti 500? Otpor jednog zavoja zavojnice iznosi $2\,\Omega$.*

Rješenje.

$N = 100$

$S = 100 \text{ cm}^2 = 0.01 \text{ m}^2$

$H = 105 \text{ A/m}$

$\mu_r = 500$

$R_1 = 2\ \Omega$

$q = ?$

$$q = \frac{\Delta\phi}{R} = NS\frac{\Delta B}{R}$$

$$\Delta B = B_2 - B_1 = H(\mu_2 - \mu_1)$$

$$\mu_1 = \mu_0, \qquad \mu_2 = \mu_0 \mu_r$$

$$R = NR_1$$

$$q = \mu_0 SH \frac{\mu_r - 1}{R_1} = 0.31 \text{ C}.$$

Ur.

1348. *Dvije metalne kugle pozitivno su nabijene, i to prva polumjera* $2 \cdot 10^{-2}$ *m, na potencijal 200 V, a druga polumjera* $5 \cdot 10^{-2}$ *m, na potencijal 80 V. Kugle dovedemo u međusobni kontakt, a zatim ih razmaknemo na udaljenost 0.4 m. Kolika će biti jakost električnog polja na pola te udaljenosti?*

Rješenje.

$r_1 = 2 \cdot 10^{-2}$ m
$\varphi_1 = 200\ V$
$r_2 = 5 \cdot 10^{-2}$ m
$\varphi_2 = 80\ V$
$d = 0.4$ m
$E = ?$

$$\varphi = k \cdot \frac{q}{r}, \qquad q_1 = \frac{\varphi_1 r_1}{k}, \qquad q_2 = \frac{\varphi_2 r_2}{k}.$$

Nakon kontakta potencijal se promijeni i izjednači, a naboj se drugačije rasporedi:

$$q_1' = \frac{\varphi r_1}{k}, \qquad q_2' = \frac{\varphi r_2}{k}.$$

Ukupna količina naboja je sačuvana:

$$q_1 + q_2 = q_1' + q_2',$$

$$\frac{\varphi_1 r_1}{k} + \frac{\varphi_2 r_2}{k} = \frac{\varphi r_1}{k} + \frac{\varphi r_2}{k},$$

$$\varphi = \frac{\varphi_1 r_1 + \varphi_2 r_2}{r_1 + r_2} = 114.28 \text{ V};$$

$$E = E_1 - E_2 = k \cdot \frac{q_1'}{r^2} - k \cdot \frac{q_2'}{r^2},$$

$$E = \frac{k}{r^2}\left(\frac{\varphi r_1}{k} - \frac{\varphi r_2}{k}\right) = \frac{\varphi}{r^2}(r_1 - r_2),$$

$$E = \frac{114.28 \text{ V}}{0.2^2 \text{ m}^2}(0.02 - 0.05) \text{ m} = -85.7 \text{ V}.$$

Električno polje ima smjer prema kugli s manjim polumjerom.

Ur.

1349. *Iz aviona, koji leti na visini 3 000 m, treba snimiti površinu od 0.2 km*^{2} *na Zemlji, koja ima oblik kvadrata. Kolika mora biti jakost leće objektiva upotrijebljenog fotoaparata, ako površina snimke na fotografskoj ploči treba iznositi 8 cm*^{2}*?*

Rješenje.

$h = 3000$ m

$A_1 = 0.2 \text{ km}^2 = 200\,000 \text{ m}^2$

$A_2 = 0.0008 \text{ m}^2$

$J = ?$

x_1 – udaljenost predmeta od leće $= h$
x_2 – udaljenost slike od leće
Povećanje:

$$m = \sqrt{\frac{A_2}{A_1}} = \frac{x_2}{x_1},$$

$$\sqrt{\frac{A_2}{A_1}} = \frac{x_2}{h},$$

$$x_2 = h \cdot \sqrt{\frac{A_2}{A_1}} = 0.19 \text{ m},$$

$$j = \frac{1}{f} = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{1}{3000 \text{ m}} + \frac{1}{0.19 \text{ m}},$$

$j = 5.26$ dioptrija.

Ur.

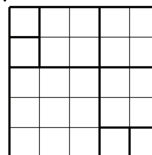
Rješenja zabavne matematike

Broj 2007

Najjednostavniji prikaz je $2007 = 13 \cdot 13 \cdot 13 - 13 \cdot 13 - 7 - 7 - 7$.

Kvadrati

Vidite crtež!



Športaši

Kvrga, plivanje, Atena – Nosko, košarka, Toronto – Suhi, atletika, London.

Tajanstveni broj

Prikažu li se broj $\overline{abcd}$ i brojevi $\overline{bacd}$, $\overline{acbd}$, $\overline{abdc}$, nastali zamjenama znamenki, pomoću dekadskih jedinica, uvjete zadatka možemo napisati u obliku sustava jednadžbi $a + b + c + d = 20$, $b - a = 1$, $b - c = 7$, $d - c = 3$. Rješenje ovog sustava je $a = 7$, $b = 8$, $c = 1$, $d = 4$, pa je 7814 traženi broj.

Preskakivanje pločica

Označimo kružiće redom brojevima od 1 do 16. Tada jedan od načina traženog preskakivanja pločica izgleda ovako: 6–14, 8–6, 16–8, 15–7, 3–11, 4–12, 12–10, 5–7, 13–5, 1–3, 3–11, 14–6, 5–7, 11–3.



ZANIMLJIVOSTI

Ususret međunarodnoj olimpijadi iz fizike u Hrvatskoj 2010. g.

Ana Smontara[1], *Zagreb*

Organizirana natjecanja mladih fizičara, učenika srednjih škola, imaju dugu tradiciju. Prvo takvo natjecanje održano je u Mađarskoj 1916. godine, na prijedlog Društva matematičara i fizičara Mađarske, a po analogiji na natjecanja iz matematike koja su započela još u 19. stoljeću. Zatim se organiziraju natjecanja u Sovjetskom Savezu (1939.), Poljskoj (1951.) i Čehoslovačkoj (1959.), da bi na prijedlog Poljske (1967.) bilo održano prvo međunarodno natjecanje iz fizike (Međunarodna fizikalna olimpijada – u daljnjem tekstu IPhO prema *eng.* International Physics Olympiad). Na prvoj IPhO u Varšavi su se sastale ekipe od po tri učenika iz Bugarske, Čehoslovačke, Mađarske, Poljske i Rumunjske. Sljedeće godine u Budimpešti su im se pridružile ekipe učenika iz Njemačke Demokratske Republike, Sovjetskog Saveza i Jugoslavije, a od 1971. godine su se uključile i zapadnoeuropske zemlje, najprije Francuska, potom tadašnja Savezna Republika Njemačka, Švedska, Finska, Nizozemska, Italija, Grčka, Austrija, Velika Britanija, Norveška i Island, potom i vanevropske zemlje Vijetnam, Kuba...

Broj zemalja učesnica stalno raste, od njih 5 1967. do 82 u 2006. Hrvatska će biti domaćin 41. po redu IPhO 2010. g. Moguće je da će broj zemalja učesnica još rasti, tj. da će sudjelovati i ekipe iz Južnoafričke Republike, Nepala, Ekvadora, ... zemalja koje su do sada imale samo promatrače na IPhO. Time bi IPhO prerasla u manifestaciju koja će obuhvatiti predstavnike zemalja sa svih kontinenata.

Na prostorima bivše Jugoslavije natjecanja mladih fizičara održavala su se od 1962. godine kada je održano prvo Republičko natjecanje mladih fizičara Srbije, zatim Hrvatske, itd... Prvo međurepubličko (savezno) natjecanje mladih fizičara, učenika srednjih škola, održano je dvije godine kasnije (1964.) i od tada se ono održavalo do 1990. redovno svake godine. Ekipa mladih fizičara s ovih prostora priključila se IPhO 1968. godine. Zatim su sudjelovale 1969., 1970. i 1977. godine, da bi od 1981. godine bila redoviti sudionik IPhO sve do 1991., a od 1992. godine ekipa Hrvatske sudjeluje u punom sastavu (pet učenika) sve do danas. (*O sudjelovanju učenika iz Hrvatske na IPhO više u narednim brojevima MLF-a*).

Međunarodna olimpijada iz fizike traje do deset dana, uobičajeno krajem lipnja ili početkom srpnja. Iz svake zemlje može sudjelovati pet natjecatelja, učenika srednjih škola, koje prati vođa ekipe, i pedagoški voditelj. Natjecanje ima dva dijela. U prvom natjecatelji rješavaju teorijske zadatke (obično tri), u drugom dijelu izvode fizikalni eksperiment ili vrše mjerenja postavljenih problema (jedan do dva). Eksperimentalne zadatke priprema i odabire povjerenstvo zemlje-domaćina. Teorijske zadatke priprema

[1] Članica Međunarodnog povjerenstva IPhO od 1984. g. do danas, suorganizatorica XVI. IPhO (Portorož, 1985.), voditeljica ekipe Jugoslavije (1988. – 1991.), a potom Hrvatske od početka njenog sudjelovanja, 1992. g. do 1996. g.

također povjerenstvo zemlje domaćina, ali njihov izbor vrši na svom sastanku uoći natjecanja Međunarodno povjerenstvo, koje sačinjavaju voditelji ekipa.

R.b.	God.	Zemlja domaćin IPhO	Grad domaćin IPhO	Broj zemalja učesnica IPhO
1.	1967	Poljska	Varšava	5
2.	1968	Mađarska	Budimpešta	8
3.	1969	Čehoslovačka	Brno	8
4.	1970	Sovjetski savez	Moskva	8
5.	1971	Bugarska	Sofija	7
6.	1972	Rumunjska	Bukurešt	9
7.	1974	Poljska	Varšava	8
8.	1975	Njemačka DR	Güstrow	9
9.	1976	Mađarska	Budimpešta	10
10.	1977	Čehoslovačka	Hradec Kárlové	12
11.	1979	Sovjetski savez	Moskva	10
12.	1981	Bugarska	Varna	14
13.	1982	SR Njemačka	Malente	17
14.	1983	Rumunjska	Bukurešt	16
15.	1984	Švedska	Sigtuna	18
16.	1985	Jugoslavija	Portorož	20
17.	1986	Velika Britanija	London-Harrow	21
18.	1987	Njemačka DR	Jena	24
19.	1988	Austrija	Bad Ischl	27
20.	1989	Poljska	Varšava	29
21.	1990	Nizozemska	Groningen	32
22.	1991	Kuba	Havana	31
23.	1992	Finska	Helsinki-Espoo	38
24.	1993	SAD	Williamsburg	42
25.	1994	Kina	Peking	46
26.	1995	Australija	Canberra	51
27.	1996	Norveška	Oslo	55
28.	1997	Kanada	Sudubury	54
29.	1998	Island	Reykavik	56
30.	1999	Italija	Padova	62
31.	2000	Velika Britanija	Leicester	63
32.	2001	Turska	Antalya	65
33.	2002	Indonezija	Nusa Dua	66
34.	2003	Taiwan	Taipei	54
35.	2004	Južna Koreja	Pophang	71
36.	2005	Španjolska	Salamanca	72
37.	2006	Singapur	Singapur	82
38.	2007	Iran	Isfahan	
39.	2008	Vijetnam	Hanoi	
40.	2009	Meksiko	Merida	
41.	2010	Hrvatska	???	

Pregled dosadašnjih Olimpijada (IPhO)

Predsjednik povjerenstva je iz zemlje-domaćina i imenovan je od organizatora IPhO. Direktno rukovodi natjecanjem i brine se da se ono provodi prema Statutu IPhO. Rad komisije odvija se na engleskom jeziku, dok natjecatelji dobivaju i rješavaju zadatke na jeziku kojim se služe. Rješenja zadataka ocjenjuju posebna povjerenstva zemlje-domaćina, a njihove ocjene dobija na uvid Međunarodno povjerenstvo, da bi nakon diskusije ono glasanjem potvrdilo ocjene koje na taj način postaju konačne. Prema Statutu IPhO najviše 6% natjecatelja osvaja zlatnu medalju, najviše 18% ih osvaja zlatnu ili srebrnu medalju, najviše 36% ih dobiva zlatnu, srebrnu ili brončanu medalju i najviše 60% ih dobiva medalju ili pohvalu. Svi sudionici IPhO primaju priznanje za sudjelovanje na IPhO. Za originalna rješenja pojedinih zadataka primaju se specijalne pohvale.

IPhO nije ekipno natjecanje pa se službeno objavljuju samo pojedinačni rezultati. Ipak, na osnovi zbroja osvojenih bodova obično se prati i uspjeh ekipa i prave neslužbene rang-liste. Na IPhO su najuspješniji natjecatelji iz zemalja gdje je nastava fizike, ne samo na zavidnom nivou nego se nadarenim učenicima poklanja i kontinuirana posebna pažnja.

Međusobni susreti, poznanstva i prijateljstva učesnika IPhO, upoznavanje s kulturno-povijesnim znamenitostima i prirodnim ljepotama zem1je-domaćina, upoznavanje s dostignućima privrednog i društvenog razvoja te zemlje upotpunjuju ovu međunarodnu manifestaciju. Brojni susreti, odmjeravanje snaga u raznim sportskim disciplinama, nadmetanje u pjesmi i igri, . . . , sve to doprinosi da IPhO za svakog učesnika predstavlja nezaboravan doživljaj.

Međunarodno matematičko natjecanje “Klokan bez granica” 2006. g.



Pod pokroviteljstvom Hrvatskog matematičkog društva 16. ožujka 2006. godine u 12 sati i 30 minuta održano je po osmi put Međunarodno matematičko natjecanje “Klokan bez granica”. U isto vrijeme s približno istim zadacima natjecali su se učenici u Austriji, Bjelorusiji, Brazilu, Bugarskoj, Kataloniji, Cipru, Češkoj, Estoniji, Finskoj, Francuskoj, Gruziji, Njemačkoj, Mađarskoj, Italiji, Kazahstanu, Latviji, Litvi, Makedoniji, Meksiku, Moldaviji, Nizozemskoj, Norveškoj, Pakistanu, Poljskoj, Portoriku, Rumunjskoj, Rusiji, Srbiji i Crnoj Gori, Slovačkoj, Sloveniji, Španjolskoj, Švedskoj, Švicarskoj, Ujedinjenom Kraljevstvu Velike Britanije i Sjeverne Irske, Ukrajini, Sjedinjenim Američkim Državama, Venecueli i Hrvatskoj. U tih 38 zemalja svijeta natjecalo se više od 3 600 000 sudionika, što je ovo natjecanje učinilo najvećim školskim natjecanjem svijeta.

U Hrvatskoj natjecali su se učenici u 253 osnovnih i 50 srednjih škola iz svih županija u šest kategorija:

LEPTIRIĆI – II. i III. razred osnovne škole – (557 učenika) – **L**

ECOLIERS – IV. i V. razred osnovne škole – (6750 učenika) – **E**

BENJAMINS – VI. i VII. razred osnovne škole – (5387 učenika) – **B**

CADETS – VIII. razred osnovne i I. razred srednje škole – (3946 učenika) – **C**

JUNIORS – II. i III. razred srednje škole – (2578 učenika) – **J**

STUDENTS – IV. razred srednjih škola – (924 učenika) – **S**

Ukupno se natjecalo 20 142 učenika.

Prilikom dolaska na natjecanje svaki učenik je dobio mali poklon, a više od 10% najbolje plasiranih učenika dobili su nagrade. Utješne nagrade služe kao poticaj za daljnji marljiv rad na produbljivanju znanja i rješavanju zadataka iz matematike.

Natjecanje za leptiriće uvedeno je ove godine na poticaj Slovenije i Slovačke, koje su takvo natjecanje imale već prošle godine. Ako se pokaže da su nastavnici i učenici zainteresirani da se "Klokani" prošire na svih šest kategorija, sljedeće godine bi se mogle uključiti sve škole koje to žele.

Sljedeće natjecanje bit će održano **15. ožujka 2007. godine**, s početkom u 12 sati i 30 minuta.

Prijave za natjecanje primaju se do **1. veljače 2007. godine na adresu HMD, Bijenička cesta 30 ili na tel: 01/4605708**.

Uzorke zadataka s prošlih natjecanja možete pogledati u knjizi: *Matematičko natjecanje Klokan bez granica 1999. – 2004.*, koju možete nabaviti na gore navedenoj adresi.

Slijede zadaci s prošlogodišnjeg natjecanja.

Koordinator matematičkog natjecanja Neda Lukač, prof.

Zadaci za učenike 2. i 3. razreda srednje škole (Juniori)

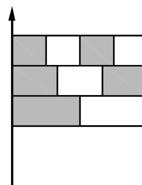
1. Koji je broj jednako udaljen od 2006 i 6002?
A. 3998 **B.** 4000 **C.** 4002 **D.** 4004 **E.** 4006

2. Koliko četveroznamenkastih brojeva s različitim znamenkama je djeljivo brojem 2006?
A. 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 4 **E.** 5

3. Koji se najmanji deseteroznamenkasti broj može napisati spajanjem brojeva 309, 41, 5, 7, 68 i 2?
A. 1234567890 **B.** 1023456789 **C.** 3097568241 **D.** 2309415687 **E.** 2309415678

4. Koliko će puta između 0 : 00 i 23 : 59 digitalni sat pokazati sve od znamenaka 2, 0, 0 i 6, u bilo kojem redoslijedu?
A. 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 4 **E.** 5

5. Zastava se sastoji od tri pruge iste širine koje su podijeljene na dva, tri i četiri jednaka dijela kao na slici. Koji dio zastave, izražen razlomkom, je obojan sivom bojom?

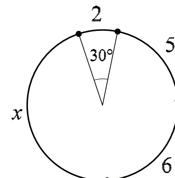


A. $\frac{1}{2}$ **B.** $\frac{2}{3}$ **C.** $\frac{3}{5}$ **D.** $\frac{4}{7}$ **E.** $\frac{5}{9}$

6. 25% Petrovih knjiga su romani, a 1/ 9 su zbirke poezije. Ako ima između 50 i 100 knjiga, koliko ih se nalazi u Petrovoj kolekciji?
A. 50 **B.** 56 **C.** 64 **D.** 72 **E.** 93

7. Sat moje bake ubrza jednu minutu svaki sat. Djedov sat svaki sat izgubi pola minute. Prije no što sam napustio kuću sinkronizirao sam njihove satove i obećao im da ću se vratiti kad razlika između njihovih satova bude točno jedan sat. Koliko će vremena proći do kad se vratim?

A. 12 sati **B.** 14 sati i pol **C.** 40 sati **D.** 60 sati **E.** 90 sati



8. Krug je podijeljen na četiri kružna luka duljina 2, 5, 6 i x. Pronađi vrijednost broja x ako kružnom luku duljine 2 odgovara središnji kut od $30°$.

A. 7 **B.** 8 **C.** 9 **D.** 10 **E.** 11

9. Jedan paket bombona košta 10 kuna. U svakom se pakiranju nalazi kupon. Za svaka tri sakupljena kupona dobije se jedan besplatan paket. Koliko se paketa bombona dobije za 150 kn?

A. 15 **B.** 17 **C.** 20 **D.** 21 **E.** 22

10. Brojevi a, b, c i d su pozitivni tako da je $ab = 2$, $bc = 3$, $cd = 4$ i $de = 5$. Koja je vrijednost broja e/a?

A. $15/8$ **B.** $5/6$ **C.** $3/2$ **D.** $4/5$ **E.** nemoguće je odrediti

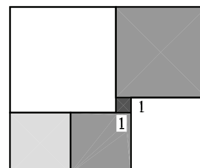
11. Netko je Lady Agnes upitao za godine. Odgovorila je: "Ako poživim do stote godine, onda je broj mojih godina sada jednak četiri trećine od polovine preostalih godina." Koliko je stara Lady Agnes?

A. 20 **B.** 40 **C.** 50 **D.** 60 **E.** 80

12. Pravokutnik na slici podijeljen je na šest manjih kvadrata. Duljina stranice najmanjeg kvadrata je 1 cm. Kolika je duljina stranice najvećeg od njih?

A. 4 cm **B.** 5 cm **C.** 6 cm

D. 7 cm **E.** 8 cm



13. U danom zbrajanju različita slova predstavljaju različite znamenke. Koju znamenku predstavlja slovo G?

A. 1 **B.** 2 **C.** 3

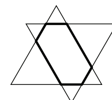
D. 4 **E.** 5

KAN
+ KAG
+ KNG
2006

14. Dva sukladna jednakostranična trokuta s opsegom 18 cm su preklopljena tako da su im odgovarajuće stranice paralelne. Nađi opseg nastalog šesterokuta.

A. 11 cm **B.** 12 cm **C.** 13 cm

D. 14 cm **E.** 15 cm



15. Koji je najveći broj znamenaka koji broj može imati ako je svaki par susjednih znamenaka kvadrat broja?

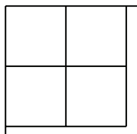
A. 5 **B.** 4 **C.** 3 **D.** 6 **E.** 10

16. Vlak se sastoji od pet vagona: I, II, III, IV i V. Na koliko se načina može postaviti vlak tako da je vagon I uvijek bliži lokomotivi od vagona II?

A. 120 **B.** 60 **C.** 48 **D.** 30 **E.** 10

17. U kutiji se nalazi 15 loptica obojanih crveno-plavo (pola crveno, pola plavo), 12 loptica obojanih plavo-zeleno i 9 loptica obojanih zeleno-crveno. Koji je najmanji broj loptica koji mora biti izabran kako bi sigurno imali sedam loptica koje dijele istu boju?
A. 7 **B.** 8 **C.** 9 **D.** 10 **E.** 11

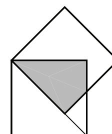
18. Kvadrat površine 125 cm^2 podijeljen je na pet dijelova iste površine – četiri kvadrata i jedan lik oblika slova L, kako je prikazano na slici. Nađi duljinu najkraće stranice lika u obliku slova L.



A. 1 cm **B.** 1.2 cm **C.** $2(\sqrt{5}-2)$ cm **D.** $3(\sqrt{5}-1)$ cm **E.** $5(\sqrt{5}-2)$ cm

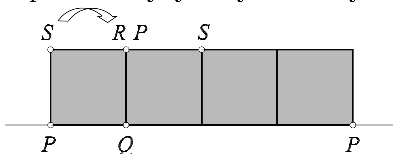
19. Svaka strana kocke obojana je različitom bojom od šest zadanih boja. Koliko različitih kocki se može napraviti na ovaj način?
A. 24 **B.** 30 **C.** 36 **D.** 42 **E.** 48

20. Dva kvadrata duljine stranice 1 dijele zajednički vrh, a stranica jednog kvadrata leži na dijagonali drugoga. Kolika je površina nastalog (osjenčanog) četverokuta?



A. $\sqrt{2}-1$ **B.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **C.** $\frac{\sqrt{2}+1}{2}$
D. $\sqrt{2}+1$ **E.** $\sqrt{3}-\sqrt{2}$

21. Kvadrat $PQRS$ sa stranicama duljine 10 cm rotiran je kao što je prikazano na slici. P i Q na početku leže na pravcu i prva rotacija je oko točke Q. Rotacija prestaje kad točka P opet padne na pravac. Koja je duljina krivulje koju je točka P prešla?



A. 10π **B.** $5\pi+5\pi\sqrt{2}$ **C.** $10\pi+5\pi\sqrt{2}$ **D.** $5\pi+10\pi\sqrt{2}$ **E.** $10\pi+10\pi\sqrt{2}$

22. Broj 257 ima 3 različite znamenke, koje kad se čitaju u obrnutom smjeru daju veći broj, 752. Koliko troznamenkastih brojeva ima isto svojstvo?
A. 124 **B.** 252 **C.** 280 **D.** 288 **E.** 360

23. Y je definiran kao zbroj znamenaka X, a Z kao zbroj znamenaka Y. Koliko prirodnih brojeva, X, Y, Z, zadovoljava jednakost $X+Z+Y=60$?
A. 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 3 **E.** više od 3

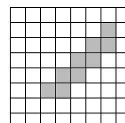
24. Pretpostavimo da je završni rezultat neke nogometne utakmice 5 : 4 za domaću ekipu. Ako su domaćini ostvarili prvi zgoditak i zadržali vodstvo do kraja, na koliko različitih načina je redoslijed zgoditaka mogao biti ostvaren?
A. 17 **B.** 13 **C.** 20 **D.** 14 **E.** 9

Zadaci za 4. razred srednje škole

1. Koji je od sljedećih brojeva najveći?
A. 2006×2006 **B.** 2005×2007 **C.** 2004×2008 **D.** 2003×2009 **E.** 2002×2010

2. Koliko nula ima produkt prvih 2006 prostih brojeva?
A. 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 9 **E.** 26

3. Kvadrati obojani u sivo imaju neku određenu površinu i opseg. Koliko kvadrata možemo obojati u sivo da povećamo površinu ali ne i opseg?



A. 0 **B.** 7 **C.** 18
D. 12 **E.** 16

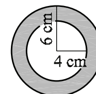
4. Na stolu se nalaze četiri karte. Svaka od njih ima na jednoj strani slovo, a na drugoj broj. Petar je rekao: "Ako je na jednoj strani karte samoglasnik, na drugoj strani je paran broj." Koji je najmanji broj karata koje Anita mora okrenuti da bi provjerila istinitost Petrove tvrdnje?



A. nijednu **B.** 1 **C.** 2
D. 3 **E.** 4

5. Dva vlaka jednake duljine gibaju se u suprotnim smjerovima. Prvi vozi brzinom 100 km/ h, a drugi 120 km/ h. Putnik drugog vlaka je primijetio da prvom vlaku treba 6 sekundi da prođe kraj njega. Koliko vremena treba putniku prvog vlaka da vidi prolaz drugog vlaka?
A. 5 sekundi **B.** 6 sekundi **C.** između 6 i 7 sekundi **D.** 7 sekundi **E.** više od 7 sekundi

6. Suzana ima dva privjeska napravljena od istih materijala. Oni su jednako debeli i jednake su težine. Prvi ima oblik kružnog vijenca koji je sastavljen od dva koncentrična kruga radijusa 6 cm i 4 cm (pogledaj sliku). Drugi privjesak ima oblik punog kruga. Koliki je radijus drugog kruga?



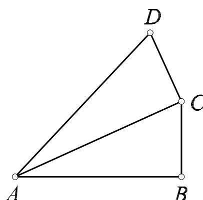
A. 4 cm **B.** $2\sqrt{6}$ cm **C.** 5 cm
D. $2\sqrt{5}$ cm **E.** $\sqrt{10}$ cm

7. Razlika između bilo koja dva uzastopna broja a, b, c, d, e je ista. Ako je $b = 5.5$, a $e = 10$, koja je vrijednost a?
A. 0.5 **B.** 3 **C.** 4 **D.** 4.5 **E.** 5

8. Ako je $4^x = 9$ i $9^y = 256$, tada umnožak xy iznosi?
A. 2006 **B.** 48 **C.** 36 **D.** 10 **E.** 4

9. Napišite sve 9-znamenkaste brojeve koristeći brojeve od 1 do 9. Napišite svaki takav broj na poseban papirić i ubacite ga u kutiju. Koliko najmanje papirića morate izvući iz kutije da biste sa sigurnošću tvrdili da ste izvukli dva papirića s istom prvom znamenkom?
A. 9! **B.** 8! **C.** 72 **D.** 10 **E.** 9

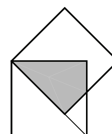
10. Na crtežu, $\overline{AB}$ je duljine 1; $\sphericalangle ABC = \sphericalangle ACD = 90^\circ$; $\sphericalangle CAB = \sphericalangle DAC = \theta$. Koja je duljina $|AD|$?



A. $\cos\theta + \mathrm{tg}\,\theta$ **B.** $\frac{1}{\cos 2\theta}$ **C.** $\cos^2\theta$ **D.** $\cos 2\theta$ **E.** $\frac{1}{\cos^2\theta}$

11. Koja od sljedećih formula daje funkciju čiji graf ima os y za os simetrije?
A. $y = x^2 + x$ **B.** $y = x^2 \sin x$ **C.** $y = x\cos x$ **D.** $y = x\sin x$ **E.** $y = x^3$

12. Dva kvadrata duljine stranice 1 dijele zajednički vrh, a stranica jednog kvadrata leži na dijagonali drugoga. Kolika je površina nastalog (osjenčanog) četverokuta?

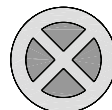


A. $\sqrt{2} - 1$ **B.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **C.** $\frac{\sqrt{2}+1}{2}$
D. $\sqrt{2} + 1$ **E.** $\sqrt{3} - \sqrt{2}$

13. Na kotaču za rulet postoje 37 brojeva: 0 i prirodni brojevi od 1 do 36. Koja je vjerojatnost da kuglica stane na prostom broju?
A. $5/18$ **B.** $11/37$ **C.** $11/36$ **D.** $12/37$ **E.** $1/3$

14. Ostatak dijeljenja broja 1001 s jednoznamenkastim brojem iznosi 5. Koliki je ostatak dijeljenja broja 2006 s istim jednoznamenkastim bojem?
A. 2 **B.** 3 **C.** 4 **D.** 5 **E.** 6

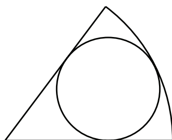
15. Radijus prometnog znaka je 20 cm. Svaki tamni dio je četvrtina kruga. Površina sva četiri tamna dijela jednaka je površini svijetlog dijela znaka. Koliki je radijus tamnog kruga?



A. $10\sqrt{2}$ cm **B.** $4\sqrt{5}$ cm **C.** 20/ 3 cm
D. 12.5 cm **E.** 10 cm

16. Dana su tri prosta broja a, b, c u poretku $a > b > c$. Ako je $a + b + c = 78$ i $a - b - c = 40$ onda je umožak $abc =$
A. 438 **B.** 590 **C.** 1062 **D.** 1239 **E.** 2006

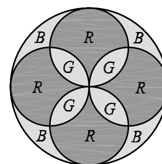
17. Omjer radijusa isječka i upisanog kruga je $3:1$. Koliki je omjer površina:



A. 3 : 2 **B.** 4 : 3 **C.** 5 : 3 **D.** 6 : 5 **E.** 5 : 4

18. Prethodne godine u školskom zboru bilo je 30 dječaka više nego djevojčica. Ove godine broj članova zbora povećao se za 10%: broj djevojčica povećao se za 20% a broj dječaka za 5%. Koliko članova ima zbor ove godine?
A. 88 **B.** 99 **C.** 110 **D.** 121 **E.** 132

19. Na crkvenom prozoru nalazi se rozeta. Slova R, G i B predstavljaju crvenu, zelenu i plavu boju. Znamo da je za prozor upotrijebljeno 400 cm^2 zelenog stakla. Koliko je cm^2 plavog stakla upotrijebljeno?

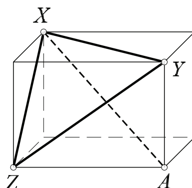


A. 396 **B.** 400 **C.** 120π **D.** $90\sqrt{2}\pi$ **E.** 382

20. Ako su brojevi a i b veći od 1, koji je od sljedećih razlomaka najveći?

A. $\frac{a}{b-1}$ **B.** $\frac{a}{b+1}$ **C.** $\frac{2a}{2b+1}$ **D.** $\frac{2a}{2b-1}$ **E.** $\frac{3a}{3b+1}$

21. Duljine stranica trokuta XYZ su 8 cm, 9 cm i $\sqrt{55}$ cm. Nađite duljinu dijagonale $\overline{XA}$ kvadra na slici.



A. $\sqrt{90}$ cm **B.** 10 cm **C.** $\sqrt{120}$ cm **D.** 11 cm **E.** $\sqrt{200}$ cm

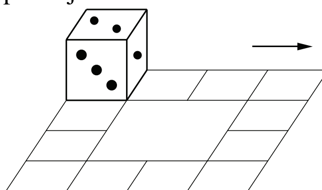
22. Za koliko vrijednosti realnog broja b jednadžba $x^2 - bx + 80 = 0$ ima dva različita, pozitivna, parna, cjelobrojna rješenja?

A. 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 3 **E.** beskonačno mnogo

23. Pero je uklonio jedan broj iz deset uzastopnih prirodnih brojeva. Suma preostalih je 2006. Uklonjeni broj je

A. 218 **B.** 219 **C.** 220 **D.** 225 **E.** 227

24. Kocka se nalazi na početnom polju kao na slici. Koliko puta kocka treba proći stazu da se vrati na početnu poziciju sa svim stranama na početnim mjestima?



A. 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 4 **E.** to je nemoguće napraviti.

⋆ ⋆ ⋆

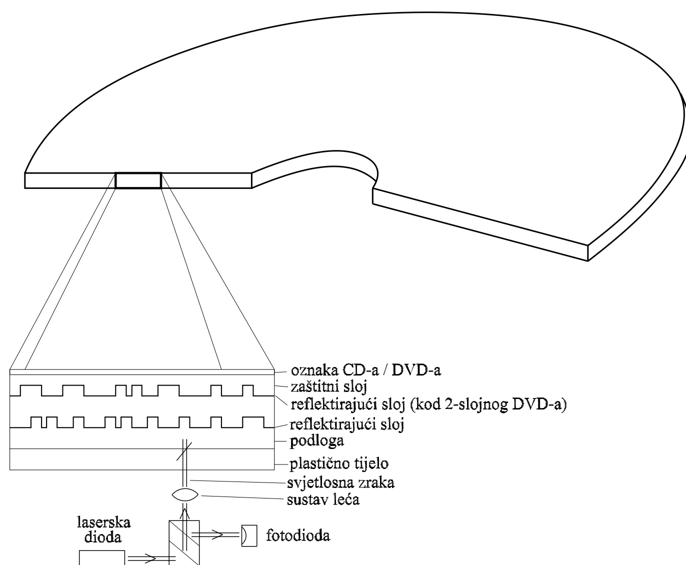
Obavijesti o ovom natjecanju mogu se dobiti na internetskoj stranici
`http://www.math.hr/hmd`.



Trodimenzionalni DVD

Ante Bilušić[1]*, Split*

Godine 1982. predstavljen je prvi komercijalni digitalni zapis zvuka na kompaktni disk (CD, od engl. *Compact Disc*). CD je uveden kao zamjena za tada sveprisutne gramofonske ploče i magnetske kasete, koji su zvuk (i podatke) snimali analognim načinom. Analognom signalu se amplituda mijenja kontinuirano u vremenu, dok je digitalni signal sačinjen od samo dvije moguće amplitude (takozvani *binarni* zapis). Zbog mogućnosti digitalne obrade, binarni zapis pruža mogućnosti kvalitetnijeg zapisa podataka, zvuka ili slike. Kasnije je (sredinom 1990-ih godina) uveden i DVD-standard (od engl. *Digital Versatile Disc* ili *Digital Video Disc*) koji je omogućio zapis mnogo veće količine podataka na ploči jednakih dimenzija.



Slika 1. Presjek CD/DVD-a.

Na slici je prikazan presjek ploče CD/ DVD-a. Podaci su zapisani u sloju s urezanim udubljenjima dubokih oko 100 nanometara (kod CD-a), odnosno 160 nm (kod DVD-a), s jedne strane omeđenim za svjetlost reflektirajućim premazom. Čitaju se fotodiodom, koja bilježi intenzitet interferiranih odbijenih svjetlosnih zraka. Razlika između CD-a i DVD-a je u valnoj duljini korištene svjetlosti: u slučaju CD ona je jednaka 780 nm,

[1] Autor je docent na Fakultetu prirodoslovno-matematičkih znanosti i kineziologije Sveučilišta u Splitu (bilusic@pmfst.hr).

a kod DVD-a 640 nm. Upravo je manja valna duljina razlog zašto na ploču DVD-a možemo snimiti mnogo više podataka nego na ploču CD-a: manja valna duljina znači da se svjetlost sustavom leća može fokusirati na manju površinu, zbog čega su udubljenja na ploči DVD-a uža pa ih na jednaku površinu stane veći broj. Ploče CD-a i DVD-a s mogućnosti višestrukog pisanja i brisanja imaju reflektirajući sloj od materijala koji pod utjecajem svjetlosti mijenjaju koeficijent refleksije svjetlosti. Isto tako, postoje i dvoslojne DVD-ploče (s udvostručenim kapacitetom) koji imaju reflektirajući sloj zapisan u dvije razine do kojih se dolazi nezavisno promjenom fokusne udaljenosti sustava leća.

Koji su budući pravci povećanja gustoće digitalnog zapisa podataka? Prva je mogućnost u daljnjem smanjenju valne duljine svjetlosti, što je postalo dostižno konstrukcijom laserske diode koja emitira plavu svjetlost. Tako je nastao standard "Blu-Ray" (od engl., *Blue Ray*, tj. plava zraka) koji koristi plavo-ljubičastu svjetlost valne duljine 405 nm, čije su ploče kapaciteta 25 GB (odn. 50 GB kod dvoslojnih Blu-Ray-ploča), nasuprot 4.7 GB (8.5 GB) u slučaju DVD-a.

Druga mogućnost leži u mnogoslojnom (odnosno trodimenzionalnom) zapisu podataka. Nedavno su znanstvenici s jednog floridskog sveučilišta predstavili znanstveni rad u kojemu su prikazali obećavajuće rezultate istraživanja konstrukcije trodimenzionalnog DVD-a [2]. Za snimanje podataka služi organska molekula (kompliciranog naziva pa ga ovdje nećemo spominjati!) koja pod utjecajem svjetlosti postaje fluorescentna. Za čitanje podataka se koristi druga organska molekula koja apsorbira svjetlost prve molekule kada je ona u stalnom fluorescentnom stanju te emitira svjetlost druge valne duljine koju potom registrira čitač. Istraživači su pokazali da je moguć zapis u dubinu od oko 500 nm, odnosno barem dvadesetslojni zapis podataka. Ipak, trenutna tehnologija još nije blizu komercijalne uporabe jer se za pisanje i čitanje podataka koriste glomazni i skupi titan-safirni laseri.

Literatura

[1] Bug Online, `http://www.bug.hr/vijesti/index.asp?id=76058`

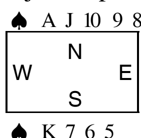
[2] C. C. Corredor, Zhen-Li Huang, K. D. Belfield, *Advanced Materials* **18** (2006) 2910–2914

⋆ ⋆ ⋆



Dobar igrač bridža mora biti u prijateljskim odnosima s matematikom. Koliko je duboko to prijateljstvo?

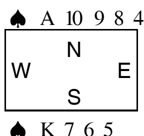
Promotrimo sljedeći problem:



Barem u teoriji, ovom kombinacijom izvođač uvijek može napraviti svih pet štihova — kad bi mu netko prišapnuo je li dama slijeva ili zdesna. U praksi, bez ikakvih dodatnih informacija, igra će teći ovako. U prvom štihu odigrat će visoku kartu, recimo K. Nakon toga se igra karta prema stolu. Kad lijevi protivnik (W) doda kartu, izvođač ima dvije strategije: **a)** odigrati J (*impas*), ili **b)** odigrati A ('u glavu'). Koja je strategija bolja?

Strategija **a)** uspijeva kod kombinacija Q432–, Qxx–x, Qx–xx, Q–432, 432–Q. Strategija **b)** uspijeva kod kombinacija Q432–, Qx–xx, Q–432, xx–Qx, 432–Q. Prema tome, jedina razlika u ove dvije strategije je: prva je dobitna kod rasporeda Qxx-x (apriorna vjerojatnost 18.75%), druga kod rasporeda xx–Qx (apriorna vjerojatnost 20%).

U trenutku odluke, kad je samo jedna karta ostala nepoznata, šanse su 51.6% : 48.4%, i taj mali postotak čini razliku između dobrog i lošeg igrača. Dobar igrač će uvijek odigrati devet karata A, K 'u glavu'. Promijenimo jednu kartu:



Kad izvođač odigra K i oba protivnika dodaju malu kartu, jedina šansa za pet štihova jest razdioba 2-2.

Pretpostavimo da u prvom štihu, na odigranog K, protivnik zdesna (E) doda visoku kartu J. Sad su preostale samo dvije karte, mala karta i Q. Treba li izvođač odigrati u drugom štihu desetku, boreći se protiv kombinacije Q32–J, ili asa, protiv kombinacije 32–QJ? U trenutku kad on treba donijeti odluku, sve su karte vidljive osim Q. Gdje se ona nalazi? Zdesna ili slijeva? U prvom je primjeru ispravna strategija bila odigrati asa, a razlika u postotku vjerojatnosti 3.2%

U ovom je primjeru ispravna strategija odigrati desetku! U trenutku odluke je razlika u vjerojatnosti 65.2% : 34.8%. Prema tome, impas u drugom krugu ima gotovo dvostruko veću vjerojatnost od igre 'u glavu'. Razlog ovom paradoksu je *princip ograničenog izbora*. Igrač koji u listu ima samo J ima *ograničeni izbor*, jer ta karta mora biti odigrana u prvom krugu. Igrač koji posjeduje držanje QJ može u prvom krugu odigrati ili J ili Q. Njegov izbor nije ograničen. Zato, ako se u prvom krugu pojavi J, tad je veća vjerojatnost da se u istom listu ne nalazi Q.

Promotrimo ovu situaciju prema strategiji obrambenog igrača. Na poziciji **E** nalazi se bakica koja od dvije karte *uvijek* prvo baca manju. Ona će iz držanja QJ uvijek odigrati J, pa se na nju princip ograničenog izbora ne može primjeniti. Ispravna strategija izvođača jest: odigrati A u drugom krugu. Ali, ako bakica u prvom štihu odigra Q, tad dečko nije kod nje i impas u drugom krugu je 100% siguran.

Ako se na poziciji **E** nalazi mlad i perspektivan igrač, koji će uvijek odigrati *suprotno očekivanom*, dakle Q iz držanja QJ, onda je strategija ista kao i protiv bakice. Kad takav igrač odigra J, tada Q sigurno nije kod njega. Zato dobar igrač iz držanja QJ igra Q u 50% slučajeva, a J također u 50% slučajeva. Time ne pruža nikakvu informaciju o svom držanju. Lako je zaključiti da će dobar obrambeni igrač, u igri protiv dobrog izvođača uvijek iz držanja QJ osvojiti štih! Matematika radi za njega.

1. U kombinaciji A1098–K765 odigrali ste K i desni protivnik je dodao J. Hoćete li sad odigrati A ili impas (prema desetki)? Kolika je vjerojatnost uspjeha u svakoj od strategija?

2. U kombinaciji AQ9876–K5 odigrali ste K. Lijevi protivnik dodao je 2, a desni 10. Na 5 je lijevi protivnik dodao 3. Hoćete li odigrati A ili 9? Kolika je vjerojatnost uspjeha u svakoj od strategija?

Neven Elezović, Zagreb

Rješenje nagradnog natječaja br. 176

Rješenje. Neka je x broj novčića koje će Marko dati Ivici tokom prvih nekoliko dana. Kako je trebao dobiti još četiri puta toliko, on je ukupno trebao dobiti $5x$ novčića.

Tokom sljedeća dva dana Ivica je trebao dobiti još dva novčića, tj. sveukupno dotad njih $x+2$ i do kraja još $2(x+2)$ novčića. Dakle

$$5x = 3(x+2).$$

Rješenje ove jednadžbe je $x=3$, pa je Ivica ukupno trebao dobiti $5x=15$ novčića.

Knjigom su nagrađeni sljedeći rješavatelji:

1. *Nikolina Artić* (3), SŠ Krapina, Krapina; 2. *Jadran Berbić* (3), Gimnazija Antuna Vrančića, Šibenik; 3. *Igor Boban* (2), III. gimnazija, Split; 4. *Dino Koprivnjak* (1), Opća gimnazija SŠ Valpovo, Valpovo; 5. *Sara Muhvić* (3), III. gimnazija, Osijek; 6. *Vedran Rafaelić* (3), SŠ Vladimira Gortana, Opća gimnazija, Buje; 7. *Vanja Ubović* (1), Gimnazija Petra Preradovića, Virovitica.

Riješili zadatke iz br. 1/225

(Broj u zagradi označava razred–godište srednje–osnovne škole.)

a) Iz matematike: *Ivan Artić* (8), OŠ Augusta Cesarca, Krapina, 3007; *Nikolina Artić* (3), Srednja škola Krapina, Krapina, 3007, 3009, 3018; *Mehmed Brkić* (4), II. gimnazija, Sarajevo, BiH, 3009, 3015, 3019; *Andrija Brlek* (8), OŠ Augusta Cesarca, Krapina, 3007; *Gabrijel Guberović* (2), Gimnazija Nova Gradiška, Nova Gradiška, 3007, 3008; *Elmedina Hodžić* (1), Gimnazija Visoko, Visoko, BiH, 3009; *Petar Kunštek* (1), XV. gimnazija, Zagreb, 3007; *Sara Muhvić* (3), III. gimnazija, Osijek, 3007, 3009, 3015, 3016; *Iva Musa* (4), Gimnazija M. A. Reljkovića, Vinkovci, 3020; *Šimun Romić* (3), Gimnazija Metković, Metković, 3007, 3009, 3013, 3015, 3017, 3020; *Vanja Ubović* (1), Gimnazija Petra Preradovića, Virovitica, 3007.

b) Iz fizike: *Ivan Artić* (8), OŠ Augusta Cesarca, Krapina, 250–253; *Emanuel Guberović* (7), OŠ Ljudevita Gaja, Nova Gradiška, 250–253; *Denis Špiljak* (8), OŠ Augusta Cesarca, Krapina, 250–253; *Katarina Vatavuk* (8), OŠ Fausta Vrančića, Šibenik, 250–253; *Jadran Berbić* (3), Gimnazija Antuna Vrančića, Šibenik, 1343, 1345, 1346; *Gabrijel Guberović* (2), Gimnazija Nova Gradiška, Nova Gradiška, 1343, 1345, 1346; *Petar Kunštek* (1), XV. gimnazija, Zagreb, 1343, 1345, 1346; *Iva Musa* (4), Gimnazija M. A. Reljkovića, Vinkovci, 1343, 1345, 1346; *Vanja Ubović* (1), Gimnazija P. Preradovića, Virovitica, 1343, 1345, 1346.

Nagradni natječaj br. 178

Nađi sve proste brojeve p i q za koje će rješenja kvadratne jednadžbe

$$px^2 + pqx + q = 0$$

biti cijeli brojevi.

MATEMATIČKO–FIZIČKI LIST (MFL) za učenike i nastavnike.
Izlazi u četiri broja tokom školske godine. Izdaju:
HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO i HRVATSKO FIZIKALNO DRUŠTVO
Pretplata za 2006./ 2007. je 60 kuna, pojedini broj stoji 15 kuna.
Za inozemstvo pretplata je 16 EUR, a pojedini broj 4 EUR.
(Uplata se može obaviti u kunama ili devizama po tečaju u trenutku plaćanja.)
Adresa lista je: "Matematičko–fizički list, Ilica 16/ III, 10001 Zagreb,
tel./ fax (01) 4833-891.
Uplate na žiro račun: *Hrvatsko fizikalno društvo,* Zagreb, br. 2360000-1101301202 (kune),
ZBZ d.d. SWIFT ZABA HRXX 70313-978-3239853 (EUR).
Na uplatnici kao svrhu uplate molimo naznačite "za MFL"!
Molimo Vas da kod svake uplate pošaljete (foto)kopiju uplatnice
ili da nas obavijestite telefonom ili elektronskom poštom o uplati.
URL: http:/ / www.math.hr/ mfl

SADRŽAJ

List financijski pomaže Ministarstvo znanosti, obrazovanja i športa Republike Hrvatske.

Slog i prijelom: Element, Zagreb, Menčetićeva 2
Tisak: Sveučilišna tiskara d.o.o., Zagreb, Trg maršala Tita 14
Naklada ovog broja 4000 primjeraka

Slika na naslovnici predstavlja građu unutrašnjosti Zemlje: *Mohorovičićev diskontinuitet* postoji svuda na Zemlji i najveća je prirodna tvorba na našem planetu. Prosječna mu je dubina 33 km. Ispod oceana kora je najtanja (5–10 km), dok ispod najviših planina doseže debljinu od 70-ak km. U Hrvatskoj najdublji je ispod Velebita i Dinare (oko 42 km), a najplići ispod južnog Jadrana i istočne Slavonije (25 km).

Dragi čitatelji!

Ove godine obilježavamo 150-godišnjicu našeg, u svijetu poznatog meteorologa, seizmologa i geofizičara, Andrije Mohorovičića, čiji je znanstveni doprinos u tim područjima značajan. Njegov doprinos znanosti obilježen je njegovim imenom jednog kratera na nevidljivoj strani Mjeseca, granice između kore i plašta Marsa, kao i jednog asteroida. O tome možete saznati više u prilogu redovitog člana Hrvatske akademije znanosti i umjetnosti (HAZU), profesora emeritus Geofizičkog odsjeka PMF-a u Zagrebu, Dragutina Skoka.

Ima i više priloga iz matematike. Profesor u mirovini, Neven Bogdanić, dao je mali prikaz matematičkih disciplina iz kojeg se vidi kako je ona postala nesagledivo opsežna i iz dana u dan se sve više razgranjuje. Mirko Radić, profesor emeritus na Filozofskom fakultetu u Rijeci piše o tetivnom i tangencijalnom četverokutu i nekim njegovim zanimljivim svojstvima, a na kraju je veći broj zadataka za samostalno rješavanje. Iako je Pitagorin teorem dobro poznat učenicima još iz osnovne škole, profesor Šefket Arslanagić iz Sarajeva i sada pronalazi nove zanimljivosti o njemu. U članku, Singularna dekompozicija matrica reda 2, Vida Zadelj-Martić s Geodetskog fakulteta u Zagrebu, koristi matrice reda 2 da bi ilustrirala računski postupak za računanje singularne dekompozicije matrice.

Dario Hrupec s Instituta "Ruđer Bošković" ima zanimljiv prilog "Astrobiologija, znanost o izvanzemaljskom životu". Iako do sada nije dokazano postojanje izvanzemaljskog života, najavljuje se važnost stvaranja preduvjeta za širenje čovječanstva izvan planeta Zemlje, a to bi bilo važno ostvariti prije nego što Zemlja prestane biti pogodna za život. Vinko Zlatić također s Instituta "Ruđer Bošković" u rubrici *Novosti iz znanosti* osvrće se na "Klase modularnih kompleksnih mreža".

U rubrici *Iz moje radionice i laboratorija* Lana Ivanjek s Prirodoslovno-matematičkog fakulteta u Zagrebu u prilogu, Jednostavni pokusi koji demonstriraju tlak zraka, opisuje tri jednostavna pokusa s balonom i plastičnom bocom.

Na prvoj središnjoj strani lista slikama je prikazana posjeta učenika Požeške gimnazije tradicionalnom "Otvorenom danu Instituta za fiziku", šestom po redu, danu kada znanstvenici Instituta otvaraju svoje laboratorije za posjetitelje, prvenstveno učenike. Druga središnja strana lista, prati slikom posjet studenata fizike Sveučilišta "Josip Juraj Strossmayer" u Osijeku, *Memorijalnim prostorijama* Andrije Mohorovića na Geofizičkom odsjeku PMF-a u Zagrebu.

Uz još nekoliko zanimljivih priloga u ovom broju lista zadnja strana omota je posvećena Otonu Kučeri, profesoru, prirodoslovcu, astronomu i promicatelju prirodnih znanosti, čiju 150-tu obljetnicu rođenja upravo slavimo.

Uredništvo lista



Matematičke discipline

Neven Bogdanić, Split

Matematika, koja je bez sumnje nastala proučavanjem brojeva i geometrijskih odnosa, sastoji se od mnoštva disciplina i grana[1]. Osnovne matematičke discipline su: **aritmetika**, **algebra**, **geometrija**, **teorija brojeva**, **matematička analiza**, **matematička logika**, **teorija skupova**, **teorija vjerojatnosti**, **matematička statistika**, **topologija**, **kombinatorika**, **infinitezimalni račun**, **teorija grafova**, **računarstvo** i drugo.

Aritmetika je matematička grana koja se bavi brojevima, ponajviše prirodnim, cijelim i racionalnim brojevima. Tijekom povijesnoga razvoja njezine su se granice često presijecale s algebrom i matematičkom analizom. Obično se dijeli na *praktičnu* i *teorijsku* aritmetiku. Prva obuhvaća govornu i pisanu numeraciju, predstavljanje razlomaka i operativne tehnike koje se odnose na četiri osnovne računske operacije: zbrajanje, oduzimanje, množenje i dijeljenje. Govorne numeracije prisutne su kod svih naroda iz najstarijih epoha. Već je Aristotel (384. – 322. pr. Krista) uočio da je većina naroda računala s dvanaesticama. No, u grčkom jeziku nalaze se ostaci baze 5, u francuskom baze 20. Pisana egipatska numeracija zasnovana je na bazi 10.

Veliki napredak aritmetika je doživjela kad su Indijci otkrili dekadski pozicijski zapis i nulu. Aritmetika, koju je Gauss nazvao *kraljicom matematike*, u današnje se vrijeme bavi algebarskim brojevima, ali i s apstraktnim matematičkim strukturama. Pojam i naziv uveli su još davno pitagorejci (sljedbenici Pitagore, oko 6. st. pr. Krista). Osnovni pojam njihove filozofije bio je broj. Govorili su: *Daj nam svoj blagoslov, božanstveni broju...*

Algebra je matematička disciplina koja se u svojim operacijama (algebarske operacije) koristi općim brojevima, pa se kaže da je grana matematike koja se bavi općim brojevima. Točnije: algebra proučava algebarske strukture. Moderna algebra čini veliko područje matematike, koje je u početku bilo samo dio praktične aritmetike i osnovnih logičkih zaključivanja.

Prije nego što je nastao izraz algebra, razvila se tehnika rješavanja problema, koja je kasnije omogućila rješavanje jednadžbi različitih stupnjeva (teorija jednadžbi).

Geometrija je matematička disciplina koja strogo proučava prostor i oblike (likove i tijela). Bavi se prostornim odnosima i oblicima. Osnovni geometrijski pojmovi su: točka, pravac, ravnina, prostor. Podskupovi ravnine su *geometrijski likovi*, naprimjer: trokut, četverokut, kvadrat, paralelogram, mnogokut, krug,... Podskupovi prostora su *geometrijska tijela*, naprimjer: tetraedar, kocka, valjak, stožac, kugla,...

U etimološkom smislu, riječ geometrija znači "mjerenje Zemlje" ("zemljomjerstvo"), ali je još rano poprimila vrlo široko značenje, pa je kod grčkih klasika predstavljala gotovo cjelokupnu matematiku. Mnogi rezultati iz aritmetike i algebre najprije su nađeni

[1] Riječi "disciplina" i "grana" ovdje se rabe u smislu veća ili manja matematička cjelina, odnosno dio matematike veći ili manji koji tvori cjelovitost.

geometrijskim metodama, recimo: rješenje kvadratne jednadžbe, Euklidov algoritam itd. B. Pascal (17. st.) je kazao, da je "predmet čiste geometrije prostor čiji su elementi nazvani točkama".

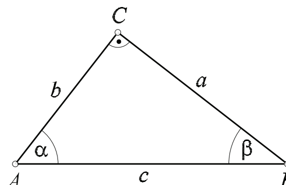
Geometrija je prva matematička disciplina, odnosno znanstvena disciplina uopće, koja je aksiomatizirana (Euklid, oko 340. – oko 287. god. pr. Krista; Hilbert, 1862. – 1943.).

U sadašnjem stanju povijesnih saznanja nisu nam dostupni sigurni niti precizni podaci o postojanju prave geometrije prije pojave velikih civilizacija u dolini Nila ili Mezopotamiji.

Iz Euklidove su geometrije nastale kasnije, u novije vrijeme (17. – 20. st.) razne druge geometije, čak matematička analiza i topologija. Neke od tih geometrija su: *planimetrija* – grana geometrije koja se bavi geometrijskim likovima u ravnini, *stereometrija* – grana geometrije koja proučava geometrijska tijela, *trigonometrija* – grana geometrije u kojoj se pomatraju odnosi među stranicama i kutovima trokuta s pomoću *trigonometrijskih funkcija*: *sinus* (sin), *kosinus* (cos), *tangens* (tg) i *kotangens* (ctg), te *sekans* (sec) i *kosekans* (cosec). Dijeli se na *ravninsku trigonometriju*, ako je trokut u ravnini i na *sfernu trigonometriju*, ako je trokut na sferi, tj. ako ga čine velike kružnice sfere. Razvoj trigonometrije bio je vezan uz astronomiju. O tomu govori i činjenica, da je vremenski prije nastala i razvila se sferna nego ravninska trigonometija.

Trigonometrijske funkcije (kružne ili cirkularne funkcije) kutova (pravokutnog) trokuta određuju se omjerima mjernih brojeva odgovarajućih stranica. Za pravokutni trokut ABC (vidjeti sliku) vrijede ove defnicije:

$$\sin\alpha = a : c, \qquad \cos\alpha = b : c,$$
$$\operatorname{tg}\alpha = a : b, \qquad \operatorname{ctg}\alpha = b : a,$$
$$\sec\alpha = c : b, \qquad \operatorname{cosec}\alpha = c : a.$$



Trigonometrijske funkcije puno se koriste u tehnici i prirodnim znanostima.

Nakon razvoja u indijskoj i arapskoj matematici trigonometija do 15. st. prelazi u Europu.

Analitička geometrija – dio geometrije u kojemu se geometrijski problemi rješavaju algebarski s pomoću koordinatnog sustava. Naprimjer, u analitičkoj se geometriji točka u ravnini predočuje uređenim parom realnih brojeva, pravac linearnom jednadžbom s dvije nepoznanice, krivulje raznim jednadžbama (algebarskim, transcendentnim) itd. Točka u prostoru predočuje se uređenom trojkom realnih brojeva, pravac – kao presjek dviju ravnina, sustavom dviju linearnih jednadžbi s tri nepoznanice itd. Zato govorimo o analitičkoj geometriji *u ravnini* i onoj *u prostoru*.

Inspirirajući se stavovima Viètea i Fermata, te manjim dijelom Robervala, stvara se oko 1630. god. analitička geometrija čijim se osnivačem smatra veliki francuski matematičar René Descartes (lat.: Cartesius; po ovom se imenu i danas koordinatni sustav naziva Kartezijev). Descartes, u filozofiji poznat kao začetnik racionalizma, držao je da se svaki matematički problem može svesti na algebarski jezik; a to će reći, riješiti metodama analitičke geometrije.

Projektivna geometrija – dio geometrije u kojem se proučavaju svojstva tvorevina koje se pri projiciranju ne mijenjaju.

Nacrtna geometrija (*deskriptivna geometrija*, *deskriptiva*) – dio geometrije u kojem se obrađuju metode nacrtnog prikazivanja prostornih objekata s pomoću projekcija.

Sintetička geometrija – grana geometrije koja koristi teoreme i sintetička zapažanja za izvođenje zaključaka, nasuprot analitičkoj geometriji koja koristi algebru u rješavanju geometrijskih problema. Svoj procvat doživjela je u 19. st., kada su se metode zasnovane na koordinatama ponešto ignorirale od nekih tada poznatih geometara (Jakob Steiner). Danas postoje i podgrane sintetičke geometrije: sintetička računska geometija i sintetička diferencijalna geometija.

Neeuklidske geometrije – geometrije u kojima ne vrijedi peti Euklidov aksiom (postulat) o usporednicama.

Diferencijalna geometrija – matematička disciplina u kojoj se istražuju svojstva krivulja i površina s pomoću diferencijalnih jednadžbi i diferencijalnog i integralnog računa.

Fraktalna geometrija – geometrija prirodnog svijeta, svijeta životinja, biljaka i minerala. Začetnik joj je Benoit Mandelbrot (rođ. 1924., Varšava). Fraktalna geometrija zrcali nepravilne ali stvarne oblike prirode, a ne idealizirane likove euklidske geometrije.

Digitalna geometrija – geometrijska disciplina koja se bavi gemetrijskim svojstvima podskupova digitalnih slika, aproksimacijom geometrijskih obilježja objekata i skupovima rešetkastih točaka (koji su također izučavani u okviru teorije brojeva; Gauss). Njezini matematički korijeni nalaze se u teoriji grafova i diskretnoj topologiji; ova je geometrija nastala s pojavom kompjutorskih tehnologija u drugoj polovici 20. stoljeća.

Digitalna geometrija je usmjerena prema aplikacijama; definira se zapravo kao teorija n-dimenzionalnih digitalnih prostora (ćelijski ili prostori rešetkastih točaka). Digitalizacije na pravilnim rešetkama (*regular grids*) često se koriste kod numeričkog računanja u tehnici i uopće znanosti. Danas su zamjetna nastojanja kako bi digitalna geometrija postala digitalizirana Euklidova geometrija.

Teorija brojeva je dio aritmetike koji se bavi cijelim brojevima. Ovu su matematičku disciplinu utemeljili pitagorejci. Veliki doprinos razvoju teorije brojeva dali su Fermat u 17. st., te Euler i Lagrange u 18. st. Osnivač moderne teorije brojeva je Gauss.

Matematička analiza je grana matematike koja proučava realne funkcije realne varijable. Osnovna sredstva matematičke analize su: *limes*, *derivacija*, *integral*, *razvoj u red.*

Matematička logika je dio matematike nastao razvojem formalne logike[2] uz dosljednu primjenu sustava simbola.

U antici je Aristotel prvi ukazao na potrebu objašnjenja i sustavnog izlaganja određenog broja logičkih načela i postupaka. Premda logika prati matematiku od njezinih početaka, tek se od 1850. g. kao znanstvena disciplina udaljava od filozofije i teži da postane matematička znanost. Naime, uvođenjem algebarskog tretiranja logike 1847. g. (Boole i De Morgan, krajem 19. st. i Frege) ostvaruje se prava matematizacija ove discipline, koju je Leibniz već bio predvidio.

Logika (matematička) 20. stoljeća postaje veoma važna, ne samo u teorijskoj matematici, nego i u njenim primjenama. Danas je matematička logika temelj kibernetike[3] i informacijske znanosti[4]

---

[2] **Logika** je filozofska disciplina koja ispituje oblike, zakonitosti i uvjete razložitih i ispravnih misli i opće metode spoznaje istine.

[3] **Kibernetika** je znanost (matematička teorija) koja istražuje opće zakoniosti procesa upravljanja i veza u bilo kojim sustavima (tehničkim, biološkim, ekonomskim, socijalnim, administrativnim i dr.), radi uspostavljanja komunikacije među njima, kao i njihove kontrole. Ovu je znanost utemeljio 1948. Nobert Wiener (1894. – 1964.), jedan od najzapaženijih američkih matematičara 20. st.

[4] **Informacijska znanost** je znanost o učinkovitom prikupljanju, spremanju i ponovnom dobivanju spremljenih informacija. (Treba je razlikovati od **informatike**, koja je znanost o elektroničkim računalima, računalnim sustavima i zakonitostima u obradbi i protoku podataka i obavijesti, te o teoriji informatičke djelatnosti.)

Teorija skupova dio je matematike u kojem se proučavaju strukture i svojstva skupova. (Skup se ne definira, spada u osnovne matematičke pojmove; npr. skup učenika jednoga razreda, skup neparnih brojeva, skup točaka neke dužine itd.). Premda se elementi ove teorije naziru u najranijim počecima matematike, teorija skupova utemeljena je radovima matematičara 19. st. Češki filozof i matematičar Bernard Bolzano (1781. – 1848.) svojim djelom *Paradoksi beskonačnog*, 1851. (u kojem definira beskonačan skup kao skup ekvivalentan svom pravom dijelu) prethodi otkrićima u teoriji skupova Georgu Cantoru (1845. – 1918.), koji doista u drugoj polovici 19. st. teoriju skupova izgrađuje kao modernu matematičku teoriju. (Djelo: *Osnove jedne opće znanosti o mnogostrukosti*, 1883.)

Važnost teorije skupova razabire se po tomu što su kazali burbakisti[5]: *Danas mi znamo, govoreći logički, da je moguće izvesti svu suvremenu matematiku iz jedinog izvora – teorije skupova.*

Teorija vjerojatnosti je matematička disciplina koja ispituje i proučava pravila i zakone slučajnih pojava, naročito vjerojatnost događaja. Početak svojega ozbiljnijeg razvoja duguje hazardnim igrama, čiji su se problemi počeli matematički tretirati tek u 16. st. (Tartaglia, Cardano). U znanstvenom smislu, međutim, počela se oblikovati u drugoj polovici 17. st.

U prvim počecima razvoja ove teorije iskristalizirali su se neki osnovni pojmovi i zakoni, kao *pojam vjerojatnosti*, *matematičko očekivanje*, *teorem adicije* i *teorem multiplikacije* (Pascal, Fermat, Huygens). Proučavanju graničnih teorema i zakona velikih brojeva mnogo su doprinijeli J. Bernoulli, Moivre, Laplace, Gauss, Borel...; napredak teorije slučajnih ili stohastičnih procesa vezan je uz imena *Čebiševa*, *Moivrea*, *Ljapunova*.

Otkako je u 20. st. aksiomatizirana (Mises, Kolmogorov), teorija vjerojatnosti u novije vrijeme postaje moderna apstraktno-deduktivna matematička disciplina (Poincare, Feller, Fisher, Cramer, Hinčin i drugi), koja rješava ne samo teorijski razne probleme suvremene nauke, već izučava i mnogobrojne zakonitosti praktičnog života.

Matematička statistika je matematička disciplina koja se temelji na teoriji vjerojatnosti. To je ustvari proučavanje zasnovano na numeričkom istraživanju, ispitivanju i upoznavanju prvenstveno masovnih pojava. Iako je u početku statistika služila samo državi za prikupljanje podataka o svojim podanicima (broj muškaraca, žena i djece, zanimanje stanovnika, njihovo vjersko opredjeljenje i sl.), za ispitivanje upravnog, gospodarskog i uopće socijalno-političkog stanja, danas obuhvaća razne probleme organizacije i tehnike prikupljanja informacija, klasifikacije, tabeliranja i izračunavanja raznih podataka. Statističke metode se primjenjuju u ekonomskim i društvenim znanostima, u meteorologiji, biologiji, genetici, fizici i kemiji, astronomiji, filologiji i psihologiji, medicini, poljoprivredi, tehnici itd.

Probleme naseljavanja, rađanja i umiranja matematički obrađuje već škotski matematičar i pjesnik John Arbuthnot (1667. – 1735.). Inače, s napretkom teorije vjerojatnosti u 18. i 19. st. napreduje i jača matematička statistika, iz koje se uz pomoć vjerojatnosti tijekom i nakon II. svjetskog rata razvila teorija informacija.

Topologija je vrlo važna grana matematike; proučava neprekinutost; odnosno svojstva geometrijskih tijela koja se ne mijenjaju pri kontinuiranim transformacijama ili deformacijama. Nastala je rješavanjem nekih pojedinačnih problema (problem königsberških mostova, problem četiriju boja) koji su se pojavili u 18. st.

[5] **Bourbaki** – grupa francuskih matematičara osnovana 1937.

B. Riemann, koji je sustavno rješavao topološke probleme, definirao je topologiju kao istraživanje svojstava prostora koja ostaju invarijantna uz homeomorfne transformacije. Sa sastajališta topologije ne razlikuju se bilo koji kvadrat od bilo koje kružnice ili od bilo koje elipse. Naziv se prvi put spominje 1847. g. (J. B. Listing). Daljnji razvoj topologije vezan je uz teoriju skupova, teoriju realnih brojeva i istraživanja funkcija realne varijable.

Kombinatorika je dio matematike koji se bavi izučavanjem konačnih skupova. U kombinatorici se uglavnom rješavaju problemi koji se svode na efektivno konstruiranje funkcija određenog tipa (*permutacija, varijacija*, *kombinacija*) s jednog konačnog skupa u (odnosno na) drugi konačni skup i određivanje broja svih takvih funkcija. Kako su njezini počeci vezani uz razvoj društvenih igara (kocka, karte), ova matematička disciplina potječe iz davnine, jer je kocka bila poznata drevnim civilizacijama Indije, stare Grčke i Egipta. (Najstarije "kocke" za igranje pronađene u Indiji stare su čak blizu šest tisuća godina.)

Nakon što u Europu kombinatoriku uvodi Paul Guldin (1557. – 1643.) svojim radom iz 1622. g., njezinom su napretku kasnije doprinijeli poznati matematičari: Leibniz, J. Bernoulli i Euler. Razvojem nekih novijih matematičkih disciplina, posebno povećanjem interesa za probleme diskretne matematike uopće, kombinatorika brzo napreduje. Osim što se dosta primjenjuje u vjerojatnosti i statistici, koristi se također u linearnom programiranju, dešifriranju kôdova, pitanjima transporta, teoriji informacija itd.

Infinitezimalni račun matematička je disciplina koja se sastoji iz dva dijela: *diferencijalnog računa* i *integralnog računa*; oba ova dijela čine jedinstvenu cjelinu.

Diferencijalni račun dio je matematičke analize koji se bavi *derivacijama funkcija* i *njihovim primjenama*. Premda se elementi ovoga računa pojavljuju u 17. st. (Fermat), drži se da su osnivači te, neobično važne, matematičke grane Leibniz i Newton. Od Leibniza potječu nazivi: *funkcija*, *koordinata*, *varijabla* itd.; osim što je uveo oznaku dx za beskonačno mali prirast varijable, daje elementarna pravila diferenciranja zbroja, umnoška i kvocijenta varijabli. Newton je razvio dosta funkcija u red potencija, po njemu se nazivaju mnogi teoremi i razne metode u matematici. Strogo zasnivanje ove discipline počelo je s Cauchyjem, a završilo s Weierstrassom krajem 19. st.

Integralni račun dio je matematičke analize koji se bavi *integralom funkcija* i *njegovom primjenom*. Premda su rudimente integralnog računa nazirali drevni matematičari (Eudokso, Euklid, Arhimed), ipak se ova matematička disciplina teorijski razvija tek u 17. st. (Leibniz i Newton) u vezi problema određivanja površine (ploštine) i obujma (volumena).

Teorija grafova kao posebna matematička disciplina počela se razvijati posljednjih desetljeća. To je disciplina iz diskretne i kombinatorne matematike, kojoj je bitna značajka geometrijski pristup u ispitivanju apstraktnih modela. *Graf* je osnovni objekt proučavanja ove teorije, a jednostavno rečeno, sastoji se od *vrhova* (čvorova) i njihovih *spojnica* (bridovi grafa); prikazuje se obično crtežom u ravnini. No, problemi vezani uz grafove javili su se već prije dva i više stoljeća. Prvi takav zadatak, poznat pod imenom *Problem königsberških mostova*, riješio je Euler god. 1736. Od drugih problema koji su potakli razvoj teorije grafova spominjemo: *Problem osam kraljica* na šahovskoj ploči ("Može li se na šahovsku ploču postaviti osam kraljica tako da jedna drugu ne napada, i – ako može, na koliko je to načina moguće učiniti?"), *Problem puta oko svijeta*, *Problem četiriju boja, Problem transporta* i dr.

Teorija grafova našla je danas svoju primjenu ne samo u matematici (kombinatorika, linearna algebra i topologija), već i u elektrotehnici (G. Kirchoff), kemiji (A. Cayley, G. Pólya i dr.), fizici, geodeziji i ekonomskim znanostima, sociologiji i biologiji,

prometu itd. Plodonosne su dakako primjene ove teorije i u optimizaciji te računarskim znanostima. U optimizaciji se uspješno rješavaju problemi, kao: *Problem najkraćeg puta*: "U zadanoj željezničkoj ili cestovnoj mreži kojom su povezani neki gradovi treba odrediti najkraći put između dva zadana grada iz mreže". Grafovi se također korisno apliciraju u računarstvu, npr. za različita pretraživanja, strukture podataka, sortiranja, u kodiranju i dr.

Prvu monografiju iz teorije grafova objavio je D. König 1936. Međutim, najsnažniji zamah i procvat teorije grafova započinje u pedesetim godinama 20. st.

Računarstvo[6] je znanost o računanju i obradbi podataka. Bavi se proučavanjem prikaza, strukturiranja i obradbe informacija, algoritamskim procesima, računalnim sklopovljem i programskom opremom. Temelji se na: algoritamskom izračunavanju, Booleovoj algebri (algebri skupova), diskretnoj matematici, vjerojatnosti, statistici i teoriji informacija.

Kako se računarstvo zasniva na matematičkim disciplinama, ono je svakako dio matematike. Ali budući da znatnim dijelom zadire u tehničke znanosti, računarstvo je i dio (polje) tehničkih znanosti u kojemu su sadržane ove znanstvene grane: *arhiktetura računalnih sustava, informacijski sustavi, obradba informacija, umjetna inteligencija, procesno računarstvo.*

Računalna matematika se danas intezivno razvija usporedo s brzorastućim primjenama elektroničkih računalnih strojeva. Radi velike povezanosti između teorije i prakse, u

---

[6] Kako je riječ *računarstvo* vjerojatno izvedenica od riječi *računalo*, onda bi možda bilo bolje kazati **računalstvo** (nego **računarstvo**). No, poštujmo najnoviju terminologiju, kojom se koristi naše Ministarstvo znanosti, obrazovanja i športa. Usput recimo:

1. U *Rječniku hrvatskoga jezika* (gl. urednik: Jure Šonja), nakl. Leksikografski zavod *Miroslav Krleža* i Školska knjiga, Zagreb, 2000. uopće ne postoji natuknica **računarstvo**.

2. No, u spomenutom *Rječniku* stoji (str. 1027): **računalstvo** – znanost o računalima i programskoj opremi.

3. Dalje u istom *Rječniku* (str. 1027) stoji za natuknicu **računalo** – I. naprava s kuglicama za učenje računanja u početnim razredima pučke škole, II. pomagalo za računanje i obradu brojčanih podataka: *logaritamsko računalo*, III. elektronički uređaj za obradu podataka koji prihvaća naredbe i podatke, obavlja nad njima programirane radnje i ispisuje tražene podatke radi daljnje uporabe; kompjutor: *digitalno računalo*.

U *Matematičkom rječniku* od Ivice Gusića (str. 201), nakl. Element, Zagreb, 1995., između ostaloga, stoji pod natuknicom **računalo**: ... Sadašnje je računalo (očito se misli na elektroničko) visokorazvijena verzija elektroničnog računala, što ga je 1946. konstruirao John von Neumann s grupom inženjera (bilo je teško oko 30 tona i zauzimalo 200 m^2 površine... Naziv *kompjutor* je iz engl. *computer*. Postoje i džepna računala (računalice) – *kalkulatori* (*calculator*)...

U *Hrvatskom Općem Leksikonu* (gl. urednik: August Kovačec), nakl. Leksikografski zavod *Miroslav Krleža*, Zagreb, 1996. na str. 816 piše: **računalo**, pomagalo za računanje; mehaničko računalo (abak, logaritamsko računalo), elektromehaničko računalo, a danas u prvom redu elektoničko računalo (→ kalkulator, elektroničko računalo). U istoj knjizi na str. 435 stoji: **kalkulator** (engl. prema lat.), jednostavno pomaganje za računanje, danas redovito elektronično. Dalje na str. 239 čitamo: **elektroničko računalo**, (kompjutor, prema lat. computator, ili kompjuter, prem engl. computer), elektronički uređaj za primanje, odradbu i prikazivanje podataka. Osnova elektroničkog računala su sklopovska oprema i programska podrška. Poznatije vrste: superračunalo, mikroračunalo, osobno računalo.

Isto tako, u *Rječniku* J. Šonje (str. 1027.) stoji za natuknicu **računalni** – koji se odnosi na računalo; kompjutorski: *računalni program, računalna obradba podataka, računalna metoda, računalni sustav* koji se sastoji od programske opreme, sklopovlja i ljudske podrške, a služi za složene obradbe podataka; *računalni virus* program napravljen radi otežavanja rada drugim programima i uništavanja podataka, a ima mogućnost proširenog djelovanja izvan okoline u kojoj se prvi put pojavi.

4. U *Rječniku* J. Šonje (str. 1027) stoji za natuknicu **računar** – čovjek koji računa; računarac.

Dodajmo da u *Hrvatskom pravopisu* autora Babić-Finka-Moguš (tzv. "londoncu"), nakl. Školska knjiga, Zagreb, 1971. na str. 270 za **računar** stoji isto objašnjenje.

naše je doba nemoguće razdvajati teorijsku od primijenjene matematike. Suvremene i vrlo apstraktne matematičke discipline: matematička logika i apstraktna algebra su siguran posrednik između čovjeka i raznih složenih automata, zapravo elektroničkih računala. Pokazalo se da se primjenama matematičke logike i apstraktne algebre u teoriji elektroničkih računala i automata uopće može postići materijalizacija najapstraktnijih analitičkih relacija i da se problemi stvarnih konstrukcija vrlo zamršenih automata uspješno rješavaju uz pomoć najmisaonijih matematičkih istraživanja.

Od mnogobrojnih matematičkih zasebnih cjelina, odnosno disciplina, relevantnih u aplikativne svrhe, zanimljivih za tehničku primjenu, važne su također ove discipline: *diferencijalne jednadžbe, obične i parcijalne*, *integralne jednadžbe*, *linearne integralne transformacije*, *nomografija*, *numeričke metode*, *račun diferencija*, *redovi*, *teorija integracije i mjere*, *teorija operatora i funkcionalna analiza*, *teorija potencijala*, *vektorski i tenzorski račun*, *stohastički procesi* i drugo.

⋆ ⋆ ⋆

Kažimo na kraju da se na osnovi Zakona o znanstvenoj djelatnosti i visokom obrazovanju ("Narodne novine", broj 123/ 03, 198/ 03, 105/ 04, 174/ 04) Ministarstva obrazovanja, znanosti i športa RH znanost (sveukupna znanost) dijeli (klasificira) na **područja** (*znanstvena područja*), područja se dijele na **polja** (*znanstvena polja*), a polja se dijele na **grane** (*znanstvene grane*). Suradnjom znanstvenika i znanstvenih organizacija iz više različitih znanstvenih područja, polja i grana uspostavljaju se *interdisciplinarna područja*. (Za sve vrste umjetnosti utvrđuje se također posebno *umjetničko* **područje**, koje se dijeli na **polja**, a ova se opet dijele na **grane**.)

Po citiranom Zakonu znanstvena područja su: *prirodne znanosti*, *tehničke znanosti*, *biomedicina i zdravstvo*, *biotehničke znanosti*, *društvene znanosti*, *humanističke znanosti*.

Svako se od ovih *područja* dijeli onda na *polja*, a polja se dalje dijele na *grane*. Npr., u *područje* prirodne znanosti spadaju ova *polja*: biologija, fizika, geoznanosti, kemija i matematika. *Polju* matematika pripadaju ove *grane*: *algebra*, *geometrija i topologija*, *kombinatorna i diskretna matematika*, *matematička analiza*, *matematička logika i računarstvo*, *numerička matematika*, *primijenjena matematika i matematičko modeliranje*, *teorija vjerojatnosti i statistika* i ostalo.

Današnja podjela matematike, međutim, prema međunarodnom časopisu *Mathematical Reviews* sadrži 70-ak većih zasebnih cjelina (disciplina odnosno grana), koje se nižu ovim redom[7]: *općenito o matematici* (*General*), *povijest i biografije* (*History and biography*), *logika i osnove matematike* (*Logic and foundations*), *teorija skupova* (*Set theory*), *kombinatorika i teorija grafova* (*Combinatorics, graph theory*), *uređaj, rešetke i uređene algebarske stukture* (*Order, lattices, ordered algebraic structures*), *opći matematički sustavi* (*General mathematical systems*), *teorija brojeva* (*Number theory*). . . .

Svaka se od ovih većih zasebnih matematičkih cjelina dijeli na manje. Tako su npr. u *teoriji brojeva* manje njezine cjeline (poddiscipline odnosno podgrane): elementarna teorija brojeva, diofantske jednadžbe, forme, automorfna teorija, geometrija brojeva, vjerojatnosna teorija brojeva, nizovi brojeva, racionalna aritmetika algebarskih brojeva, algebarska teorija brojeva i dr.

Matematika je u naše vrijeme postala nesagledivo opsežna, iz dana u dan se sve više razgranjuje i u svim svojim dijelovima produbljuje; uostalom, kao i druge znanosti. Zbog mnoštva činjenica kojima se matematička znanost neprestano obogaćuje, specijalist-matematičar jedva može pratiti dostignuća vlastite discipline. U pojedinim poddisciplinama svoje specijalnosti gotovo da nije u stanju slijediti niti naslove u kojima se govori o novim postignućima.

---

[7] Vidjeti I. Gusić: *Matematički rječnik* (str.142), Element, Zagreb, 1995.

O četverokutu koji je i tetivni i tangencijalni, Fussova relacija i Ponceletov teorem zatvaranja

Mirko Radić[1], *Rijeka*

Za četverokut kojemu se može opisati kružnica kaže se da je *tetivni*, a za četverokut kojemu se može upisati kružnica kaže se da je *tangencijalni*. Četverokut kojemu se može opisati i upisati kružnica kraće se zove *bicentrički* četverokut. U ovom će članku biti riječi o nekim zanimljivim i važnim svojstvima bicentričkog četverokuta.

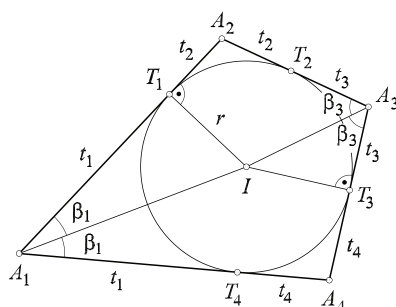
Teorem 1. Neka je $A_1A_2A_3A_4$ bilo koji zadani tangencijalni četverokut i neka su t_1, t_2, t_3, t_4 duljine njegovih tangenata, tj.

$$|A_1A_2| = t_1 + t_2, \quad |A_2A_3| = t_2 + t_3, \quad |A_3A_4| = t_3 + t_4, \quad |A_4A_1| = t_4 + t_1. \tag{1}$$

Polumjer kružnice upisane četverokutu $A_1A_2A_3A_4$ označen je s r, a s I je označeno središte te kružnice. Ako vrijede jednakosti

$$t_1t_3 = r^2, \qquad t_2t_4 = r^2, \tag{2}$$

tangencijalni četverokut $A_1A_2A_3A_4$ je i tetivni.



Slika 1.

Dokaz. Kao što je poznato, četverokut je tetivni ako mu zbroj dvaju nasuprotnih kutova iznosi $180°$. Dakle, da bismo dokazali da je četverokut $A_1A_2A_3A_4$ prikazan na slici 1 tetivni, treba dokazati da je $2\beta_1 + 2\beta_3 = 180°$. U tu svrhu pretpostavit ćemo da vrijede jednakosti (2) i koristiti poznatu formulu iz trigonometrije

$$\cos 2\alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}{1 + \operatorname{tg}^2\alpha}. \tag{3}$$

Možemo pisati

$$\cos 2\beta_1 = \frac{1 - \operatorname{tg}^2\beta_1}{1 + \operatorname{tg}^2\beta_1} = \frac{1 - \left(\frac{r}{t_1}\right)^2}{1 + \left(\frac{r}{t_1}\right)^2} = \frac{t_1^2 - r^2}{t_1^2 + r^2},$$

$$\cos 2\beta_3 = \frac{1 - \operatorname{tg}^2\beta_3}{1 + \operatorname{tg}^2\beta_3} = \frac{1 - \left(\frac{r}{t_3}\right)^2}{1 + \left(\frac{r}{t_3}\right)^2} = \frac{t_3^2 - r^2}{t_3^2 + r^2} = \frac{\left(\frac{r^2}{t_1}\right)^2 - r^2}{\left(\frac{r^2}{t_1}\right)^2 + r^2} = -\frac{t_1^2 - r^2}{t_1^2 + r^2},$$

jer je

$$\operatorname{tg}\beta_1 = \frac{r}{t_1}, \quad \operatorname{tg}\beta_3 = \frac{r}{t_3} = r : \frac{r^2}{t_1} = \frac{t_1}{r}.$$

Dakle, $\cos 2\beta_1 = -\cos 2\beta_3$, što može biti samo ako je $2\beta_1 + 2\beta_3 = 180°$.

Time je teorem 1 dokazan. □

[1] Autor je profesor emeritus na Filozofskom fakultetu u Rijeci.

Teorem 2. Neka je $A_1A_2A_3A_4$ bilo koji zadani osno simetrični četverokut i neka je r polumjer kružnice upisane četverokutu $A_1A_2A_3A_4$, R polumjer kružnice opisane četverokutu $A_1A_2A_3A_4$, d udaljenost između središta upisane i opisane kružnice. Tada je

$$(R^2 - d^2)^2 = 2r^2(R^2 + d^2). \tag{4}$$

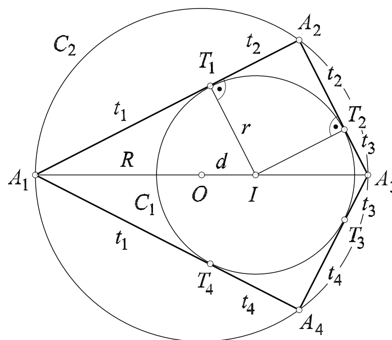
Dokaz. Promotrimo sliku 2. Kružnica opisana četverokutu $A_1A_2A_3A_4$ označena je s C_2, a kružnica upisana četverokutu $A_1A_2A_3A_4$ označena je sa C_1. S O je označeno središte kružnice C_2, a s I središte kružnice C_1. Udaljenost između O i I označeno je s d. Lako se vidi da je četverokut $IT_1A_2T_2$ kvadrat kojemu je duljina stranice jednaka r. Prema tome je $t_2 = t_4 = r$. Obratimo pozornost na trokute A_1T_1I i IT_2A_3. Ti su trokuti slični, pa vrijedi jednakost

$$r : t_1 = t_3 : r,$$

odnosno

$$t_1t_3 = r^2,$$

što i prema teoremu 1 mora vrijediti.



Slika 2.

Iz trokuta A_1T_1I i IT_2A_3 vidimo, također, da je

$$t_1 = \sqrt{(R+d)^2 - r^2}, \quad t_3 = \sqrt{(R-d)^2 - r^2}.$$

Zato možemo pisati

$$\sqrt{(R+d)^2 - r^2} \cdot \sqrt{(R-d)^2 - r^2} = r^2$$

i dalje je

$$[(R+d)^2 - r^2][(R-d)^2 - r^2] = r^4,$$
$$(R^2 - d^2)^2 - 2r^2(R^2 + d^2) = 0.$$

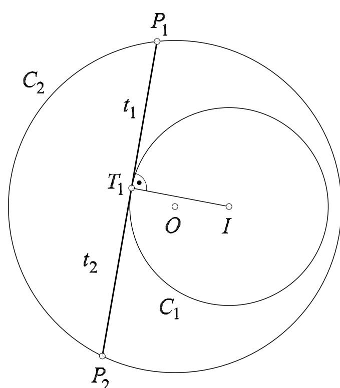
Time je dokazano da vrijedi jednakost (4), tj. dokazan je teorem 2.

Zadržimo se još malo na slici 2. Primijetimo da je t_1 duljina najveće tangente koja se može povući iz ma koje točke kružnice C_2 na kružnicu C_1, a da je t_3 duljina najmanje tangente koja se može povući iz ma koje točke kružnice C_2 na kružnicu C_1. Da bismo to istakli označimo tu duljinu t_1 s t_M, a duljinu t_3 s t_m. Dakle, t_m i t_M dane su izrazima

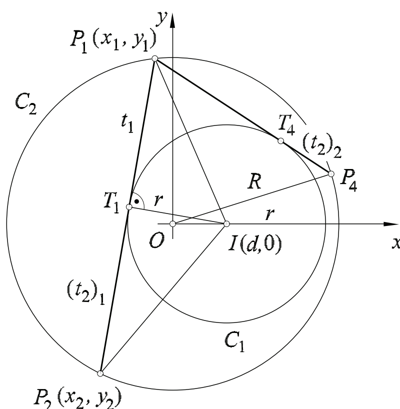
$$t_m = \sqrt{(R-d)^2 - r^2}, \quad t_M = \sqrt{(R+d)^2 - r^2}. \tag{5}$$

Promotrimo sada sliku 3. Uzmimo da su kružnice C_1 i C_2 kao i na slici 2 i da je P_1 bilo koja zadana točka na kružnici C_2 i t_1 duljina tangente povučene iz P_1 na kružnicu C_1. Treba naći izraz za t_2, tj. valja naći formulu po kojoj se može izračunati t_2 na temelju poznavanja vrijednosti za t_1. Da bismo našli tu formulu dopunit ćemo sliku 3 na način da se dobije slika 4.

Kao što se vidi, koristimo pravokutni koordinatni sustav s ishodištem u točki O (središtu kružnice C_2) tako da x-os sadrži točku I (središte kružnice C_1).



Slika 3.



Slika 4.

Dokazujemo sada sljedeći teorem.

Teorem 3. Neka su C_1 i C_2 kružnice kao na slici 2, dakle, kao i na slici 3 ili na slici 4. Dalje, neka je t_1 duljina bilo koje zadane tangente povučene iz neke točke na kružnici C_2 na kružnicu C_1, tj. neka je t_1 bilo koja zadana duljina tako da je

$$t_m \leqslant t_1 \leqslant t_M, \tag{6}$$

gdje su t_m i t_M dane izrazima (5). Tada je t_2 dana izrazom

$$t_2 = (t_2)_1 = \frac{(R^2 - d^2)\, t_1 + \sqrt{D}}{r^2 + t_1^2} \tag{7}$$

ili izrazom

$$t_2 = (t_2)_2 = \frac{(R^2 - d^2)\, t_1 - \sqrt{D}}{r^2 + t_1^2} \tag{8}$$

gdje je

$$D = t_1^2(R^2 - d^2)^2 + (r^2 + t_1^2)\left[4R^2d^2 - r^2t_1^2 - (R^2 + d^2 - r^2)^2\right]. \tag{9}$$

Dokaz. Najprije primijetimo da se iz zadane točke na kružnici C_2 mogu povući dvije tangente na kružnicu C_1. Tako se, iz točke P_1 na slici 4, mogu povući tangente P_1T_1 i P_1T_4. Iza tangente P_1T_1 dolazi tangenta T_1P_2 čija je duljina označena s $(t_2)_1$, a iza tangente P_1T_4 dolazi tangenta T_4P_4 čija je duljina označena s $(t_2)_2$. U razmatranju koje ćemo kasnije provoditi bit će svejedno koju ćemo od vrijednosti $(t_2)_1$ i $(t_2)_2$ uzeti za t_2. Recimo da smo uzeli da je $t_2 = (t_2)_1$.

Da bismo dokazali da vrijede izrazi (7) i (8) koristit ćemo trokute P_1T_1I i T_1P_2I. Ti su trokuti pravokutni, pa vrijede jednakosti

$$t_1^2 + r^2 = (x_1 - d)^2 + y_1^2, \quad t_2^2 + r^2 = (x_2 - d)^2 + y_2^2.$$

A budući da je $x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2 = R^2$, možemo te jednakosti pisati u obliku

$$t_1^2 + r^2 = R^2 + d^2 - 2dx_1, \quad t_2^2 + r^2 = R^2 + d^2 - 2dx_2$$

ili, u obliku

$$x_1 = \frac{-t_1^2 + R^2 - r^2 + d^2}{2d}, \quad x_2 = \frac{-t_2^2 + R^2 - r^2 + d^2}{2d}. \tag{10}$$

Koristit ćemo i jednakost $t_1 + t_2 = |P_1P_2|$, tj.

$$(t_1 + t_2)^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2,$$

odnosno

$$(t_1 + t_2)^2 = -2x_1x_2 - 2y_1y_2 + 2R^2.$$

Iz te jednakosti slijedi

$$(2y_1y_2)^2 = ((t_1 + t_2)^2 + 2x_1x_2 - 2R^2)^2,$$

koja se, koristeći izraze $y_1^2 = R^2 - x_1^2$, $y_2^2 = R^2 - x_2^2$ i (10), može pisati u obliku

$$(r^2 + t_1^2)\,t_2^2 - 2t_1t_2(R^2 - d^2) + r^2t_1^2 - 4R^2d^2 + (R^2 + d^2 - r^2)^2 = 0. \qquad (11)$$

To je kvadratna jednadžba po t_2 i njeni korijeni su dani izrazima (7) i (8). To se može lako provjeriti i tako da se koristi znanje o Vièteovim formulama. Naime, vidimo da je

$$(t_2)_1 + (t_2)_2 = \frac{2(R^2 - d^2)\,t_1}{r^2 + t_1^2}, \quad (t_2)_1(t_2)_2 = \frac{r^2t_1^2 - 4R^2d^2 + (R^2 + d^2 - r^2)^2}{r^2 + t_1^2}.$$

Time je teorem 3 dokazan. □

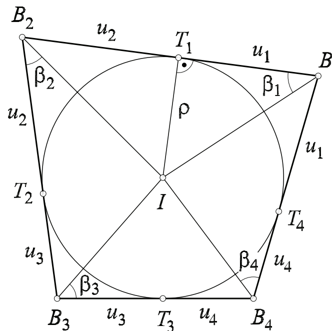
Teorem 4. Neka je $B_1B_2B_3B_4$ bilo koji zadani tangencijalni četverokut i neka su mu u_1, u_2, u_3, u_4 duljine njegovih tangenti, tj.

$$u_1 + u_2 = |B_1B_2|, \qquad |u_2 + u_3| = |B_2B_3|,$$
$$u_3 + u_4 = |B_3B_4|, \qquad |u_4 + u_1| = |B_4B_1|.$$

Tada vrijedi jednakost

$$(u_1 + u_2 + u_3 + u_4)\rho^2 = u_1u_2u_3 + u_2u_3u_4 + u_3u_4u_1 + u_4u_1u_2, \qquad (12)$$

gdje je ρ polumjer kružnice upisane četverokutu $B_1B_2B_3B_4$ (vidi sliku 5).



Slika 5.

Dokaz. Iz slike 5 vidimo da vrijedi jednakost

$$\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \beta_4 = 180^\circ,$$

jer je suma unutarnjih kutova četverokuta jednaka 360°. Tu jednakost možemo pisati u obliku

$$\beta_1 + \beta_2 = 180^\circ - (\beta_3 + \beta_4)$$

i dalje,

$$\operatorname{tg}(\beta_1 + \beta_2) = \operatorname{tg}(180^\circ - (\beta_3 + \beta_4)) = \operatorname{tg}(\beta_3 + \beta_4),$$

$$\frac{\operatorname{tg}\beta_1 + \operatorname{tg}\beta_2}{1 - \operatorname{tg}\beta_1 \operatorname{tg}\beta_2} = \frac{\operatorname{tg}\beta_3 + \operatorname{tg}\beta_4}{1 - \operatorname{tg}\beta_3 \operatorname{tg}\beta_4}. \qquad (13)$$

Kako je

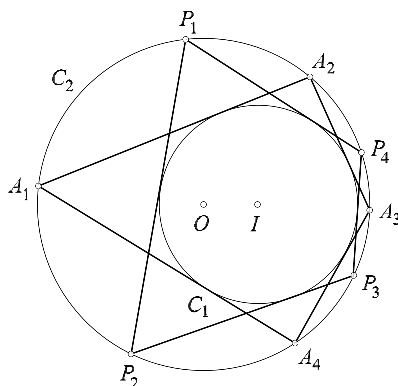
$$\operatorname{tg}\beta_i = \frac{\rho}{u_i} \qquad (i = 1, 2, 3, 4),$$

lako se nalazi da time jednakost (13) prelazi u jednakost (12).

Teorem 4 je dokazan. □

U narednom teoremu uzet ćemo da su duljine r, R, d, t_1, $(t_2)_1$ iste kao i u teoremu 3. Dokazujemo sada:

Teorem 5. Postoji beskonačno mnogo bicentričkih četverokuta koji imaju istu upisanu i istu opisanu kružnicu kao i četverokut $A_1A_2A_3A_4$ prikazan na slici 2. Za svaku točku X_1 na kružnici C_2 postoje točke X_2, X_3, X_4 tako da je četverokut $X_1X_2X_3X_4$ bicentrički koji ima istu upisanu i istu opisanu kružnicu kao i četverokut $A_1A_2A_3A_4$ prikazan na slici 2 (vidi sliku 6).



Slika 6.

Dokaz. Poći ćemo od slike 3. Budući da su kružnice C_1 i C_2 na toj slici i po veličini i po međusobnom položaju kao i one na slici 2, dovoljno je pokazati da za svaku točku P_1 na kružnici C_2 postoje točke P_2, P_3, P_4 tako da četverokut $P_1P_2P_3P_4$ bude bicentrički kojemu je C_1 upisana i C_2 opisana kružnica.

Drugim riječima, dovoljno je pokazati da postoji bicentrički četverokut tako da je

$$|P_1P_2| = t_1 + t_2, \quad |P_2P_3| = t_2 + t_3, \quad |P_3P_4| = t_3 + t_4, \quad |P_4P_1| = t_4 + t_1,$$

gdje je

$$t_m \leqslant t_1 \leqslant t_M, \quad t_2 = \frac{(R^2 - d^2)\,t_1 + \sqrt{D}}{r^2 + t_1^2}, \quad t_3 = \frac{r^2}{t_1}, \ t_4 = \frac{r^2}{t_2}. \tag{14}$$

Primijetimo ovdje da je t_1 duljina tangente koja se može povući iz točke P_1 na kružnici C_1 i da je $t_2 = (t_2)_1$, gdje je $(t_2)_1$ dana izrazom (7).

Najprije treba pokazati da postoji tangencijalni četverokut kojemu su t_1, t_2, t_3, t_4 duljine tangenata dane izrazima (14) i r polumjer upisane mu kružnice, tj. da vrijedi jednakost

$$(t_1 + t_2 + t_3 + t_4)r^2 = t_1t_2t_3 + t_2t_3t_4 + t_3t_4t_1 + t_4t_1t_2.$$

Dokaz je lagan. Naime, koristeći jednakosti $t_1t_3 = r^2$, $t_2t_4 = r^2$, možemo gornju jednakost pisati u obliku

$$(t_1 + t_2 + t_3 + t_4)r^2 = r^2(t_1 + t_2 + t_3 + t_4).$$

Na temelju teorema 1 jasno je i to da je tangencijalni četverokut kojemu su duljine tangenata dane izrazima (14) i tetivni četverokut, dakle, bicentrički četverokut. Pokazat ćemo da je opisana kružnica toga bicentričkog četverokuta upravo kružnica C_2. U tu svrhu koristit ćemo poznate formule za bicnetrički četverokut. Naime, ako je $B_1B_2B_3B_4$ bicentrički četverokut kojemu je R polumjer opisane kružnice i t_1, t_2, t_3, t_4 duljine njegovih tangenata, tada vrijede formule

$$R^2 = \frac{(ab + cd)(ac + bd)(ad + bc)}{16P^2}, \qquad P^2 = abcd \tag{15}$$

gdje je $a = t_1 + t_2$, $b = t_2 + t_3$, $c = t_3 + t_4$, $d = t_4 + t_1$, P – površina četverokuta $B_1B_2B_3B_4$.

(Formule (15) nalaze se i u srednjoškolskoj literaturi, pa ih ovdje nećemo dokazivati. Čitatelj kojega to zanima, može to naći, na primjer, u knjižici koja se navodi u popisu

literature. U njoj ima mnogo zanimljivih relacija koje se odnose na tetivne i tangnecijalne poligone.)

Koristeći formule (15) može se pokazati da je razlomak

$$\frac{(ab+cd)(ac+bd)(ad+bc)}{16abcd}$$

jednak R^2 za duljine t_1, t_2, t_3, t_4 dane izrazima (14). Ostavljamo čitatelju da se uvjeri da se na kraju dobiva razlomak $\frac{R^2(r^2+t_1^2)}{r^2+t_1^2}$.

Tako je dokazan i teorem 5.

Sada možemo, kao sažetak svega što je rečeno u ovome članku, istaknuti dvije osnovne i veoma značajne tvrdnje koje se odnose na bicentričke četverokute.

1. Ako su C_1 i C_2 dvije kružnice u istoj ravnini i C_1 unutar C_2, pa ako postoji bicentrički četverokut kojemu je C_1 upisana i C_2 opisana kružnica, tada vrijedi jednakost

$$(R^2-d^2)^2 = 2r^2(R^2+d^2), \tag{16}$$

gdje je r polumjer kružnice C_1, a R polumjer kružnice C_2, d udaljenost između središta kružnica C_1 i C_2.

2. Ako su C_1 i C_2 dvije kružnice u istoj ravnini i C_1 unutar C_2, pa ako postoji bicentrički četverokut kojemu je C_1 upisana i C_2 opisana kružnica, tada postoji beskonačno mnogo bicentričkih četverokuta kojima je C_1 upisana i C_2 opisana kružnica.

Dakle, ili nema nijednog ili ima beskonačno mnogo bicentričkih četverokuta.

Prvu tvrdnju dokazao je njemački matematičar **Nicolaus Fuss** (1755. – 1826.), suvremenik i prijatelj velikog švicarskog matematičara Leonharda Eulera. Time je bio riješen problem koji se ubrajao među sto velikih problema elementarne matematike.

Drugu tvrdnju dokazao je veliki francuski matematičar **Jean Victor Poncelet**, (1788. – l867.). Ta je tvrdnja poznata kao *Ponceletov teorem zatvaranja za bicentrički četverokut*. Poncelet je dokazao da analogno vrijedi za poligone s po volji mnogo vrhova. Čak je i poopćio tu tvrdnju na slučaj kad umjesto kružnica dolaze konike (čunjosječnice). Ali se ovdje na tome ne možemo zadržavati. Spomenut ćemo samo da se sve te fascinantne tvrdnje mogu relativno lako dokazati koristeći jednu granu geometrije, tzv. *projektivnu geometriju*.

Autor ovoga članka se nada da je našao dovoljno pristupačan način (ne udaljavajući se od srednjoškolskog gradiva) da dokaze osnovnih tvrdnji o bicnetričkim četverokutima mogu shvatiti i učenici srednjih škola koji vole matematiku i kojima njeno upoznavanje čini zadovoljstvo i užitak.

Na kraju, preporučamo učenicima da obrate pozornost i narednim vježbama.

Vježbe

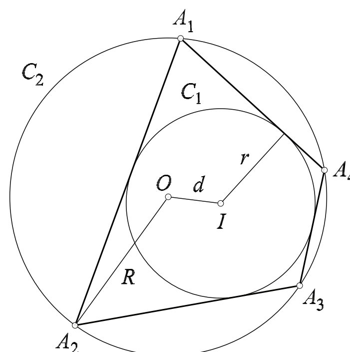
1. Koristeći jednakost pod (4), dokaži da se diskriminanta D dana izrazom (9) može pisati u obliku

$$D = (R^2-d^2)^2t_1^2 - r^2(r^2+t_1^2)^2. \tag{17}$$

Uputa. Vrijede jednakosti $4R^2d^2-(R^2+d^2-r^2)^2 = -(R^2-d^2)^2+2r^2(R^2+d^2)+r^4 = r^4$.

2. Neka je $R = 3$ cm, $d = 1$ cm. Iz jednakosti navedenoj pod (4) slijedi da je $r = 1.788854382$ cm. Koristeći formule (5) uvjeri se da je $t_m = 0.894427191$ cm, $t_M = 3.577708764$ cm. Dakle, za t_1 možemo uzeti bilo koju vrijednost između t_m i t_M. Uzmimo da je $t_1 = 1.7$ cm. Uvjeri se da je $t_2 = 3.5699729$ cm, $t_3 = 1.88235294$ cm, $t_4 = 0.896365343$ cm. Koristi izraze navedene pod (14). (Manje računanja će biti ako za D uzmeš izraz naveden pod (17).) Na slici 7 nacrtan je odgovarajući bicentrički četverokut.

Duljine t_2, t_3 i t_4 računali smo ovdje na devet decimala, iako za ovu potrebu nije trebalo više od par decimala.



Slika 7.

3. Neka su R, d i r kao u prethodnoj vježbi. Uzmi $t_1 = 2$ cm i izračunaj t_2, t_3, t_4, a zatim nacrtaj odgovarajući bicentrički četverokut. Nacrtaj na toj slici i bicentrički četverokut nacrtan na slici 7.

4. Neka su $A_1A_2A_3A_4$ i $B_1B_2B_3B_4$ bilo koja dva bicentrička četverokuta koji imaju istu upisanu i opisanu kružnicu i neka su t_1, t_2, t_3, t_4 duljine tangenata četverokuta $A_1A_2A_3A_4$, a u_1, u_2, u_3, u_4 duljine tangenata četverokuta $B_1B_2B_3B_4$. Dokaži da vrijede jednakosti

$$t_1t_2t_3t_4 = u_1u_2u_3u_4 = r^4,$$

$$t_1t_2 + t_2t_3 + t_3t_4 + t_4t_1 = u_1u_2 + u_2u_3 + u_3u_4 + u_4u_1 = 2(R^2 - d^2).$$

Koristi izraze navedene pod (14).

5. Dokaži da je $t_mt_M - r^2 = 0 \iff (R^2 - d^2)^2 - 2r^2(R^2 + d^2) = 0$.

6. Iz slike 4 lako je zaključiti da u slučaju kad su P_1, P_2 i P_4 tri vrha bicentričkog četverokuta onda je izrazom (8) dana duljina tangente t_4. Koristeći tu činjenicu dokaži da je

$$t_2t_4 - r^2 = 0 \iff (R^2 - d^2)^2 - 2r^2(R^2 + d^2) = 0,$$

gdje je $t_2 = (t_2)_1$, $t_4 = (t_2)_2$.

To je još jedan vrlo zanimljiv način kako se može dokazati Fussova relacija (4).

Literatura

[1] M. RADIĆ, V. KADUM, (2005), *Tangencijalni i tetivni poligoni. Bicentrički poligoni*, (Matematika za mlade), Pula: IGSA

⋆ ⋆ ⋆

Logika je nepobjediva, jer da bismo je pobijedili moramo koristiti logiku.

Pierre Boutroux

Jedan teorem u vezi s pravokutnim trokutom

Šefket Arslanagić, Sarajevo

Još u VII. razredu osnovne škole upoznali smo poznati **Pitagorin**[1] **poučak** koji glasi:

Trokut je pravokutan ako i samo ako je kvadrat duljine hipotenuze jednak zbroju kvadrata duljina kateta tj. $c^2 = a^2 + b^2$.

Dokazat ćemo sljedeći

Teorem. Trokut ABC je pravokutan ako i smo ako vrijedi relacija

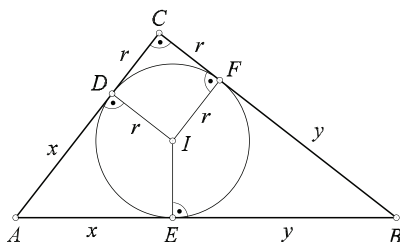
$$a + b + c = 4R + 2r, \tag{1}$$

gdje su a, b, c, duljine stranica trokuta, a R i r polumjeri opisane i upisane mu kružnice.

Dokaz. 1° Jedan smjer se lako dokaže. Ako je trokut pravokutan, dokazat ćemo da vrijedi relacija (1).

Kako su stranice trokuta, tangente upisane mu kružnice vrijedi:

$$|AE| = |AD| = x, \quad |BE| = |BF| = y, \quad |CF| = |CD| = |ID| = |IF| = r.$$



Sada je

$$r + x = b, \quad r + y = a, \quad x + y = c,$$

a odavde

$$a + b + c = 2r + 2(x + y). \tag{2}$$

U pravokutnom trokutu imamo $c = 2R$, tj. $x + y = 2R$, pa iz (2) dobijemo relaciju (1), što je i trebalo dokazati.

2° Dokažimo sada obrat ove tvrdnje. Pretpostavimo da vrijedi relacija (1). Treba dokazati da je trokut ABC pravokutan.

Iz poučka o sinusima

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R,$$

za naš trokut dobivamo

$$a = 2R\sin\alpha, \quad b = 2R\sin\beta, \quad c = 2R\sin\gamma.$$

[1] Pitagora je starogrčki matematičar iz VI. stoljeća prije nove ere.

Uvrštavanjem u (1) dobivamo

$$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = 2 + \frac{r}{R}. \tag{3}$$

Dokazat ćemo da za svaki trokut vrijedi jednakost

$$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 1 + \frac{r}{R}. \tag{4}$$

Najprije ćemo dokazati da za svaki trokut vrijedi jednakost

$$\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} = \frac{r}{4R}. \tag{5}$$

Koristit ćemo poznatu relaciju $\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$.

Prema kosinusovom poučku imamo

$$\cos\alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc},$$

a odavde

$$\begin{aligned}\sin\frac{\alpha}{2} &= \sqrt{\frac{2bc-b^2-c^2+a^2}{4bc}} = \sqrt{\frac{a^2-(b-c)^2}{4bc}}\\ &= \sqrt{\frac{(a-b+c)(a+b-c)}{4bc}} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}},\\ s &= \frac{a+b+c}{2}.\end{aligned}$$

Analogno se dobiva

$$\sin\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{ac}}, \quad \sin\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}}.$$

Odavde, koristeći formule za površinu P trokuta:

$$P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \quad \text{(Heronova formula)},$$

$$R = \frac{abc}{4P}, \qquad r = \frac{P}{s},$$

dobivamo

$$\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} = \frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{abc} = \frac{P^2}{sabc} = P\cdot\frac{P}{sabc} = \frac{abc}{4R}\cdot\frac{rs}{sabc} = \frac{r}{4R},$$

tj. vrijedi jednakost (5).

Sada imamo

$$\begin{aligned}&\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma-1 = \cos\alpha+\cos\beta-(1-\cos\gamma)\\ &\quad= 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} - 2\sin^2\frac{\gamma}{2} = 2\cos\frac{180^\circ-\gamma}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} - 2\sin^2\frac{\gamma}{2}\\ &\quad= 2\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} - 2\sin^2\frac{\gamma}{2} = 2\sin\frac{\gamma}{2}\left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2} - \sin\frac{\gamma}{2}\right)\\ &\quad= 2\sin\frac{\gamma}{2}\left[\cos\frac{\alpha-\beta}{2} - \sin\left(90^\circ - \frac{\alpha+\beta}{2}\right)\right]\\ &\quad= 2\sin\frac{\gamma}{2}\left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2} - \cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right) = 2\sin\frac{\gamma}{2}\left[-2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\left(-\frac{\beta}{2}\right)\right]\end{aligned}$$

$$= 4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2},$$

odakle zbog (5) slijedi jednakost (4).

Nadalje, iz (3) i (4) dobivamo

$$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = 1 + \cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma. \qquad (6)$$

Imamo ove jednakosti

$$\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} \quad \text{i} \quad 1+\cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2} \quad \text{te}$$

$$\cos\beta + \cos\gamma = 2\cos\frac{\beta+\gamma}{2}\cos\frac{\beta-\gamma}{2} \quad \text{i} \quad \sin\beta+\sin\gamma = 2\sin\frac{\beta+\gamma}{2}\cos\frac{\beta-\gamma}{2},$$

te, radi $\beta+\gamma = 180^\circ - \alpha$,

$$\cos\frac{\beta+\gamma}{2} = \cos\Big(90^\circ - \frac{\alpha}{2}\Big) = \sin\frac{\alpha}{2} \quad \text{i} \quad \sin\frac{\beta+\gamma}{2} = \sin\Big(90^\circ - \frac{\alpha}{2}\Big) = \cos\frac{\alpha}{2}.$$

Iz (6) sada dobijemo

$$2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} + 2\sin\frac{\beta+\gamma}{2}\cos\frac{\beta-\gamma}{2} = 2\cos^2\frac{\alpha}{2} + 2\cos\frac{\beta+\gamma}{2}\cos\frac{\beta-\gamma}{2}, \quad \text{tj.}$$

$$\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta-\gamma}{2} - \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta-\gamma}{2} = 0,$$

te

$$\cos\frac{\alpha}{2}\Big(\sin\frac{\alpha}{2} - \cos\frac{\alpha}{2}\Big) - \cos\frac{\beta-\gamma}{2}\Big(\sin\frac{\alpha}{2} - \cos\frac{\alpha}{2}\Big) = 0,$$

$$\Big(\sin\frac{\alpha}{2} - \cos\frac{\alpha}{2}\Big)\Big(\cos\frac{\alpha}{2} - \cos\frac{\beta-\gamma}{2}\Big) = 0,$$

a odavde

$$\sin\frac{\alpha}{2} - \cos\frac{\alpha}{2} = 0 \quad \text{ili} \quad \cos\frac{\alpha}{2} - \cos\frac{\beta-\gamma}{2} = 0,$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = 1 \quad \text{ili} \quad -2\sin\frac{\alpha+\beta-\gamma}{4}\sin\frac{\alpha-\beta+\gamma}{4} = 0,$$

$$\frac{\alpha}{2} = 45^\circ \quad \text{ili} \quad \alpha+\beta=\gamma \quad \text{ili} \quad \alpha+\gamma=\beta.$$

Napokon, iz $\alpha+\beta+\gamma = 180^\circ$ slijedi

$$\alpha = 90^\circ \quad \text{ili} \quad \gamma = 90^\circ \quad \text{ili} \quad \beta = 90^\circ,$$

što je trebalo dokazati.

Literatura

[1] Š. Arslanagić, *Neke nejednakosti u pravouglom trouglu*, Triangle (Serija B), Vol. **4**(2000), 157–163.

[2] Š. Arslanagić, *Neke nejednakosti u vezi trougla*, Triangle, Vol. **2**(1998), 169–175.

[3] O. Bottema, and others, *Geometric Inequalities*, Wolters-Noordhoff Publishing, Groningen, 1969.

[4] A. Marić, *Planimetrija – zbirka riješenih zadataka*, Element, Zagreb, 1996.

[5] S. Mintaković, M. Franić, Trigonometrija, Element, Zagreb, 1999.

Singularna dekompozicija matrice reda 2

*Vida Zadelj-Martić**, *Zagreb*

Sažetak. U članku se izvodi efikasna metoda za računanje singularne dekompozicije trokutaste i opće matrice reda 2. Tipična primjena ove metode je njeno korištenje u sklopu tzv. dijagonalizacijskih metoda za singularnu dekompoziciju matrica reda n. Također, služi za brzo i točno određivanje norme, ranga i generaliziranog inverza općih matrica reda dva. Stoga može poslužiti za rješavanje problema najmanjih kvadrata u dvije dimenzije. Opis metode je prilagođen radu s kalkulatorom ili računalom.

Uvod

Singularna dekompozicija (ili singularni rastav) matrice je jedna od najvažnijih matričnih dekompozicija, kako za teorijske, tako i za razne računske potrebe. Algoritmi za računanje te dekompozicije često se koriste u sklopu složenijih algoritama za rješavanje stvarnih problema u gospodarstvu, industriji i znanosti. Mi ćemo se ovdje pozabaviti računanjem singularne dekompozicije u najjednostavnijem slučaju, kad je matrica reda 2.

Neka je A proizvoljna matrica reda 2. Singularna dekompozicija matrice A je svaki rastav oblika

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ d & e \end{bmatrix} = U \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{bmatrix} V^\tau = U\Sigma V^\tau\,, \quad \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq 0\,, \tag{1}$$

gdje su U i V ortogonalne matrice reda 2, a τ je znak za transponiranje matrica. Ovdje je Σ dijagonalna matrica reda 2, čiji dijagonalni elementi σ_1 i σ_2 su nenegativni realni brojevi koje nazivamo singularne vrijednosti od A. Također, stupce od U i V nazivamo lijevi i desni singularni vektori od A, respektivno. Prvi stupac od U (V) je lijevi (desni) singularni vektor od A koji pripada singularnoj vrijednosti σ_1, dok je drugi stupac od U (V) lijevi (desni) singularni vektor od A koji pripada singularnoj vrijednosti σ_2.

Ortogonalna matrica je kvadratna (realna) matrica koja zadovoljava uvjet $Q^\tau Q = I$ gdje je I jedinična matrica istog reda. Njen inverz je Q^τ, pa zato Q zadovoljava i uvjet $QQ^\tau = I$, koji se također može koristiti u definiciji. Uvjet $Q^\tau Q = I$ ($QQ^\tau = I$) znači da su stupci (redci) od Q ortonormirani tj. imaju duljinu jedan i ortogonalni su jedan prema drugome.

Ortogonalne matrice reda 2 su ili rotacije ili reflektori u ravnini, pa proizvoljna ortogonalna matrica W reda 2 ima jedan od sljedeća dva oblika

$$W = \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \quad \text{ili} \quad W = \begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ \sin\phi & -\cos\phi \end{bmatrix}.$$

Pritom je $\phi \in [0\,, 2\pi]$ kut kojim je određena matrica W. Za prvi oblik kažemo da je ravninska rotacija, dok je drugi reflektor. Mi ćemo u ovom prikazu koristiti

* Autorica je viši predavač na Geodetskom fakultetu Sveučilišta u Zagrebu.

rotacije. Uočimo da se reflektor lako dobije iz rotacije množenjem slijeva ili zdesna dijagonalnom matricom čiji jedan dijagonalni element je 1, a drugi -1. Više o singularnoj dekompoziciji i algoritmima za njeno izračunavanje može se naći npr. u poznatoj knjizi Matrix Computations [1].

Cilj nam je prikazati jedan računski postupak (algoritam) za računanje singularne dekompozicije matrice A reda 2. Pritom ćemo koristiti tzv. stabilne formule, pomoću kojih se i pomoću kalkulatora, a pogotovo pomoću jednostavnog računalnog programa u nekom programskom jeziku, mogu izračunati singularne vrijednosti i vektori do točnosti koju pruža kalkulator ili računalo koje koristimo.

Postupak ima dvije faze. U prvoj koristimo jednu rotaciju da dovedemo polaznu matricu A na gornjetrokutasti oblik. Takva rotacija se zove Givensova rotacija, a postupak svođenja matrice A na gornjetrokutastu matricu T, naziva se Givensova metoda. Ta metoda postoji i za opće $m \times m$ matrice, a ovdje ćemo ju izvesti za matrice reda 2.

Givensova metoda

Neka A ima elemente a, b, d i e, kao u relaciji (1). Tada se Givensova metoda može opisati matričnom relacijom

$$G^\tau A = T \quad \text{ili po elementima} \quad \begin{bmatrix} c & s \\ -s & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ d & e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f & g \\ 0 & h \end{bmatrix},$$

gdje je G ravninska rotacija za kut θ, a c i s kraće oznake za $\cos\theta$ i $\sin\theta$, respektivno. Ako c i s definiramo pomoću formula

$$c = \frac{a}{\sqrt{a^2+d^2}}, \qquad s = \frac{d}{\sqrt{a^2+d^2}}, \tag{2}$$

tada množenjem matrica G^τ i A dobijemo

$$G^\tau A = \begin{bmatrix} c & s \\ -s & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ d & e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ca+sd & cb+se \\ -sa+cd & -sb+ce \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f & g \\ 0 & h \end{bmatrix}, \tag{3}$$

gdje je

$$\begin{aligned}
f &= ca+sd = \frac{a}{\sqrt{a^2+d^2}}a + \frac{d}{\sqrt{a^2+d^2}}d = \frac{a^2+d^2}{\sqrt{a^2+d^2}} = \sqrt{a^2+d^2},\\
g &= cb+se = \frac{a}{\sqrt{a^2+d^2}}b + \frac{d}{\sqrt{a^2+d^2}}e = \frac{ab+de}{\sqrt{a^2+d^2}},\\
0 &= -sa+cd = -\frac{d}{\sqrt{a^2+d^2}}a + \frac{a}{\sqrt{a^2+d^2}}d \quad \text{(ovo je tek provjera)},\\
h &= -sb+ce = -\frac{d}{\sqrt{a^2+d^2}}b + \frac{a}{\sqrt{a^2+d^2}}e = \frac{-bd+ae}{\sqrt{a^2+d^2}}.
\end{aligned}$$

Uočimo da se c i s ne mogu izračunati samo ako je nazivnik $\sqrt{a^2+d^2}$ jednak nula. No, tada Givensova redukcija na gornjetrokutasti oblik, zapravo nije niti potrebna, jer je A već gornjetrokutasta. Štoviše, Givensova redukcija nije potrebna čim je $d = 0$!

Vidimo da je algoritam za Givensovu redukciju vrlo jednostavan i možemo ga lako izračunati pomoću kalkulatora ili računalnog programa. Prvo izračunamo c i s pomoću

formula (2), a zatim netrivijalne elemente f, g i h gornjetrokutaste matrice T pomoću zadnjih relacija.

Priprema za drugu fazu

Za potrebe druge faze algoritma, poželjno je da bude i $h \geq 0$. To lako postignemo množeći drugi stupac matrice T s predznakom od h, $\operatorname{sgn}(h)$. Pomoću matričnog množenja, tu transformaciju možemo opisati relacijom

$$\tilde{T} = TP \quad \text{odnosno} \quad \begin{bmatrix} f & g \cdot \operatorname{sgn}(h) \\ 0 & |h| \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f & g \\ 0 & h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \operatorname{sgn}(h) \end{bmatrix}.$$

Kako je $\operatorname{sgn}(h)$ jednako 1 ili -1, P je ortogonalna i za nju još vrijedi $P^\tau = P$, pa je $P^2 = I$. Stoga iz $\tilde{T} = TP = G^\tau AP$ slijedi $A = G\tilde{T}P$.

Sada smo problem singularnog rastava matrice A sveli na problem singularnog rastava matrice $\tilde{T}$. Doista, ako nađemo rotacije R_1 i R_2, takve da je

$$\tilde{T} = R_1 \Sigma R_2^\tau, \quad \text{tada je} \quad A = G\tilde{T}P = G(R_1 \Sigma R_2^\tau)P = (GR_1)\Sigma(PR_2)^\tau,$$

pa treba samo staviti $U = GR_1$ i $V = PR_2$. Pritom je U kao produkt dviju rotacija opet rotacija (s kutom koji je jednak zbroju kutova rotacija R_1 i G), dok je V ili rotacija R_2 (kad je $\operatorname{sgn}(h) = 1$) ili reflektor (kad je $\operatorname{sgn}(h) = -1$).

Za računanje singularnog rastava matrice $\tilde{T}$, koristit ćemo tzv. Kogbetliantzovu metodu.

Kogbetliantzova metoda

Iako je Kogbetliantzova metoda definirana za opće trokutaste matrice reda n, mi ćemo ju ovdje izvesti i opisati za slučaj $n = 2$, slijedeći ideje iz članka [2]. Za taj slučaj, metoda određuje matrice rotacije R_φ i R_ψ, takve da je $T' = R_\varphi^\tau T R_\psi$ dijagonalna matrica, pri čemu polazna matrica T može biti proizvoljna gornjetrokutasta. Gledajući matrice po elementima, mora vrijediti

$$\begin{bmatrix} f' & 0 \\ 0 & h' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_\varphi & s_\varphi \\ -s_\varphi & c_\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f & g \\ 0 & h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_\psi & -s_\psi \\ s_\psi & c_\psi \end{bmatrix}, \tag{4}$$

gdje su $c_\varphi = \cos\phi$, $s_\varphi = \sin\phi$ i $c_\psi = \cos\psi$, $s_\psi = \sin\psi$, a T' je dijagonalna s dijagonalnim elementima f' i h'. Dakle, R_φ i R_ψ su određene kutovima ϕ i ψ. Kad izvedemo postupak za računanje elemenata matrica T', R_φ i R_ψ, onda ga možemo primijeniti na matricu $\tilde{T}$ iz prethodnog odjeljka.

Određivanje matrica R_φ i R_ψ

Jednadžbu (4), odnosno $T' = R_\varphi^\tau T R_\psi$, možemo napisati kao $R_\varphi T' = TR_\psi$ ili $T'R_\psi^\tau = R_\varphi^\tau T$, ovisno o tome množimo li jednakost (4) s R_φ s lijeve, ili s R_ψ^τ s desne

strane. To možemo zapisati po elementima

$$\begin{bmatrix} c_\varphi & -s_\varphi \\ s_\varphi & c_\varphi \end{bmatrix}\begin{bmatrix} f' & 0 \\ 0 & h' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f & g \\ 0 & h \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_\psi & -s_\psi \\ s_\psi & c_\psi \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} f' & 0 \\ 0 & h' \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_\psi & s_\psi \\ -s_\psi & c_\psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_\varphi & s_\varphi \\ -s_\varphi & c_\varphi \end{bmatrix}\begin{bmatrix} f & g \\ 0 & h \end{bmatrix}.$$

Množeći matrice na lijevim i desnim stranama, dobijemo

$$\begin{bmatrix} c_\varphi f' & -s_\varphi h' \\ s_\varphi f' & c_\varphi h' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f c_\psi + g s_\psi & -f s_\psi + g c_\psi \\ h s_\psi & h c_\psi \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} f' c_\psi & f' s_\psi \\ -h' s_\psi & h' c_\psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f c_\varphi & g c_\varphi + h s_\varphi \\ -f s_\varphi & -g s_\varphi + h c_\varphi \end{bmatrix}.$$

Izjednačavanjem odgovarajućih elemenata matrica na lijevoj i desnoj strani, dobivamo

$$f' = \frac{c_\varphi}{c_\psi} f = \frac{s_\psi}{s_\varphi} h = \frac{c_\psi}{c_\varphi} f + \frac{s_\psi}{c_\varphi} g = \frac{s_\varphi}{s_\psi} h + \frac{c_\varphi}{s_\psi} g,$$
$$h' = \frac{c_\psi}{c_\varphi} h = \frac{s_\varphi}{s_\psi} f = \frac{c_\varphi}{c_\psi} h - \frac{s_\varphi}{c_\psi} g = \frac{s_\psi}{s_\varphi} f - \frac{c_\psi}{s_\varphi} g.$$

Za potrebe računanja, uzet ćemo najjednostavnije formule

$$f' = \frac{c_\varphi}{c_\psi} f \quad \text{i} \quad h' = \frac{c_\psi}{c_\varphi} h\,. \tag{5}$$

Direktnim računanjem elemenata matrice T', u relaciji (4), dobivamo

$$T' = \begin{bmatrix} c_\varphi c_\psi f + c_\varphi s_\psi g + s_\varphi s_\psi h & -c_\varphi s_\psi f + c_\varphi c_\psi g + s_\varphi c_\psi h \\ -s_\varphi c_\psi f - s_\varphi s_\psi g + c_\varphi s_\psi h & s_\varphi s_\psi f - s_\varphi c_\psi g + c_\varphi c_\psi h \end{bmatrix}.$$

To daje sljedeće jednadžbe

$$f' = c_\varphi c_\psi f + c_\varphi s_\psi g + s_\varphi s_\psi h, \quad h' = s_\varphi s_\psi f - s_\varphi c_\psi g + c_\varphi c_\psi h, \tag{6}$$

$$0 = -c_\varphi s_\psi f + c_\varphi c_\psi g + s_\varphi c_\psi h, \tag{7}$$

$$0 = -s_\varphi c_\psi f - s_\varphi s_\psi g + c_\varphi s_\psi h\,. \tag{8}$$

Kako za računanje f' i h' već imamo formule (5) koje su jednostavnije od onih u (6), preostaje samo izračunati elemente matrica rotacija R_φ i R_ψ pomoću relacija (7) i (8). Još kažemo da izvodimo formule za kutove.

Formule za kutove

Primijetimo da relacije (7) i (8) možemo napisati u matričnom obliku

$$\begin{bmatrix} c_\varphi g + s_\varphi h & -c_\varphi f \\ -s_\varphi f & c_\varphi h - s_\varphi g \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_\psi \\ s_\psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{9}$$

Stoga što je vektor $[c_\psi\,,\, s_\psi]^T$ uvijek različit od nul-vektora, zaključujemo da determinanta matrice drugog reda, mora biti jednaka nuli. Iz toga slijedi

$$s_\varphi c_\varphi \left(-f^2 - g^2 + h^2\right) - s_\varphi^2 hg + c_\varphi^2 gf = 0,$$

Ako koristimo formule za sinus i kosinus dvostrukog kuta, dobivamo

$$\tan 2\varphi = \frac{2hg}{f^2 - h^2 + g^2}\,. \tag{10}$$

Iz formule (10) možemo izračunati $t_\varphi = \tan\varphi$, a pomoću t_φ lako izračunamo c_φ i s_φ. Kut 2φ možemo birati iz intervala $(-\pi/2\,,\,\pi/2]$, tako da kut φ bude iz intervala $(-\pi/4\,,\,\pi/4]$.

Kako najefikasnije izračunati t_φ iz $\tan 2\varphi$? Postupak je sljedeći. Izračunajmo vrijednost razlomka u (10) i označimo ga s α. Nakon toga iskoristimo formulu za tangens dvostrukog kuta i relaciju (10),

$$\frac{2t_\varphi}{1 - t_\varphi^2} = \alpha \qquad \text{što daje} \qquad \alpha t_\varphi^2 + 2t_\varphi - \alpha = 0.$$

Rješavanjem kvadratne jednadžbe po t_φ, dobijemo

$$t_\varphi = \frac{-1 \pm \sqrt{\alpha^2 + 1}}{\alpha}.$$

Kako je kut φ iz intervala $(-\pi/4\,,\,\pi/4]$, t_φ i $\tan 2\varphi = \alpha$ imaju isti predznak. Međutim α i t_φ mogu imati isti predznak samo ako je brojnik u zadnjoj relaciji pozitivan. Dakle je

$$t_\varphi = \frac{-1 + \sqrt{\alpha^2 + 1}}{\alpha} = \frac{\sqrt{\alpha^2 + 1} - 1}{\alpha} \cdot \frac{\sqrt{\alpha^2 + 1} + 1}{\sqrt{\alpha^2 + 1} + 1} = \frac{\alpha}{1 + \sqrt{1 + \alpha^2}}. \tag{11}$$

Ova zadnja formula (za razliku od prve) nema opasnost kraćenja vodećih znamenaka kod oduzimanja (u brojniku, kad je $|\alpha|$ malo), pa ju treba koristiti. Također, za razliku od prve formule, dobro je definirana kad je $\alpha = 0$. Sada se c_φ i s_φ dobiju iz relacija

$$c_\varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + t_\varphi^2}}, \quad s_\varphi = \frac{t_\varphi}{\sqrt{1 + t_\varphi^2}}. \tag{12}$$

Nakon uvrštavanja tako izračunatih c_φ i s_φ u jednadžbe (9), one postaju proporcionalne, tj. predstavljaju istu jednadžbu za kut ψ. Iz prve proizlazi

$$\tan\psi = \frac{g + ht_\varphi}{f}, \quad \text{a iz druge} \quad \tan\psi = \frac{f\,t_\varphi}{h - gt_\varphi}\,. \tag{13}$$

Kut ψ možemo birati iz intervala $(-\pi/2\,,\,\pi/2]$. Obje formule u (13) daju istu vrijednost za $\tan\psi$. Koristeći $t_\psi = \tan\psi$, c_ψ i s_ψ se izračunaju kao u relaciji (12).

Primijetimo da zbog izabranog intervala za kutove uvijek vrijedi $|t_\varphi| \leq 1$ i $c_\varphi \geq \sqrt{2}/2$, dok je $c_\psi \geq 0$. Ako f nije nula, onda iz relacije (13) slijedi $c_\psi > 0$, pa formule (5) pokazuju da f' i f, kao i h' i h imaju iste predznake. To znači, ako

Kogbetliantzovu metodu primijenimo na matricu $\tilde{T}$ kod koje su i f i h pozitivni, onda su f' i h' pozitivni, a to znači da su f' i h' singularne vrijednosti.

Na sličan način možemo dobiti postupak u kojem se prvo određuje $\tan\psi$ iz $\tan 2\psi$, a nakon toga $\tan\varphi$. Iz tih vrijednosti također možemo dobiti vrijednosti za c_ψ, s_ψ, c_φ, s_φ.

Primjer 1. Neka je matrica

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ d & e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 2 \\ 12 & 5 \end{bmatrix}.$$

Za ovaj primjer koristimo običan kalkulator. Prvo Givensovom metodom poništavamo element na poziciji $(2,1)$, te na taj način dobivamo gornje trokutastu matricu T.

Iz relacija (2) slijedi

$$c = \frac{9}{\sqrt{9^2+12^2}} = 0.6, \qquad s = \frac{12}{\sqrt{9^2+12^2}} = 0.8\,. \tag{14}$$

Tada iz (3) proizlazi

$$G^\tau A = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.8 \\ -0.8 & 0.6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 & 2 \\ 12 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 & 5.2 \\ 0 & 1.4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f & g \\ 0 & h \end{bmatrix}. \tag{15}$$

Iz formule (10) za tangens dvostrukog kuta φ dobivamo

$$\tan 2\varphi = \frac{2gh}{f^2+g^2-h^2} = 0.05822137 \tag{16}$$

i odatle

$$t_\varphi = \frac{0.05822137}{1+\sqrt{1+0.05822137^2}} = 0.02908606.$$

Stoga je

$$c_\varphi = \frac{1}{\sqrt{1+t_\varphi^2}} = 0.9995773, \quad s_\varphi = \frac{t_\varphi}{\sqrt{1+t_\varphi^2}} = 0.02907376\,.$$

Nadalje, iz (13) dobivamo

$$t_\psi = \tan\psi = \frac{5.2+1.4\,t_\varphi}{15} = 0.3493814,$$

pa je

$$c_\psi = \frac{1}{\sqrt{1+t_\psi^2}} = 0.9440403, \quad s_\psi = \frac{t_\psi}{\sqrt{1+t_\psi^2}} = 0.3298301.$$

Na taj način su definirani svi elementi na desnoj strani relacije (4), pa se mogu odrediti i elementi f' i h'.

$$f' = \frac{c_\varphi}{c_\psi} f = \frac{0.9983094}{0.9432389} \cdot 15 = 15.882436,$$
$$h' = \frac{c_\psi}{c_\varphi} h = \frac{0.9432389}{0.9983094} \cdot 1.4 = 1.3222153.$$

Konačna dijagonalna forma matrice A, ako koristimo relacije (3) i (4), ima oblik

$$\Sigma = \begin{bmatrix} f' & 0 \\ 0 & h' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_\varphi & s_\varphi \\ -s_\varphi & c_\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f & g \\ 0 & h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_\psi & -s_\psi \\ s_\psi & c_\psi \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} c_\varphi & s_\varphi \\ -s_\varphi & c_\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c & s \\ -s & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ d & e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_\psi & -s_\psi \\ s_\psi & c_\psi \end{bmatrix} = U^\tau A V.$$

Pri tome je

$$U = \left(\begin{bmatrix} c_\varphi & s_\varphi \\ -s_\varphi & c_\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c & s \\ -s & c \end{bmatrix} \right)^\tau = \begin{bmatrix} c & -s \\ s & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_\varphi & -s_\varphi \\ s_\varphi & c_\varphi \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} c_\varphi c - s_\varphi s & -s_\varphi c - c_\varphi s \\ c_\varphi s + s_\varphi c & c_\varphi c - s_\varphi s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta+\varphi) & \sin(\theta+\varphi) \\ -\sin(\theta+\varphi) & \cos(\theta+\varphi) \end{bmatrix},$$

gdje je $c = \cos\theta$, $s = \sin\theta$. Kad računamo U, onda koristimo prvi prikaz matrice u drugom redu, jer nas kutovi ne zanimaju. Kako je element h bio pozitivan, matrica V je baš rotacija R_ψ. Dakle, singularna dekompozicija matrice A ima oblik

$$A = U\Sigma V^\tau$$
$$= \begin{bmatrix} 0.5764874 & -0.8171061 \\ 0.8171061 & 0.5764874 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 15.882436 & 0 \\ 0 & 1.3222153 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.9440403 & 0.3298301 \\ -0.3298301 & 0.9440403 \end{bmatrix}.$$

Spomenimo na kraju da u slučaju kad dobijemo $f' < h'$, moramo staviti $\sigma_1 = h'$ i $\sigma_2 = f'$, jer je uvijek $\sigma_1 \geq \sigma_2$. U tom slučaju načinimo sljedeće: zamijenimo dijagonalne elemente f' i h' u T' i također zamijenimo stupce u izračunatim matricama U i V. Provjerite da se produkt matrica $U\Sigma V^\tau$ nakon tih zamjena nije promijenio!

Literatura

[1] G. H. GOLUB AND C. F. VAN LOAN, *Matrix Computations*, The Johns Hopkins University Press, 2nd edition, 704 West 40th Street, Baltimore, Maryland 21211, 1989.

[2] HARI V., MATEJAŠ J., *An Accurate SVD Algorithm for* 2×2 *Triangular Matrices*, ICNAAM, International Conference on Numerical Analysis and Applied Mathematics 2006, ed. Simos T.E. et al. Weinheim: Wiley-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA, 2006. p.p. 143–146.

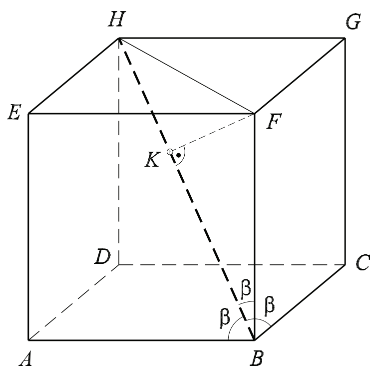
⋆ ⋆ ⋆

Svaki dobar matematičar je barem napola filozof i svaki dobar filozof je barem napola matematičar.

Gottlob Frege

Kako kocku provući kroz isto tako veliku kocku?

Željko Hanjš, Zagreb



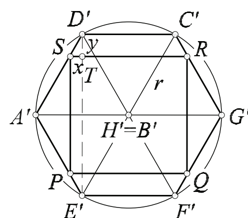
Da li se iz drvene kocke može izrezati otvor kroz koji se može provući isto takva kocka?

Izgleda neobično! A uskoro ćemo vidjeti da se zaista može, čak štoviše, može se provući i veća kocka. Kako velika može biti kocka koja se može provući kroz polaznu?

Da to pokažemo, projicirajmo kocku $ABCDEFGH$ na ravninu okomitu na prostornu dijagonalu $\overline{BH}$. Iz sukladnosti trokuta BHA, BHC i BHF i pošto je $\sphericalangle ABF = \sphericalangle ABC = \sphericalangle FBC = \frac{\pi}{2}$, slike od $\overline{BA}$, $\overline{BC}$ i $\overline{BF}$, zatvaraju međusobno jednake kutove, tj. kutove veličine $\frac{2\pi}{3}$. Nadalje slike od $\overline{HG}$, $\overline{HE}$ i $\overline{HD}$, moraju biti paralelne redom sa $\overline{BA}$, $\overline{BC}$ i $\overline{BF}$, tj. dvije po dvije moraju biti na istom pravcu, jer se točke B i H preslikavaju u istu točku. Zato su slike točaka A, C, F, G, E i D vrhovi pravilnog šesterokuta $A'E'F'G'C'D'$. Odredimo duljinu njegove stranice.

Promatrajmo trokut HBF u kojem je spuštena visina $\overline{FK}$. Zbog sličnosti trokuta HBF i HFK (imaju jednake kutove) vrijedi omjer $\frac{|KF|}{|HF|} = \frac{|FB|}{|HB|}$, odakle se dobiva $|KF| = \frac{|FB| \cdot |HF|}{|HB|} = \frac{a \cdot a\sqrt{2}}{a\sqrt{3}} = a\sqrt{\frac{2}{3}} = r$, gdje je a duljina brida kocke. Duljina $|KF|$ je ujedno duljina stranice pravilnog šesterokuta.

Odredimo duljinu stranice kvadrata $PQRS$ upisanog u ovaj šesterokut, kao na slici. Označimo s x i y duljine dužina $\overline{ST}$ i $\overline{TD'}$. Tada je



$$y = x\sqrt{3},$$
$$r + 2x = a_1,$$
$$r\sqrt{3} - 2y = a_1,$$

gdje je a_1 duljina stranice kvadrata $PQRS$.

Iz ovog sustava jednadžbi dobivamo $a_1 = \frac{2r\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}$.

Napokon je, $a_1 = \frac{2a\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}} > a$. Dakle, može se napraviti kvadratni otvor stranice a', tako da bude

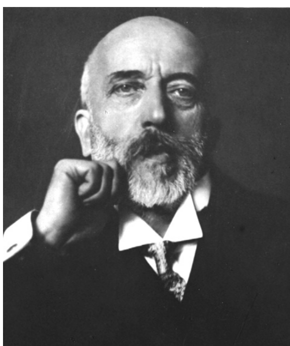
$$a < a' < \frac{2a\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}},$$

kroz koji se može provući kocka brida a'.



Mohorovičićev diskontinuitet

Dragutin Skoko[1], *Zagreb*



Andrija Mohorovičić, rođen 23. siječnja 1857. u Voloskom, umro 18. prosinca 1936. u Zagrebu, utemeljio je meteorološku i geofizičku znanost u nas i jedan je od najvećih hrvatskih znanstvenika svih vremena.

Njegova meteorološka djelatnost počela je tijekom profesorskog rada na Nautičkoj školi u Bakru (1882. – 1892.), gdje počinje s istraživanjima zračnog strujanja na osnovi gibanja oblaka. Mohorovičićev rad u Bakru odvijao se daleko od znanstvenih središta i institucija uz oskudna sredstva, pa ipak je u tom kratkom razdoblju objavio osam znanstvenih radova svojih istraživanja.

Godine 1892. Mohorovičić preuzima upravu Meteorološkog opservatorija na Griču u Zagrebu, što će obnašati sve do svojeg umirovljenja potkraj 1921. Znanstveni rad usmjeren mu je prvenstveno na istraživanje klime i olujnog nevremena na području Hrvatske. Uz to osniva dojavljivačku službu o grmljavini, organizira pokusnu zaštitu od tuče i istraživanje bure u području našega krša, proširuje mrežu naših meteoroloških postaja i stvara suvremenu meteorološku službu na razini europskih normi. Počam od 1893. izrađuje i u novinama objavljuje vremensku prognozu za Zagreb. Radi određivanja točnog stanja zavodskih preciznih ura Mohorovičić je 1892. započeo astronomska opažanja prolaza zvijezda gričkim (Zagreb) meridijanom i time u nas utemeljio službu točnog vremena. Ta je služba u javnosti znana po označavanju punog sata signalom putem radija. Postupno proširuje djelatnosti Opservatorija i na druga područja geofizike: seizmologiju, geomagnetizam i težu.

Prijelazom u 20. stoljeće Mohorovičićev znanstveni interes okreće se isključivo problemima seizmologije, čiji je *Zadatak da prouči unutrašnjost Zemlje i da nastavi ondje gdje geolog prestaje, a ima u modernim seizmografima neku vrst dalekozora kojim može promatrati najveće dubine.*

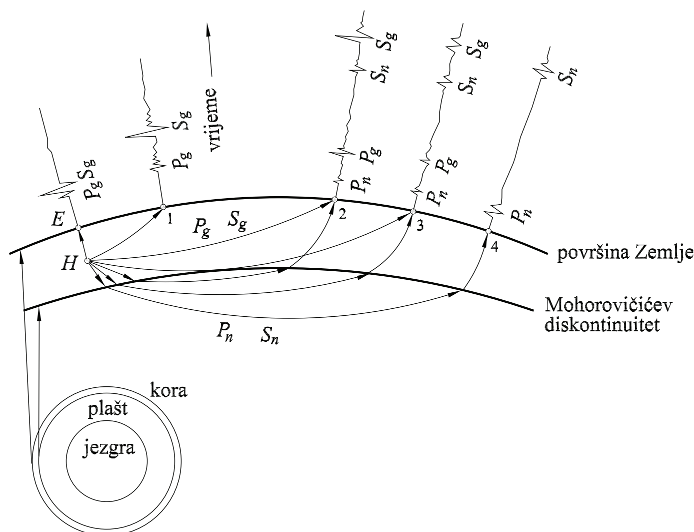
Mohorovičićevu pozornost posebno su privukla dva snažna potresa, iako iz različitih razloga. Prvi je 1908. pogodio talijanske gradove Messinu i Reggio, što ga je 1911. ponukalo na vizionarsko teorijsko razmatranje djelovanja potresa na građevine te utvrđivanje praktičkih pravila za izvedbu gradnji kako bi se štetni učinci potresa sveli na najmanju moguću mjeru, a što se u nas organizirano i sustavno počelo provoditi tek unatrag 40-tak godina.

Drugi potres s epicentrom u Pokupskom (dolina Kupe) dogodio se 8. X. 1909. Potresne valove (longitudunalni i transverzalni) zapisali su seizmografi svih europskih postaja. Mohorovičić je u cilju *...dubljeg zavirivanja u mehanizam rasprostiranja udaraca potresa...* prikupio seizmograme svih postaja, što mu je omogućio već postojeći međunarodni sustav razmjene seizmičkih podataka. Zatim je prišao izradi *empirijskih hodokrona* longitudinalnog i transverzalnog vala, tj. određivanju trajanja

[1] Autor je redoviti član HAZU, profesor emeritus Geofozičkog odsjeka Prirodoslovno-matematičkog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu, bavi se problemima seizmologije i fizike Zemljine unutrašnjosti, skoko@rudjer.irb.hr

vremena putovanja tih valova od žarišta potresa do pojedine postaje u ovisnosti njene udaljenosti od epicentra potresa. Međutim, na osnovi tih hodokrona uz primjenu tadašnjih postupaka nije mogao jednoznačno odrediti dubinu žarišta pokupskog potresa. Uz to je uočio da zapisi pojedinih seizmoloških postaja upućuju na dolazak dvaju longitudinalnih i dvaju transverzalnih valova, dok bi prema tadašnjem nazoru o Zemljinoj unutrašnjosti trebao stići samo jedan longitudinalni i jedan transverzalni val. Ta nesuglasja navode oštar Mohorovičićev duh na stvaranje nove slike gornjeg Zemljinog prostora. Pri tome je pošao od dvije svoje osnovne pretpostavke.

Prema prvoj Mohorovičićevoj pretpostavci fizikalna svojstva Zemljine unutrašnjosti mijenjaju se kontinuirano, ali samo u najgornjem sloju Zemlje (kora), od njene površine do određene dubine. Pri prijelazu kroz graničnu plohu iz kore u donji sloj (plašt) fizikalna svojstva sredstva promijene se skokomice (diskontinuirano).



Slika 1. Mohorovičićeva predodžba rasprostiranja valova potresa kroz Zemljinu koru i gornji dio plašta.

Kao posljedica te pretpostavke iz žarišta potresa (sl. 1, H) do postaja u epicentru i njegovoj blizini do 300 km (sl. 1, E, 1) može doći jedino onaj longitudinalni P_g i transverzalni S_g val čija čitava zraka leži u Zemljinoj kori. Slično do postaja udaljenijih od 720 km od epicentra (sl. 1, 4) dolazi jedino onaj longitudinalni P_n i transverzalni S_n val koji dijelom svoje zrake zalazi i u gornji plašt. Granična ploha sprečava P_g i S_g valove da dođu i do tih postaja. Do postaja 2 i 3 koje leže između 300–720 km može doći P_g i P_n longitudinalni val kao i transverzalni S_g i S_n val. Otuda slijedi da do postaja 2 i 3 nisu došla dva longitudinalna vala različitih brzina, već su to dvije faze $(P_g$ i $P_n)$ longitudinalnog vala koje se razlikuju jedino po tome što su došle različitim zrakama. Analogno vrijedi za S_g i S_n fazu transverzalnog vala.

U drugoj pretpostavci Mohorovičić uzima da brzina longitudinalnog i transverzalnog potresnog vala u kori kontinuirano raste eksponencijalno od Zemljine površine do dna kore prema izrazu

$$c = c_h \left(\frac{r_h}{r}\right)^k, \tag{1}$$

gdje je c_h brzina vala u dubini žarišta potresa, r_h radijvektor žarišta računajući od Zemljina središta, r radijvektor točke u kojoj se određuje brzina c vala i k eksponent koji

izražava porast brzine s dubinom. Brzina c_h, odnosno c, različita je za longitudinalni i za transverzalni val. Primjenom izraza (1) Mohorovičić je izveo analitički izraz koji povezuje trajanje vremena putovanja tih valova od žarišta potresa do pojedine postaje u ovisnosti o njenoj epicentralnoj udaljenosti. Naravno da se u toj *teorijskoj hodokroni* nalaze i parametri c_h, r_h i k. U daljnjem postupku varirao je vrijednosti tih parametara tako dugo dok nije postigao najbolje podudaranje teorijske hodokrone s empirijskom. Najbolje suglasje postigao je uz vrijednost eksponenta $k = 3.0$, brzinu longitudinalnog vala $c_h = 5.60$ km/ s i radijvektor žarišta $r_h = 6346$ km, čime je ujedno našao da je žarište pokupskog potresa ležalo u dubini od $6371 - 6346 = 25$ km. Sada je primjenom izraza (1) mogao računati brzine potresnih valova u Zemljinoj kori za svaku dubinu. Za Zemljinu površinu (1) daje 5.53 km/ s. Analitički izraz (1) – *Mohorovičićev zakon* – primjenjuje se i danas.

Mohorovičić je nadalje izračunao da se *granična ploha* koja odjeljuje Zemljinu koru od plašta nalazi u dubini od 54 km. Za brzinu longitudinalnog vala neposredno iznad te granične plohe izraz (1) daje 5.68 km/ s. Analognim razmatranjima dobio je za brzinu neposredno ispod te plohe 7.747 km/ s. Na temelju toga je zaključio: *U toj dubini mora se naglo mijenjati materijal od kojeg se sastoji unutrašnjost Zemlje, jer tu se mora dogoditi nagli skok brzina valova potresa.*

Andrija Mohorovičić prvi je znanstvenik koji je izveo svjetski epohalan dokaz jednoznačnog postojanja granične plohe Zemljine unutrašnjosti i odredio njenu dubinu. Njemu u čast nazvana je *Mohorovičićev diskontinuitet*, ili, kraće, *Moho*, odnosno *M-diskontinuitet*. Kasnija istraživanja potvrdila su da ta ploha obuhvaća čitavu Zemlju, ali njena dubina nije posvuda jednaka. Podno visokih planinskih lanaca doseže i 70 km, a podno dubokih oceana leži na samo 5 km dubine. Prosjek za čitavu Zemlju je 33 km. U našem području ona varira od 40 km podno Dinarida do 25–30 km u Podravini. Žarišta naših potresa leže u Zemljinoj kori, tj. iznad su Mohorovičićeva diskontinuiteta. U nekim područjima (npr. Rumunjska, Grčka, rubovi Pacifika) žarišta su i u plaštu sve do dubina od 720 km.

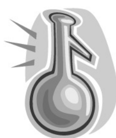
Ubrzo nakon Mohorovičićeva otkrića utvrđuju se i druge granične plohe Zemljine unutrašnjosti, npr. *Gutenbergov diskontinuitet* (1914.) u dubini od 2898 km. Ta ploha i Mohorovičićev diskontinuitet dijele Zemlju u njena tri najistaknutija prostora – koru, plašt i jezgru.

Uveo je postupak lociranja epicentra potresa ucrtavanjem odgovarajućih hiperbola (*Mohorovičićeve epicentrale)*. Njegove hodokrone iz 1922. primjenjivane su za definiranje nekoliko modela Zemlje (*G-modeli*). Razradio je postupak određivanja trenja seizmografa u pogonu te 1917. iznio prijedlog za izvedbu kvalitetnijeg seizmografa od tadašnjih (*Mohorovičićev seizmograf*).

Njegova svekolika aktivnost rezultirala je i doličnim priznanjima. Za doktora filozofije promoviran je na zagrebačkom Sveučilištu 1893., a 1910. postaje naslovnim izvanrednim sveučilišnim profesorom. Već je 1893. član dopisnik, a 1898. pravi član tadašnje Jugoslavenske akademije znanosti i umjetnosti u Zagrebu. Medaljon s Mohorovičićevim likom nalazi se na rektorskom lancu Sveučilišta u Zagrebu. Geofizički odsjek Prirodoslovno-matematičkog fakulteta u Zagrebu nosi njegovo ime, kao i gimnazija u Rijeci, osnovna škola u Matuljima te nekoliko ulica hrvatskih gradova.

Ime Andrije Mohorovičića prešlo je okvire njegova neposrednog zanimanja i postalo svojina i drugih znanosti. Tako je njegovim imenom obilježen 1970. jedan krater promjera 77 km na nama nevidljivoj strani Mjeseca, zatim granica između kore i plašta Marsa te asteroid br. 8422. Međunarodni projekt bušenja Zemljine kore, kojim bi se probio Mohorovičićev diskontinuitet i doprlo do plašta, nazvan je njemu u čast *MOHOLE* projekt (*MO* prema Mohorovičić, a *HOLE* prema engleskom šupljina).

Andrija Mohorovičić podigao je hrvatsku znanost, gotovo prije jednog stoljeća, na europsku i svjetsku razinu te spada među najistaknutije hrvatske znanstvenike svih vremena. Bio je glasovit i cijenjen u svjetskim razmjerima, te ga ubrajaju među velikane seizmologije i geofizike pa i egzaktnih znanosti uopće.



IZ MOJE RADIONICE I LABORATORIJA

Jednostavni pokusi koji demonstriraju tlak zraka

Lana Ivanjek[1], *Zagreb*

Pokušajmo napraviti tri jednostavna pokusa s balonom i plastičnom bocom.



1) Uzmimo praznu, tvrdu plastičnu bocu volumena 1.5 l od soka ili vode (npr. boca od Jane). Blizu dna boce izbušimo rupu promjera 2–3 mm. Uzmimo mali balon i smjestimo ga u bocu, a vrat balona raširimo preko rubova boce kao što prikazuje slika. Napušimo balon upuhujući zrak u njega i čim smo prestali puhati zatvorimo rupu na boci ljepljivom trakom. Što se dogodilo s balonom?

Suprotno našem očekivanju balon je ostao napuhan, iako je otvoren. Kako je to moguće?

2) Je li moguće napuhati balon bez puhanja u njegov otvoreni kraj? Uzmimo istu plastičnu bocu i nenapuhani balon u njoj. Prislonimo usta na rupicu pri dnu boce i pokušajmo isisati zrak iz boce. Što se pri tome događa s balonom? Zašto?

3) Napušimo balon (koji je još uvijek u boci) pušući u njega. Zatvorimo rupicu prstom i uronimo bocu u vodom napunjenu kadu ili neku veću posudu, tako da je otvor boce iznad površine vode, a rupica malo ispod površine. Sada odmaknimo prst s rupice. Što se događa s balonom? Zašto voda ulazi u bocu? Kakva je razina vode u boci u odnosu na razinu vode u posudi? Kako bismo to objasnili?

Objasnimo sada što se događalo s balonom. Prije nego što odgovorimo na prvo pitanje, pogledajmo što će se dogoditi s balonom kada otvorimo rupicu na boci. Balon se ispuše. Da bismo odgovorili zašto je balon ostao napuhan dok je rupica na boci zatvorena, moramo razmisliti o tlakovima koji djeluju na balon. Dok napuhujemo balon približimo prst izbušenoj rupici. Možemo osjetiti da izlazi zrak iz boce. Dakle – napuhujući balon smanjujemo broj čestica zraka u boci. Kada zatvorimo rupicu u boci, tlak zraka u boci je manji od atmosferskog i balon ostaje napuhan iako je otvoren.

Zašto smo uspjeli napuhati balon ne pušući u njega? Isisavajući zrak iz boce smanjili smo tlak u boci. Znači, u boci je opet tlak zraka niži od atmosferskog, a u balonu je tlak zraka jednak atmosferskom. Balon se napuše zbog razlike u tlakovima. Ako je boca premekana, može se dogoditi da se pri isisavanju zraka iz boce "zgužva boca", a ne napuše balon. Zato je važno da boca bude od tvrde plastike.

U posljednjem eksperimentu uočili smo da voda ulazi u bocu i da je razina vode u boci viša nego u posudi. To nam pokazuje da je tlak u boci viši od atomsferskog.

Literatura

[1] GHOLAMREZA SHAMSIPOUR, *Simple Experiments for Teaching Air Pressure*, Phys. Teach. 44, 576–577.

[1] Autorica je znanstvena novakinja u Grupi za metodiku nastave fizike, Fizičkog zavoda, Prirodoslovno-matematičkog fakulteta u Zagrebu, e-mail: `lana@phy.hr`



ASTRONOMIJA

Astrobiologija – znanost o izvanzemaljskom životu

Dario Hrupec[1], *Koprivnica*

Kako je nastao i razvio se život?
Ima li života drugdje u svemiru?
Kakva je budućnost života na Zemlji i izvan nje?

Ova tri temeljna pitanja dobro određuju područje interesa nove interdisciplinarne[2] znanosti nazvane **astrobiologija**[3]. Astrobiologija istražuje život kao *planetarni* fenomen s ciljem razumijevanja temeljne prirode života na Zemlji i moguće drugdje u svemiru [1]. Zadnjih je godina prikupljeno mnoštvo novih podataka o ekstrasolarnim planetima [6] i malim tijelima našega Sunčevog sustava [5] što je značajno povećalo spoznaje o nastanku i evoluciji planeta.

Nakon što je NASA osnovala Institut za astrobiologiju (*NASA Astrobiology Institute* – NAI) 1998. godine, astrobiologija je postala formalna istraživačka grana. Nastanak je toga instituta proizašao iz sve većeg Nasinog zanimanja za planet Mars, najbliže izvanzemaljsko mjesto koje je potencijalno pogodno za život. Prijelomni je događaj vjerojatno bio otkriće antarktičkog meteorita ALH84001 1996. godine, podrijetlom s Marsa, u kojem su navodno nađeni mikrofosili izvanzemaljskog života [2].

NAI radi kao virtualni[4] institut i trenutno obuhvaća dvanaest američkih istraživačkih timova s preko 700 znanstvenika. Gotovo desetljeće nakon osnivanja, NAI ulazi u krizno razdoblje (u zadnje dvije godine NASA je smanjila financiranje astrobiologije za 50%) [2]. Težište istraživanja prebacuje se na druge institucije, uglavnom europske. Istraživačka središta za astrobiologiju danas postoje širom svijeta, npr. *Centro de Astrobiologia* u Španjolskoj i *Groupement de Recherche en Exobiologie* u Francuskoj, zatim *Australian Centre for Astrobiology*, *Astrobiology Society of Britain* te *European Exo/Astrobiology Network Association*. Također, mnoga ugledna sveučilišta nude studije astrobiologije.

Strateški plan astrobioloških istraživanja zacrtan je kroz sedam osnovnih znanstvenih ciljeva [4]:

1. **Shvatiti prirodu okoliša pogodnih za život i njihovu rasprostranjenost u svemiru**. Osnovna je komponenta ovoga cilja modeliranje razvoja planeta pogodnih za život. Ranije spomenuta mala tijela Sunčeva sustava, za koja se smatra da su ostaci od kojih se nisu uspjeli formirati planeti, važna su za astrobiologiju iz dva razloga: za stvaranje teorijskih modela nastanka i razvoja nastanjivih planeta te zbog sudara s ranom Zemljom koji su bitno utjecali na kemijski sastav buduće biosfere [5]. Druga važna komponenta prvoga cilja je posredno i neposredno opažanje ekstrasolarnih planeta pogodnih za život. Do danas je otkriveno preko 200 planeta izvan Sunčevog sustava.

---

[1] Autor je asistent u Institutu "Ruđer Bošković" u Zagrebu, e-mail: `dario.hrupec@irb.hr`

[2] Uključuje astronomiju, biologiju, kemiju i geologiju.

[3] Ponegdje se koriste i nazivi *egzobiologija* te *ksenobiologija* [3].

[4] Ne postoji jedno veliko središte. Istraživači su umjesto toga raspoređeni po raznim institutima i sveučilištima SAD-a.

Vrlo nedavno otkriven je prvi ekstrasolarni planet sličan Zemlji. U tom iznimnom otkriću sudjelovala je naša znanstvenica Dijana Dominis Prester [6].

2. **Istražiti nekadašnje ili sadašnje životne okoliše i znakove života izvan Sunčeva sustava**. U prvom je planu istraživanje Marsa, a zatim i ostatka Sunčevog sustava dalje od Marsa.

3. **Shvatiti kako je život potekao iz kozmičkih i planetarnih prethodnica**. Npr. kako su nastale i razvile se biomolekule [8].

4. **Razumjeti kako se nekadašnji život na Zemlji prilagođavao globalnim promjenama**. Npr. kako su iz rane biosfere nastali složeniji oblici života [8].

5. **Razumjeti evolucijske mehanizme ograničenja koja nameće okoliš**. Ovaj se cilj posebno odnosi na molekularnu evolucija mikroorganizama i njihovu prilagodbu na ekstremne uvjete životnog okoliša. Na samoj Zemlji su do sada otkriveni mnogi eksermofili, mikroorganizmi koji žive u ekstremnim uvjetima (s našeg gledišta) temperature, tlaka i kiselosti.

6. **Shvatiti principe koji će oblikovati budući život na Zemlji i izvan nje**. Naglasak je na prilagodbu živih organizama na izvanzemaljske uvjete života. Npr. svemirska biologija (engl. *space biology*) istražuje utjecaj svemirskih letova na žive organizme. Danas je dio astrobiologije premda je nastala puno ranije.

7. **Odrediti kako prepoznati znakove života na drugim svjetovima**. Nedavno je u Marsovoj atmosferi pronađen plin metan. S obzirom da metan u atmosferskim uvjetima na Marsu nije dugotrajno stabilan, mora postojati njegov stalni izvor. To bi mogla biti vulkanska aktivnost ili važan znak prisustva živih mikroorganizama. Aktivni vulkani na Marsu, međutim, još nisu opaženi.

Do danas nije nađena pouzdana potvrda postojanja izvanzemaljskog života [7]. Isto tako, nije nađen dokaz da su inteliglentni izvanzemaljci ikada posjetili Zemlju. To naglašavam kako bih istaknuo razliku između astrobiologije kao znanosti i holivudskog poimanja potrage za svemircima. Istinski cilj astrobiologije nije traženje ET-ja. Cilj je stvaranje preduvjeta za širenje čovječanstva izvan planeta Zemlje što se prije ili kasnije mora dogoditi, vjerojatno puno prije nego li Zemlja prestane biti pogodna za život [9]. Apeliram na mlade čitatelje da prerastu šund-literaturu tipa Däniken i naivne priče o posjetiteljima sa Siriusa koji pohode australijske domoroce. Preporučujem dvije izvrsne knjige koje ističu važnost kritičkog mišljenja, a bore se protiv zabluda i obmana: Saganov *Svijet progonjen demonima* [10] i Dawkinsovu knjigu *Vragov kapelan* [11].

Literatura

[1] L. Billings at al., *The Astrobiology Primer: An Outline of General Knowledge*, Astrobiology **6** (2006) 735–813.
[2] A. Lawler at al., *Astrobiology Fights for Its Life*, Science **315** (2007) 318–321.
[3] http://en.wikipedia.org/wiki/Astrobiology
[4] http://astrobiology.arc.nasa.gov/roadmap/
[5] D. Hrupec, *Kamenje koje pada s neba*, MFL **LVII** 1 (2006/ 2007).
[6] D. Dominis Prester, *Otkriće planeta sličnog zemlji pomoću metode gravitacijske leće*, MFL **LVII** 3 (2006/ 2007).
[7] J. Heidmann, A. Vidal-Madjar, N. Prantzos & H. Reeves, *Jesmo li sami u svemiru?* Izvori (2001).
[8] P. Davies, *Peto čudo: potraga za podrijetlom života*, Izvori (2001).
[9] C. Sagan, *Plava točka u beskraju: budućnost čovjeka u svemiru*, Sveučilišna knjižara (2002).
[10] C. Sagan, *Svijet progonjen demonima: znanost kao svijeća u tami*, Jesenski i Turk (2000).
[11] R. Dawkins, *Vragov kapelan: razmišljanja o nadi, lažima, znanosti i ljubavi* (Naklada Jesenski i Turk, 2005).



ZABAVNA MATEMATIKA

Računajte s nama

Profesor matematike Sedmak bio je toga jutra dobro raspoložen. Razred je odahnuo, ali je znao da će biti dosta posla. Profesor je počeo sat problemom.

— Malo ćemo kombinirati i računati. Evo, pogledajte ovaj račun zbrajanja. S jedne strane sve je u redu, jer je $JEDAN + JEDAN + PET$ zaista $SEDAM$.

```
    PET
  JEDAN
+ JEDAN
-------
  SEDAM
```

Ali, to nije sve!

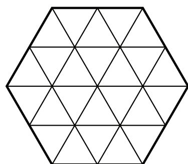
— Već znamo! — povikao je razred. — Sigurno treba devet različitih slova A, D, E, J, M, N, P, S i T zamijeniti brojkama od 0 do 9 tako da račun zbrajanja, i na taj način bude točan. Sigurno ima više rješenja.

— Pa kad znate, na posao! — završio je Sedmak.

Eto posla i za vas.

Paralelogrami

Na crtežu vidite pravilni šesterokut podijeljen na 24 sukladna jednakostranična trokuta. Međutim, na njemu se mogu uočiti i drugi likovi. Tako na njemu ima i 8 pravilnih šesterokuta, ali najuočljiviji su paralelogrami.



Vaš je zadatak upravo da odredite ukupan broj paralelograma na crtežu.

Djed i baka

Djed Franjo cijeli je život bio pravi stručnjak za kompliciranje jednostavnih stvari. Evo kako je on u poznim godinama odgovorio na pitanje novinara koliko mu je godina:

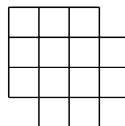
— Ja imam $\frac{5}{11}$ godina više nego je imala moja stara, Štefanija, tada kada sam ja imao toliko godina koliko ona ima sada. Kada Štefanija bude imala toliko godina koliko ja imam sada, mi ćemo zajedno, ako nas Bog poživi, imati 2007 godina.

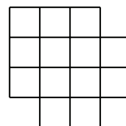
— 207 godina, Franjo, 207! — prijekorno je zaklimala glavom baka Štefanija.

Ipak, sve je jasno, zar ne?!

Slova i brojke

Za ovu malu kombinaciju imate na raspolaganju riječi *BEK*, *BOR*, *EBAN*, *KRDO*, *NON*, *OBRT*, *RADA* i *TEN* i dva sukladna lika. Najprije u lijevi lik treba upisati dane riječi, tako da se dobije ispravna križaljka. Zatim u dobivenoj križaljci treba slova zamijeniti brojkama od 0 do 9 i upisati ih na odgovarajuće mjesto u desnom liku, ali tako da zbroj brojeva u svakom retku i svakome stupcu bude isti i to 14.

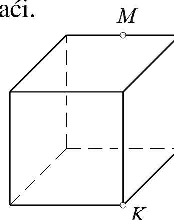




Ugodna zabava!

Mravov put

U polovištu M jednoga gornjeg brida kocke nalazi se gladni mrav, a kraj vrha K osnovke komadić je slatkoga kolača. Ovu čestu životnu situaciju mrav je riješio na najbolji mogući način: i ne znajući matematiku, on je od mnoštva različitih putova po kocki od M do K instinktivno izabrao onaj najkraći.



Opišite taj put.

Zdravko Kurnik



ZADACI I RJEŠENJA

Redakcija, iz tehničkih razloga, daje ovo upozorenje:

Krajnji rok za primanje rješenja iz ovog broja je 30. rujna 2007. Rješenja (i imena rješavatelja) bit će objavljena u br. 2/ 230.

Ujedno molimo da pripazite na upute rješavateljima koje su na dnu treće strane omota.[1]

A) Zadaci iz matematike

3049.* Neka su a, b, c međusobno različiti realni brojevi. Može li izraz

$$a^2(c-b)+b^2(a-c)+c^2(b-a)$$

biti jednak nuli?

3050.* Ako je x pozitivan broj takav da je $x^2+\dfrac{1}{x^2}=7$, odredi $x^5+\dfrac{1}{x^5}$.

3051. Nađi sva rješenja jednadžbe

$$\left|\left|x-\frac{5}{2}\right|-\frac{3}{2}\right|=\left|x^2-5x+4\right|.$$

3052.* Nađi sve dvoznamenkaste brojeve od kojih je svaki za 9 veći od zbroja kvadrata njegovih znamenaka.

3053. Ako za kompleksne brojeve z_1, z_2, z_3 vrijedi

$$z_1^2+z_2^2+z_3^2=z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1,$$

dokaži da je $z_1=z_2=z_3$ ili su z_1, z_2, z_3 u kompleksnoj ravnini vrhovi jednakostraničnog trokuta.

3054. Dokaži da za brojeve $a,\ b,\ c\in(0,1)$ vrijedi nejednakost

$$\log_a\frac{3bc}{bc+a(b+c)}+\log_b\frac{3ca}{ca+b(c+a)}+\log_c\frac{3ab}{ab+c(a+b)}\geq 0.$$

Kada se dostiže jednakost?

3055. Riješi jednadžbu

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{35}{12}.$$

3056. Oko trokuta ABC sa stranicama duljina a, b, c opisana je kružnica. Neka su m, n, p udaljenosti neke točke M na kružnici do stranica trokuta $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$. Dokaži da vrijedi

$$\frac{a}{m}=\frac{b}{n}+\frac{c}{p},$$

neovisno o izboru točke M.

3057.* Dan je trapez $ABCD$, kod kojeg je $BC\parallel AD$ i O sjecište njegovih dijagonala. Dokaži sljedeće omjere:

$$\frac{|AO|\cdot|OC|}{|AC|^2}=\frac{|OB|\cdot|OD|}{|BD|^2},$$

$$\frac{|OA|\cdot|OD|}{|AD|^2}=\frac{|OB|\cdot|OC|}{|BC|^2}.$$

3058. Ravnina paralelna bazi pravilnog stošca odsijeca njegov vrh, tako da se u dobiveni krnji stožac može upisati kugla čiji je volumen jednak polovini volumena krnjeg stošca. Koliki je kut između izvodnice stošca i ravnine njegove baze.

3059. Točke D, E, F su nožišta visina trokuta ABC. Ako je $|DF|=13$, $|EF|=14$, $|DE|=15$, odredi površinu trokuta ABC.

3060. Ako je točka H sjecište visina šiljastokutnog trokuta ABC, dokaži nejednakost

$$\frac{a}{|AH|}+\frac{b}{|BH|}+\frac{c}{|CH|}\geq\frac{s^2}{P},$$

gdje je $s=\dfrac{a+b+c}{2}$ i P površina tog trokuta.

3061. Kolika je vjerojatnost da se kod slučajnog izbora slova iz riječi "matematika" dobiju slova kojima se može sastaviti riječ "matka"?

3062. Dokaži da se iz svake točke O unutar tetraedra $ABCD$ mogu povući dužine $\overline{AA_1}$, $\overline{BB_1}$, $\overline{CC_1}$, $\overline{DD_1}$ (pri čemu su točke A_1, B_1, C_1, D_1 na stranama nasuprot vrhova A, B, C, D), tako da vrijedi nejednakost

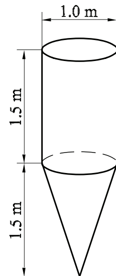
$$\frac{|AO|}{|OA_1|}+\frac{|BO|}{|OB_1|}+\frac{|CO|}{|OC_1|}+\frac{|DO|}{|OD_1|}\geq 12.$$

[1] Zadaci označeni zvjezdicom predviđeni su prvenstveno za 15 – 16 godišnje učenike.

B) Zadaci iz fizike

OŠ – 262. Drveni kvadar pliva na vodi. Kad se atmosferski tlak smanji hoće li on više ili manje uroniti u vodu? Ili će ostati jednako uronjen? Obrazložite odgovor.

OŠ – 263. Vodeni spremnik se puni vodom protokom od 0.75 litara u sekundi. Koliko vremena treba da se on napuni? Oblik i dimenzije spremnika su prikazani na slici.



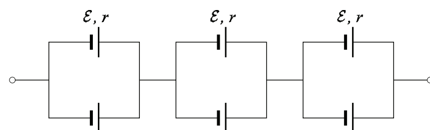
OŠ – 264. Dječak mase 50 kg se spušta po cesti dugoj 400 m na koturaljkama koristeći djelovanje sile teže. Cesta se spušta za 10 metara. Sila trenja prosječno iznosi 2.5 N. Koliko vremena bi trebalo dječaku da prođe cijelu cestu i koliku brzinu bi imao na kraju kad ne bi kočio?

OŠ – 265. Korisnost alkoholne grijalice je oko 20%. Koliko alkohola ona potroši dok zakuha litru vode početne temperature 20 °C? Specifična toplina izgaranja alkohola je 27 MJ/ kg.

1364. Koliki je omjer iznosa okomitog i tangecijalnog ubrzanja točke na rubu rotirajućeg kotača u trenutku kad vektor ukupnog ubrzanja te točke zatvara kut od 30° s vektorom linearne brzine?

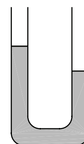
1365. Lonac cilindričnog oblika bez poklopca mase 1 kg i volumena 0.01 m^3 pluta na vodi (gustoće 1000 kg/ m^3) u uspravnom požaju s otvorom prema gore. Koliki je dio volumena lonca uronjen u vodu? Koliko je pijeska gustoće 3000 kg/ m^3 potrebno sipati u lonac da bi potonuo u vodi?

1366. Elektromotorna sila jedne baterije je e, a njezin unutarnji otpor r. Promotrimo sada spoj u kojem je u seriju spojeno m grupa po k baterija spojenih u paralelu unutar pojedine grupe (vidi sliku za poseban slučaj $m = 3$ i $k = 2$). Pronađite elektromotornu silu i unutarnji otpor tako dobivene baterije.



1367. Jedna vodljiva žica ima dva puta veći električni otpor od druge. Koja će oslobađati više topline u a) paralelnom, odnosno b) serijskom spoju ako su obje žice spojene na izvor istosmjerne električne struje?

1368. Živa ($\rho_{Hg} = 13\,600$ kg/ m^3) se nalazi u staklenoj cijevi kao na slici tako da je ukupan stupac duljine 20 cm. Cijev se malo protrese tako da živa počinje titrati oko ravnotežnog položaja. Kolika je frekvecija i period titranja?



1369. Nabijena čestica ulijeće u područje u kojem djeluju homogeno električno polje jakosti E i homogeno magnetsko polje indukcije B. Smjer električnog polja je okomit na smjer magnetskog, a smjer gibanja nabijene čestice je okomit na oba polja. Ako čestica prolazi bez otklanjanja, kolika je njezina brzina? Da li je moguće odrediti naboj čestice gore navedenim eksperimentom?

1370. Mala idealno absorbirajuća pločica mase 10 mg obješena je o nit duljine 20 mm i zanemarive mase. Bljesak laserske svjetlosti pada okomito na površinu pločice i otklanja je za kut od 0.6°. Odredite energiju laserskog bljeska.

C) Rješenja iz matematike

3021. *Dokaži da za svake pozitivne brojeve a, b, c vrijedi nejednakost*

$$a^2(b+c-a)+b^2(c+a-b)+c^2(a+b-c) \leqslant 3abc.$$

Rješenje. Bez smanjena općenitosti možemo pretpostaviti da je $a \geqslant b \geqslant c > 0$. Razliku desne i lijeve strane svodimo na oblik

$$3abc + a^2(a-b-c) + b^2(b-a-c)$$
$$+ c^2(c-a-b)$$
$$= 3abc + a^3 + b^3 + c^3$$
$$- a^2b - ab^2 - a^2c - ac^2 - b^2c - bc^2$$
$$= a^2(a-b) + b^2(b-a) + c(2ab - a^2 - b^2)$$
$$+ c(ab + c^2 - ac - bc)$$
$$= (a-b)(a^2-b^2) - c(a-b)^2$$
$$+ c(c-a)(c-b)$$
$$= (a-b)^2(a+b-c) + c(a-c)(b-c) \geqslant 0,$$

jer je $a+b > c$, $a \geqslant c$, $b \geqslant c$, $c > 0$.
Jednakost vrijedi ako i samo ako je $a = b = c$.

Vanja Ubović (1),
Gimnazija P. Preradovića, Virovitica

3022. *Ako je* $a < b$, $c < d$ *i*

$$a^2 + b^2 = c^2 + d^2,$$
$$a + b + c + d = 0,$$

pokaži da je $c = -b$ *i* $d = -a$.

Rješenje.

$$a + b + c + d = 0$$
$$\Longrightarrow a + b = -(c+d) \ / \ ^2$$
$$\Longrightarrow ab = cd \ / \ : ac \quad (a \neq 0, \ c \neq 0)$$
$$\frac{b}{c} = \frac{d}{a} = k,$$
$$b = k \cdot c, \ d = k \cdot a. \qquad (*)$$

Sada imamo

$$a + kc + c + ka = 0,$$
$$(k+1)(a+c) = 0.$$

1° $a + c = 0 \Longrightarrow c = -a$, $d = -b$.

Uz pretpostavke zadatka je

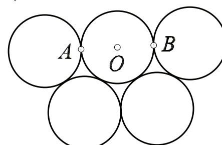
$$a < b \ / \cdot (-1)$$
$$-a > -b$$
$$c > d,$$

a pretpostavka je $c < d$, pa dolazimo do kontradikcije.
2° $k+1 = 0 \Longrightarrow k = -1$, $(*)$ $\Longrightarrow c = -b$, $d = -a$.

Mediha Zukić (4),
Gimnazija Visoko, Visoko, BiH

3023. *Kružnim novčićem nacrtana je kružnica. Pomoću tog novčića konstruiraj dijametralno suprotnu točku dane točke na toj kružnici.*

Rješenje. Izaberimo točku A na kružnici i nacrtajmo novu kružnicu koja izvana dodiruje (u točki A) prvu kružnicu. Novčićem nacrtamo još tri kružnice tako da svaka dira po dvije izvana (slika).



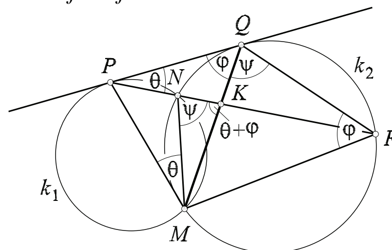
Dijametralno suprotna točka točki A je B, jer je kut

$$\sphericalangle AOB = 3 \cdot 60^\circ = 180^\circ.$$

Mediha Zukić (4), Visoko, BiH

3024. *Zajednička tangenta kružnica* k_1 *i* k_2 *dira* k_1 *i točki* P, *a* k_2 *u točki* Q. *Kružnice* k_1 *i* k_2 *sijeku se u točkama* M *i* N, *pri čemu je* N *bliže pravcu* PQ *nego* M. *Pravac* PN *siječe kružnicu* k_2 *još i u točki* R. *Dokaži da je* MQ *simetrala kuta* $\sphericalangle PMR$.

Prvo rješenje.



Znači treba dokazati da je $\sphericalangle KMR = \sphericalangle QMP$. Kut između tangente i tetive jednak je obodnom kutu nad tom tetivom, pa je

$$\sphericalangle MQP = \sphericalangle MRQ = \varphi,$$
$$\sphericalangle QPN = \sphericalangle PMN = \theta.$$

Obodni kutovi nad jednakim tetivama, kod iste kružnice, su jednaki, pa je

$\sphericalangle RQM = \sphericalangle RNM = \psi$,

$\sphericalangle RMQ = 180^\circ - \psi - \varphi$ (trokut RMQ).

$\sphericalangle KMN = 180^\circ - \psi - \sphericalangle MKN$ (trokut KMN),

$\sphericalangle MKN = \varphi + \theta$ (vanjski kut za $\triangle PQK$),

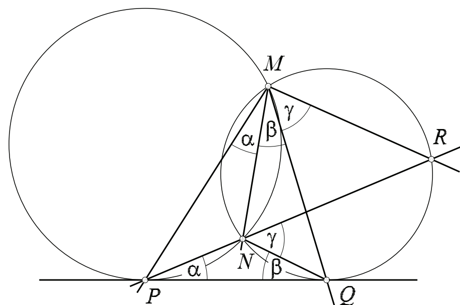
$\sphericalangle KMN = 180^\circ - \psi - \varphi - \theta,$

$\sphericalangle QMP = \sphericalangle KMN + \theta = 180^\circ - \varphi - \psi.$

Sada uzmemo da je $\sphericalangle RMQ = \sphericalangle QMP$ čime je tvrdnja dokazana.

Mediha Zukić (4), Visoko, BiH

Drugo rješenje. Označimo $\alpha = \sphericalangle PMN$, $\beta = \sphericalangle NMQ$, $\gamma = \sphericalangle QMR$.



Tada je $\sphericalangle QPN = \alpha$ i $\sphericalangle PQN = \beta$, te je i $\sphericalangle QNR = \gamma$ (kutovi nad istom tetivom). Osim toga je $\sphericalangle QNR = \sphericalangle QPN + \sphericalangle PQN$, tj. $\alpha + \beta = \gamma$, tj. $\sphericalangle PMQ = \sphericalangle QMR$.

Ur.

3025. *Na stranicama $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DA}$ konveksnog četverokuta $ABCD$ površine P izabrane su točke M, N, P, Q tako da je*

$$\frac{|AM|}{|AB|} = \frac{|CP|}{|CD|} \quad i \quad \frac{|BN|}{|BC|} = \frac{|DQ|}{|DA|}.$$

Nađi zbroj površina trokuta ABP, BCQ, CDM, DAN.

Rješenje.

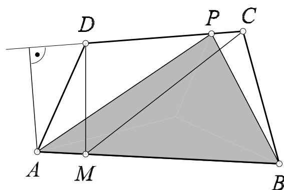
$$\frac{|AM|}{|AB|} = \frac{|CP|}{|CD|} = m$$

$$\Longrightarrow |AM| = m|AB|, \ |CP| = m|CD|,$$

$$\frac{|BN|}{|BC|} = \frac{|DQ|}{|DA|} = k$$

$$\Longrightarrow |BN| = k|BC|, \ |DQ| = k|DA|.$$

$$P_{\triangle ABP} = P - P_{\triangle APD} - P_{\triangle BCP}.$$



Visina $\triangle APD$ je ista kao i u $\triangle ACD$, visina $\triangle BCP$ je ista kao i u $\triangle BCD$;

$$P_{\triangle ABP} = P - (1-m)P_{\triangle ACD} - mP_{\triangle BCD},$$

$$P_{\triangle CDM} = P - P_{\triangle AMD} - P_{BCM}.$$

Visina $\triangle AMD$ je ista kao i u $\triangle ABD$, visina $\triangle BCM$ je ista kao i u $\triangle ABC$.

$$P_{\triangle CDM} = P - mP_{\triangle ABD} - (1-m)P_{\triangle ABC}$$

$$\begin{aligned} P_{\triangle ABP} + P_{\triangle CDM} &= 2P - m\left(P_{\triangle BCD} + P_{\triangle ABD}\right) \\ &\quad - (1-m)\left(P_{\triangle ABC} + P_{\triangle ACD}\right) \\ &= 2P - mP - (1-m)P = P. \end{aligned}$$

Analogno je $P_{\triangle BCQ} + P_{\triangle DAN} = P$, pa je zbroj traženih površina trokuta jednak $2P$.

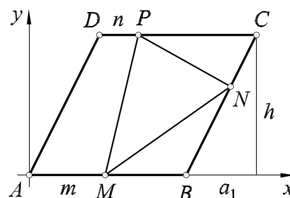
Mediha Zukić (4), Visoko, BiH

3026. *Neka je $ABCD$ romb i M, N, P redom točke unutar stranica $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$. Dokaži da je težište trokuta MNP na pravcu AC ako i samo ako je $|AM| + |DP| = |BN|$.*

Prvo rješenje. Koordinate vrhova romba su $A(0,0)$, $B(a,0)$, $C(a+a_1,h)$, $D(a_1,h)$.

$$|AM| = m, \quad |DP| = n$$

$$\Longrightarrow M(m,\ 0),\ P(a_1+n,\ h).$$



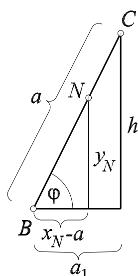
Pretpostavimo da vrijedi dana jednakost, $|BN| = m + n$.

$$\sin\varphi = \frac{h}{a}, \quad \sin\varphi = \frac{y_N}{|BN|},$$

$$\frac{h}{a} = \frac{y_N}{m+n}, \quad y_N = \frac{h}{a}(m+n).$$

$$\cos\varphi = \frac{a_1}{a}, \quad \cos\varphi = \frac{x_N - a}{m+n},$$

$$ax_N - a^2 = a_1(m+n),\ x_N = \frac{a_1(m+n)}{a} + a.$$

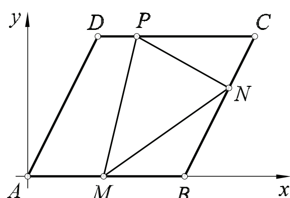


$$AC:\ y=\frac{h}{a+a_1}x,$$

$$x_T=\frac{x_M+x_N+x_P}{3}=\frac{1}{3}(m+n+a)\left(1+\frac{a_1}{a}\right),$$

$$y_T=\frac{y_M+y_N+y_P}{3}=\frac{1}{3}(m+n+a)\frac{h}{a},$$

$$y_T=\frac{h}{a+a_1}x_T,\quad \text{tj.}\quad T\in AC.$$



Obrnuto: neka je $T\in AC$. Tada je

$$y_T=\frac{h}{a+a_1}x_T.$$

$$(a+a_1)y_T=hx_T,$$

$$(a+a_1)\cdot\frac{1}{3}(y_M+y_N+y_P)$$
$$=h\cdot\frac{1}{3}(x_M+x_N+x_P),$$

$$(a+a_1)\left(\frac{h|BN|}{a}+h\right)$$
$$=h\left(|AM|+\frac{|BN|a_1}{a}+a+a_1+|DP|\right),$$

$$(a+a_1)\frac{|BN|+a}{a}$$
$$=|AM|+|DP|+a+\frac{a_1(|BN|+a)}{a},$$

$$|BN|+a+a_1\frac{|BN|+a}{a}$$
$$=|AM|+|DP|+a+a_1\frac{|BN|+a}{a},$$

$$|AM|+|DP|=|BN|.$$

Mediha Zukić (4), Visoko, BiH

Drugo rješenje. Neka je O sjecište dijagonala. Koristit ćemo vektore. Označimo

$$\frac{|AM|}{|AB|}=m,\qquad \frac{|BN|}{|BC|}=n,\qquad \frac{|DP|}{|DC|}=p.$$

Kako je $|AB|=|BC|=|DC|$, uvjet $|AM|+|DP|=|BN|$ možemo zapisati kao $m+p=n$.

Promatrajmo vektore

$$\overrightarrow{OM}=(1-m)\overrightarrow{OA}+m\overrightarrow{OB},$$

$$\overrightarrow{ON}=(1-n)\overrightarrow{OB}+n\overrightarrow{OC},$$

$$\overrightarrow{OP}=(1-p)\overrightarrow{OD}+p\overrightarrow{OC}.$$

Neka je T težište trokuta MNP. Kako je $\overrightarrow{OA}=-\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OD}=-\overrightarrow{OB}$ i $3\overrightarrow{OT}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{OP}$, dobivamo

$$3\overrightarrow{OT}=(m+n+p-1)\overrightarrow{OC}+(m-n+p)\overrightarrow{OB}.$$

Težište T pripada pravcu AC ako i samo ako su vektori $\overrightarrow{OT}$ i $\overrightarrow{OC}$ kolinearni, tj. ako i samo ako je $m-n+p=0$, što je i trebalo dokazati.

Ur.

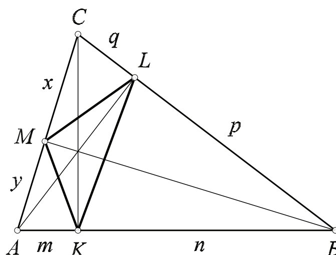
3027. *Neka su K, L, M nožišta visina trokuta ABC. Ako je O opseg trokuta KLM i P površina trokuta ABC, dokaži da je*

$$P=\frac{O\cdot R}{2},$$

gdje je R polumjer trokutu ABC opisane kružnice.

Rješenje. Prema kosinusovom poučku je

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\gamma,$$
$$b^2=a^2+c^2-2ac\cos\beta,$$
$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha.$$



$$\triangle BKC \implies \cos\beta = \frac{n}{a}, \text{ tj. } n = a\cos\beta$$
$$\triangle BAL \implies \cos\beta = \frac{p}{c}, \text{ tj. } p = c\cos\beta$$

$\triangle BKL \implies$
$$\begin{aligned}|KL|^2 &= n^2 + p^2 - 2np\cos\beta \\ &= a^2\cos^2\beta + c^2\cos^2\beta - 2ac\cos^3\beta \\ &= \left(a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta\right)\cos^2\beta \\ &= b^2\cos^2\beta \implies |KL| = b\cos\beta.\end{aligned}$$

Analogno je
$$|MK| = a\cos\alpha \quad \text{i} \quad |ML| = c\cos\gamma.$$
$$O = a\cos\alpha + b\cos\beta + c\cos\gamma.$$

Prema poučku o sinusima je
$$a = 2R\sin\alpha, \quad b = 2R\sin\beta, \quad c = 2R\sin\gamma,$$
$$\begin{aligned}O &= R(\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma) \\ &= R[2\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta) + \sin 2\gamma] \\ &= 2R\sin\gamma[\cos(\alpha-\beta) + \cos\gamma] \\ &= 2R\sin\gamma[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)] \\ &= 2R\sin\gamma\cdot(-2)\sin\alpha\sin(-\beta) \\ &= 4R\sin\alpha\sin\gamma\sin\beta.\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}P &= \frac{ab\sin\gamma}{2} \\ &= \frac{\sin\gamma}{2}\cdot 2R\sin\alpha\cdot 2R\sin\beta \\ &= 2R^2\sin\alpha\sin\gamma\sin\beta.\end{aligned}$$

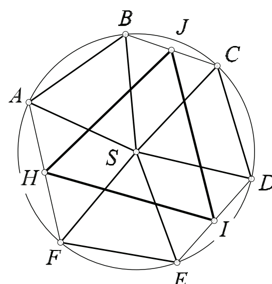
Konačno je $P = \dfrac{OR}{2}$.

Mediha Zukić (4), Visoko, BiH

3028. *Dana su tri sukladna jednakostranična trokuta ABS, CDS i EFS. Dokaži da su polovišta dužina $\overline{BC}$, $\overline{DE}$, $\overline{FA}$ vrhovi jednakostraničnog trokuta.*

Rješenje. Zadatak ćemo riješiti pomoću kompleksnih brojeva. Točkama A, B, C, D, E, F pridruženi su kompleksni brojevi:

$$A\ldots z_A = e^{i\varphi_1}, \qquad B\ldots z_B = e^{i(\varphi_1 - \frac{\pi}{3})},$$
$$C\ldots z_c = e^{i\varphi_2}, \qquad D\ldots z_D = e^{i(\varphi_2 - \frac{\pi}{3})},$$
$$E\ldots z_E = e^{i\varphi_3}, \qquad F\ldots z_F = e^{i(\varphi_3 - \frac{\pi}{3})}.$$



Danim polovištima pridruženi su brojevi:
$$H\ldots z_H = \frac{z_A + z_F}{2},$$
$$J\ldots z_J = \frac{z_B + z_C}{2},$$
$$I\ldots z_I = \frac{z_D + z_E}{2}.$$

Dužinama $\overline{HI}$ i $\overline{HJ}$ pridruženi su brojevi:
$$\begin{aligned}\overline{HI}\ldots 2z_{HI} &= 2(z_I - z_H) = z_D + z_E - z_A - z_F \\ &= e^{i(\varphi_2 - \frac{\pi}{3})} + e^{i\varphi_3} - e^{i\varphi_1} - e^{i(\varphi_3 - \frac{\pi}{3})},\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}\overline{HJ}\ldots 2z_{HJ} &= 2(z_J - z_H) = z_B + z_C - z_A - z_F \\ &= e^{i(\varphi_1 - \frac{\pi}{3})} + e^{i\varphi_2} - e^{i\varphi_1} - e^{i(\varphi_3 - \frac{\pi}{3})}.\end{aligned}$$

Sada ćemo pokazati $z_{HJ} = z_{HI}\cdot e^{i\frac{\pi}{3}}$. Naime,
$$\begin{aligned}2z_{HI}\cdot e^{i\frac{\pi}{3}} &= e^{i\varphi_2} + e^{i(\varphi_3 + \frac{\pi}{3})} - e^{i(\varphi_1 + \frac{\pi}{3})} - e^{i\varphi_3} \\ &= e^{i\varphi_2} + \left(\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)e^{i\varphi_3} \\ &\quad - \left(\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)e^{i\varphi_1} - e^{i\varphi_3} \\ &= e^{i\varphi_2} + \left(-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)e^{i\varphi_3} \\ &\quad - \left(\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)e^{i\varphi_1},\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}2z_{HJ} &= \left(\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)e^{i\varphi_1} + e^{i\varphi_2} \\ &\quad - e^{i\varphi_1} - \left(\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)e^{i\varphi_3} \\ &= -\left(\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)e^{i\varphi_1} + e^{i\varphi_2} \\ &\quad + \left(-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)e^{i\varphi_3},\end{aligned}$$

tj. $z_{HJ} = z_{HI}e^{i\frac{\pi}{3}}$, i $\triangle HIJ$ je jednakostraničan.

Ur.

3029. *Dokaži da za svaki realan broj a i svaki prirodan broj n vrijede jednakosti*

$$\sum_{k=0}^{n-1} \sin\left(a+\frac{2k\pi}{n}\right)=0,$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} \cos\left(a+\frac{2k\pi}{n}\right)=0.$$

Rješenje. Uz $\varphi_0=\dfrac{2\pi}{N}$ imamo

$$S_1+iS_2=\sum_{k=0}^{n-1} e^{i(a+k\varphi_0)}=e^{ia}\sum_{k=0}^{n-1} e^{ik\varphi_0}$$
$$=e^{ia}\cdot\frac{e^{in\varphi_0}-1}{1-e^{i\varphi_0}}$$
$$=e^{ia}\cdot\frac{e^{i\cdot 2\pi}-1}{1-e^{i\varphi_0}}=0,$$

odakle je $S_1=S_2=0$.

Mediha Zukić (4), Visoko, BiH

3030. *Dani su brojevi $a,b,c\in(1,\infty)$. Dokaži nejednakost*

$$\log_a^4 b+\log_b^4 c+\log_c^4 a\geqslant \log_a b+\log_b c+\log_c a.$$

Prvo rješenje. Vrijedi nejednakost:

$$x^2+y^2+z^2\geqslant xy+xz+yz \qquad (1)$$

$\iff (x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\geqslant 0$, za $\forall\ x,\ y,\ z\in\mathbf{R}$.

Stavimo li

$$x=\log_a^2 b;\quad y=\log_b^2 c;\quad z=\log_c^2 a$$

dobivamo

$$\log_a^4 b+\log_b^4 c+\log_c^4 a$$
$$\geqslant(\log_a b\cdot\log_b c)^2+(\log_b c\cdot\log_c a)^2$$
$$+(\log_a b\cdot\log_c a)^2$$
$$=\log_a^2 c+\log_b^2 a+\log_c^2 b$$
$$\overset{(1)}{\geqslant}\log_a c\cdot\log_b a+\log_a c\cdot\log_c b$$
$$+\log_c b\cdot\log_b a$$
$$=\log_b c+\log_a b+\log_c a.$$

Jednakost vrijedi ako i samo ako je $a=b=c$.

Haris Čaušević (3),
Treća gimnazija, Sarajevo, BiH

Drugo rješenje. Neka su $x,y,z\in(0,\infty)$. Tada je

$$x^4+y^4+z^4=\left[\frac{x^4+y^4}{2}+\frac{y^4+z^4}{2}+\frac{z^4+x^4}{2}\right]$$
$$\geqslant x^2y^2+y^2z^2+x^2y^2$$
$$=\left[\frac{x^2y^2+y^2z^2}{2}+\frac{y^2z^2+z^2x^2}{2}+\frac{z^2x^2+x^2y^2}{2}\right]$$
$$\geqslant xy^2z+xyz^2+x^2yz=xyz(x+y+z).$$

Za $x=\log_a b>0$, $y=\log_a c>0$, $z=\log_c a$ je

$$\log_a^4 b+\log_b^4 c+\log_c^4 a$$
$$\geqslant\log_a b\log_a c\log_c a(\log_a b+\log_b c+\log_c a)$$
$$=\log_a b+\log_b c+\log_c a.$$

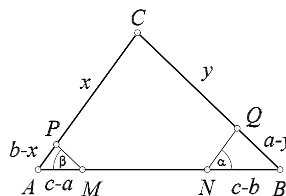
Ur.

3031. *Na najvećoj stranici $\overline{AB}$ trokuta ABC dane su točke M i N, takve da je $|BM|=|BC|$ i $|AN|=|AC|$, te točke $P\in\overline{AC}$ i $Q\in\overline{BC}$, takve da je $PM\|BC$ i $QN\|AC$. Dokaži da je $|CP|=|CQ|$.*

Rješenje.

$$|BM|=|BC|=a,\quad |AN|=|AC|=b,$$
$$PM\|BC,\quad QN\|AC,$$
$$|CP|=x\quad\text{i}\quad|CQ|=y.$$

$\sphericalangle BNQ=\alpha$, $\sphericalangle AMP=\beta$ (kutovi s paralelnim kracima).



Kako je $PM\|BC$, $\triangle ABC\sim\triangle AMP$

$$(b-x):(c-a)=b:c\implies x=\frac{ab}{c}.$$
$$QN\|AC\implies\triangle ABC\sim\triangle NBQ$$
$$(a-y):(c-b)=a:c\implies y=\frac{ab}{c}.$$

Slijedi $|CP|=\dfrac{ab}{c}=|CQ|$.

Mediha Zukić (4), Visoko, BiH

3032. *Odredi sve prirodne brojeve n takve da je produkt svih (prirodnih) djelitelja od n jednak $2^3 \cdot 3^6$.*

Rješenje. Za $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_r^{\alpha_r}$ broj njegovih djelitelja je

$$A = (\alpha_1 + 1) \cdot (\alpha_2 + 1) \cdot \ldots \cdot (\alpha_r + 1)$$

a njihov produkt iznosi $n^{\frac{A}{2}}$. Zato mora biti

$$n = 2^\alpha \cdot 3^\beta \quad \text{i}$$
$$(2^\alpha \cdot 3^\beta)^{\frac{1}{2}(\alpha+1)(\beta+1)} = 2^3 \cdot 3^6,$$

odnosno

$$\frac{1}{2}\alpha(\alpha+1)(\beta+1) = 3 \qquad \text{i}$$
$$\frac{1}{2}\beta(\beta+1)(\alpha+1) = 6 \implies \beta = 2\alpha,$$

pa iz $\alpha(\alpha+1)(2\alpha+1) = 6$ slijedi

$$\alpha = 1, \quad \beta = 2, \quad n = 2 \cdot 3^2 = 18.$$

Ur.

3033. *Odredi sumu*

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{\binom{n}{k}}{\binom{2n-1}{k}}.$$

Rješenje. Iz

$$\frac{\binom{n}{k}}{\binom{2n}{k}} - \frac{\binom{n}{k+1}}{\binom{2n}{k+1}}$$
$$= \frac{n!(2n-k)!}{(n-k)!(2n)!} - \frac{n!(2n-k-1)!}{(n-k-1)!(2n)!}$$
$$= \frac{n!(2n-k-1)!}{(n-k)!(2n-1)!}\left(\frac{2n-k}{2n} - \frac{n-k}{2n}\right)$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\binom{n}{k}}{\binom{2n-1}{k}},$$

dobivamo

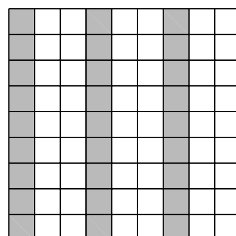
$$S = 2\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{\binom{n}{k}}{\binom{2n}{k}} - \frac{\binom{n}{k+1}}{\binom{2n}{k+1}}\right)$$

$$= 2\left(\frac{\binom{n}{0}}{\binom{2n}{0}} - \frac{\binom{n}{n+1}}{\binom{2n}{n+1}}\right) = 2.$$

Ur.

3034. *Ploča 9×9 je popločena pločicama 1×3, pri čemu svaka pločica može biti okrenuta horizontalno ili vertikalno. Dokaži da je broj horizontalnih pločica djeljiv s 3.*

Rješenje. Obojimo polja kao na slici.



Svaka horizontalna pločica prekriva 1 crno polje. Svaka vertikalna pločica prekriva 0 ili 3 crna polja. Zato su broj horizontalnih pločica i ukupan broj crnih polja kongruentni modulo 3. Ukupan broj crnih polja je 27, a to je djeljivo s 3.

Vanja Ubović (1), Virovitica

D) Rješenja iz fizike

OŠ – 254. *Aluminijski valjak ima promjer 6 cm i visinu 8 cm. Kad ga se uroni u vodu on ostane na dubini na koju je uronjen. Izračunaj obujam šupljine unutar njega. Gustoća aluminija je 2 700 kg/m^3, a vode 1 000 kg/m^3.*

Prvo rješenje.

$2r = 6$ cm

$h = 8$ cm

$\rho_{\text{aluminija}} = 2\,700$ kg/ m^3

$\rho_{\text{vode}} = 1\,000$ kg/ m^3

$V_{\text{šupljine}} = ?$

$$V_{\text{valjka}} = r^2 \cdot \pi \cdot h = (3 \text{ cm})^2 \cdot \pi \cdot 8 \text{ cm}$$
$$= 226.2 \text{ cm}^3 = 226.2 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3$$

Sila uzgona koja djeluje na valjak je jednaka težini valjka.

$$F_u = \rho_{\text{vode}} \cdot g \cdot V_{\text{valjka}}$$
$$= 1\,000 \text{ kg/ m}^3 \cdot 10 \text{ N/kg} \cdot 226.2 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3$$
$$= 2.262 \text{ N}.$$

Dakle,

$$G = 2.262 \text{ N},$$
$$m_{\text{valjka}} = \frac{G}{g} = 0.2262 \text{ kg},$$
$$V_{\text{aluminija}} = \frac{m}{\rho} = \frac{0.226 \text{ kg}}{2\,700 \text{ kg/ m}^3}$$
$$= 8.38 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3 = 83.8 \text{ cm}^3,$$
$$V_{\text{šupljine}} = V_{\text{valjka}} - V_{\text{aluminija}}$$
$$= 226.2 \text{ cm}^3 - 83.8 \text{ cm}^3 = 142.4 \text{ cm}^3.$$

Anamarija Birkeš (7),
OŠ Fausta Vrančića, Šibenik

Drugo rješenje.

$$\rho_A = 2\,700 \text{ kg/ m}^3$$
$$\rho_V = 1\,000 \text{ kg/ m}^3$$
$$d = 2r = 6 \text{ cm} = 6 \cdot 10^{-2} \text{ m}$$
$$r = 3 \text{ cm} = 3 \cdot 10^{-2} \text{ m}$$
$$h = 8 \text{ cm} = 8 \cdot 10^{-2} \text{ m}$$
$$g = 9.81 \text{ N/ kg}$$
$$V_š = ?$$

Na tijelo djeluje sila teža prema dolje:

$$F_g = mg = \rho_A(V - V_š)g = \rho_A(r^2\pi h - V_š)g.$$

Sila uzgona djeluje prema gore:

$$F_u = \rho_V V g = \rho_V r^2 \pi h g.$$

Kako tijelo ostaje na istoj dubini na koju je uronjeno ove dvije sile su jednake pa vrijedi

$$F_g = Fu, \quad \text{tj.}$$
$$\rho_A(r^2\pi h - V_š)g = \rho_V r^2 \pi h g.$$

Ako cijelu jednadžbu podijelimo s g dobit ćemo:

$$\rho_A r^2 \pi h - \rho_A V_š = \rho_V r^2 \pi h,$$
$$\rho_A V_š = \rho_A r^2 \pi h - \rho_V r^2 \pi h,$$
$$V_š = \frac{(\rho_A - \rho_V) r^2 \pi h}{\rho_A},$$
$$V_š = (2700 \text{ kg/ m}^3 - 1000 \text{ kg/ m}^3)(3 \cdot 10^{-2} \text{ m})^2 \cdot \frac{3.14 \cdot 8 \cdot 10^{-2} \text{ m}}{2700 \text{ kg/ m}^3},$$
$$V_š = 1.423 \cdot 10^{-4} = 142.3 \text{ cm}^3.$$

Zlatan Tucaković (8),
OŠ Musa Ćazim Ćatić, Sarajevo, BiH

OŠ – 255. *Koliko električne energije pretvori u toplinu električna žarulja snage 20 W za 3 sata? Njena korisnost je 40%. Izračunaj jakost električne struje koja teče žaruljom kad je ona spojena na napon 220 V.*

Rješenje.

$$P = 20 \text{ W}$$
$$U = 220 \text{ V}$$
$$\eta = 40\% = 0.4$$
$$t = 3 \text{ h}$$
$$Q = ?$$
$$I = ?$$

Žarulja je ukupno potrošila

$$E = W = Pt = 20 \text{ W} \cdot 10\,800 \text{ s} = 216\,000 \text{ J}$$

električne energije.

U svjetlost je pretvoreno:

$$E = 0.4 \cdot 216\,000 \text{ J} = 86\,400 \text{ J}$$

električne energije. Dakle, u toplinu je pretvoreno

$$Q = 216\,000 \text{ J} - 86\,400 \text{ J} = 129\,600 \text{ J}$$

električne energije.

Kroz žarulju teče struja:

$$I = \frac{P}{U} = \frac{1}{11} \text{ A} = 0.091 \text{ A}.$$

Zlatan Tucaković (8), Sarajevo, BiH

OŠ – 256. *Otpornici A i B su jednaki i spojeni serijski na izvor napona 24 V. Jakost struje koja teče tim strujnim krugom iznosi 800 mA. Ako želimo smanjiti jakost struje u tom krugu na 600 mA, zamjenom otpornika B, koliki mora biti otpor otpornika C koji bi došao na njegovo mjesto?*

Rješenje.

$$R_A = R_B = R_1$$
$$I_1 = 800 \text{ mA}$$

$$I_2 = 600 \text{ mA}$$
$$\underline{U = 24 \text{ V}}$$
$$R_C = ?$$

Jakost struje u prvom slučaju iznosi

$$I = \frac{U}{R_1 + R_1},$$

odakle slijedi da je vrijednost otpora

$$R_1 = R_A = R_B = \frac{U}{2I} = 15\ \Omega.$$

U drugom slučaju ukupni otpor strujnog kruga je

$$R_2 = \frac{U}{I} = \frac{24 \text{ V}}{0.6 \text{ A}} = 40\ \Omega,$$
$$R_C = R_2 - R_A = 25\ \Omega.$$

Ukoliko otpornik B od 15 Ω zamijenimo otpornikom C od 25 Ω struja će se smanjiti na 600 mA.

Zlatan Tucaković (8), Sarajevo, BiH

OŠ – 257. *Sjemenke rogača su sve jednake i po njima je određena mjera za dragocjenost, karat. Karat ima 0.2 grama. Izračunaj obujam i gustoću sjemenke rogača ako je obujam 30 sjemenki 4.8 cm*^{3}.

Rješenje.

$$m = 0.2 \text{ g}$$
$$\underline{V = 4.8 \text{ cm}^3}$$
$$V_1 = ?$$
$$\rho = g?$$
$$V_1 = \frac{V}{30} = \frac{4.8 \text{ cm}^3}{30} = 0.16 \text{ cm}^3.$$

Obujam jedne sjemenke je 0.16 cm^3.

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{0.2 \text{ g}}{0.16 \text{ cm}^3} = 1.25 \text{ g/cm}^3$$
$$= 1250 \text{ kg/m}^3$$

Anamarija Birkeš (7), Šibenik

1350. *Dva vlaka duljina 180 m i 120 m voze po paralelnim prugama. Kada voze u istom smjeru, dulji vlak pretiče kraći i putnik iz duljeg vlaka vidi kraći 80 s ako gleda kroz prozor okomito na smjer vožnje. Kada voze u suprotnom smjeru, putnik iz kraćeg vlaka vidi dulji 9 s. Kolike su brzine vlakova?*

Rješenje.

$$d_1 = 180 \text{ m}$$
$$d_2 = 120 \text{ m}$$
$$t_1 = 80 \text{ s}$$
$$\underline{t_2 = 9 \text{ s}}$$
$$v_1 = ?$$
$$v_2 = ?$$

Kada se vlakovi kreću u istom smjeru, dulji pretiče kraći pa mora biti

$$v_1 > v_2 \quad \text{i} \quad (v_1 - v_2)t_1 = d_2$$
$$v_1 - v_2 = \frac{d_2}{t_1} = 1.5 \text{ m/s}. \qquad (1)$$

Kada se kreću u istom smjeru:

$$(v_1 + v_2)t_2 = d_1$$
$$v_1 + v_2 = \frac{d_1}{t_2} = 20 \text{ m/s}. \qquad (2)$$

Iz (1) i (2) se dobiva

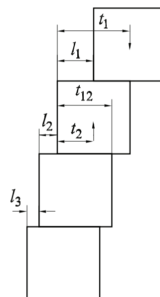
$$v_1 = 10.75 \text{ m/s}, \qquad v_2 = 9.25 \text{ m/s}.$$

Brzina duljeg vlaka je 10.75 m/s, a brzina kraćeg vlaka je 9.25 m/s.

Zlatan Tucaković (8), Sarajevo, BiH

1351. *Četiri homogene kocke gustoće ρ i duljine brida a slažemo jednu na drugu. Odredite koliko najviše gornja kocka može biti horizontalno pomaknuta u odnosu na najnižu, a da se one ne sruše.*

Rješenje. Kocke se slažu kao na slici.



Da kocka na vrhu ne bi pala, njezino težište mora biti vertikalno iznad druge kocke koja se nalazi ispod nje. To znači da se za maksimalni pomak ono mora nalaziti iznad ruba druge kocke. Kako se težište homogene kocke nalazi u njezinom središtu, za horizontalni pomak

prve kocke u odnosu na drugu vrijedi $l_1 = \frac{a}{2}$. Težište tako složenih prvih dviju kocaka mora biti iznad ruba treće, a ovih triju iznad četvrte. Horizontalni položaj težišta n kocaka mase m je:

$$t_{12\ldots n} = \frac{mt_1 + mt_2 + \ldots + mt_n}{m + m + \ldots + m} = \frac{t_1 + t_2 + \ldots + t_n}{n},$$

gdje je t_i horizontalni položaj težišta pojedine kocke.

Horizontalni pomak druge u odnosu na treću je $l_2 = a - t_{12}$, gdje je t_{12} horizontalna udaljenost težišta prve dvije kocke od lijevog ruba druge (vidi sliku).

Ukupno težište prve dvije kocke je

$$t_{12} = \frac{a + \frac{a}{2}}{2} = \frac{3}{4}a,$$

pa stoga

$$l_2 = \frac{1}{4}a.$$

Analogno dobivamo za tri kocke

$$t_{123} = \frac{\frac{5}{4}a + \frac{3}{4}a + \frac{1}{2}a}{3} = \frac{5}{6}a \quad \text{i}$$

$$l_3 = a - t_{123} = \frac{1}{6}a.$$

Ukupni pomak prve u odnosu na četvrtu kocku je:

$$l = l_1 + l_2 + l_3 = \frac{11}{12}a.$$

Ur.

1352. *Dizalo s teretom ukupne mase 8 t spušta se brzinom od 7.5 m/s. Maksimalno opterećenje užeta može biti 130 kN. Koliki je najkraći put zaustavljanja dizala?*

Rješenje.

$$m = 8 \text{ t}$$

$$v = 7.5 \text{ m/s}$$

$$\underline{F_N = 130 \text{ kN}}$$

$$h = ?$$

Pri zaustavljanja dizala napetost se povećava i vrijedi:

$$F_N = F_g + F_i,$$

$$F_N = mg + ma,$$

$$ma = F_N - mg,$$

$$a = 6.25 \text{ m/s}^2.$$

Put zaustavljanja izračunamo iz izraza:

$$v^2 = 2ah,$$

$$h = 4.5 \text{ m}.$$

Josip Maleš (1),
Gimnazija Antuna Vrančića, Šibenik

1353. *Opruga duljine L_0 ima velik broj identičnih zavoja. Ako je obješena za jedan kraj, njezina je duljina povećana 1.5 puta. Kolika će biti duljina opruge ako se postavi vertikalno u posudu punu vode tako da je opruga potpuno uronjena u vodu? Gustoća opruge je r (> 1) puta veća od gustoće vode.*

Rješenje. Sila naprezanja varira duž obješene opruge zbog njezine mase. Neka je M masa opruge, N ukupan broj zavoja, k konstanta cijele opruge, a n broj zavoja od donjeg kraja do određene točke na opruzi. U toj je točki napetost opruge:

$$T_n = \frac{Mgn}{N}.$$

Konstanta opruge za jedan zavoj je N puta veća od konstante opruge za cijelu oprugu. Produljenje tog zavoja će biti:

$$\Delta l_n = \frac{T_n}{kN} = \frac{Mgn}{kN^2}.$$

Ukupno produljenje je

$$L - L_0 = \sum \Delta l_n = \frac{MgN(N+1)}{2kN^2},$$

a kako je N velik, izraz se aproksimira

$$L - L_0 \approx \frac{Mg}{2k},$$

što prema uvjetu na produljenje daje

$$\frac{Mg}{2k} = \frac{L_0}{2}.$$

Za oprugu postavljenu vertikalno u posudu rezultat će biti gotovo identičan samo što će za razliku od obješene opruge, ona biti stisnuta na manju duljinu:

$$L_0 - L = \frac{Mg}{2k}.$$

Opruzi koja je potpuno uronjena u vodu, za promjenu duljine potrebno je uzeti u obzir

smanjenje prividne težine zbog uzgona:

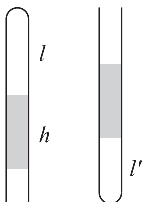
$$L_0 - L = \frac{M^* g}{2k} = \frac{Mg}{2k} \cdot \frac{\rho - \rho_0}{\rho} = \frac{L_0}{2} \cdot \frac{\rho - \rho_0}{\rho},$$

iz čega slijedi:

$$L = \frac{L_0}{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{r}\right).$$

Ur.

1354. *U cijevi koja je na jednom kraju zatvorena, ima zraka i žive (vidi sliku). Visina stupca zraka je l, a žive h. Kad se cijev preokrene, visina stupca zraka je l'. Gustoća žive je ρ_{Hg}. Koliki je atmosferski tlak?*



Rješenje. Na otvorenom kraju cijevi tlak je jednak atmosferskom. U prvom slučaju za tlak zraka u cijevi P_1 vrijedi:

$$P_1 + \rho_{Hg} gh = P_{atm},$$

gdje mora biti

$$\rho_{Hg} gh < P_{atm}.$$

Tlak zraka u okrenutoj cijevi je:

$$P_2 = \rho_{Hg} gh + P_{atm}.$$

Taj tlak je veći zbog stupca žive iznad njega pa je prema Boyleovom zakonu volumen manji:

$$P_1 V_1 = P_2 V_2,$$

i kako je poprečni presjek cijevi isti u oba slučaja ($V = lS$), vrijedi:

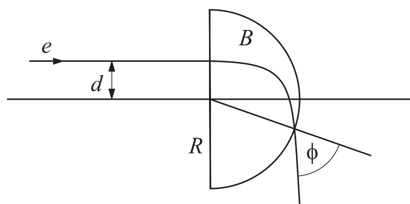
$$P_1 l = P_2 l'.$$

Eliminiranjem P_1 i P_2 dobivamo atmosferski tlak:

$$P_{atm} = \rho_{Hg} gh \frac{l + l'}{l - l'}.$$

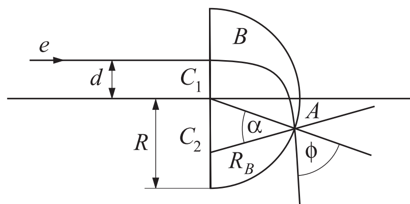
Ur.

1355. *Elektron brzinom v ulazi u jednoliko magnetsko polje B okomito na smjer gibanja elektrona. Područje u kojem djeluje magnetsko polje ima polukružni presjek kao što je prikazano na slici. Odredite kut φ koji zatvara putanja elektrona na izlasku iz polja s okomicom na rub polja.*



Rješenje. Na elektron koji se giba u magnetskom polju djeluje Lorentzova sila iznosa $F = evB$ i smjera okomito na smjer gibanja. Elektron se u magnetskom polju giba po kružnoj putanji za čiji polumjer vrijedi:

$$F = \frac{mv^2}{R_B}, \quad \text{tj.} \quad R_B = \frac{mv}{eB}.$$



Budući da elektron ulijeće u polje okomito na ravni rub polja, središte C_2 njegove kružne putanje nalazi se na tom ravnom rubu kao na slici. Da bismo odredili kut φ, promotrimo trokut $\mathrm{C_1C_2A}$ sa stranicama $R_B - d$, R i R_B. Kut α kod vrha A (presjecište putanje elektrona i ruba polja) jednak je $90^\circ - \varphi$, a dobivamo ga iz kosinusovog poučka $(R_B - d)^2 = R^2 + R_B^2 - 2RR_B \cos\alpha$. Traženi kut je:

$$\varphi = 90^\circ - \arccos\left(\frac{R^2 + 2R_B d - d^2}{2RR_B}\right).$$

Ako je $2R_B < R + d$ (jako magnetsko polje ili mala brzina elektrona) elektron napravi polukrug i izlazi van iz polja pod pravim kutem prema ravnom rubu polja u smjeru suprotnom od upadnog smjera.

Ur.

1356. *Potrebno je zagrijati 300 l vode sa 7 °C na 40 °C. Koristi se peć na ugljen iskoristivosti 25%. Ugljen gorenjem daje 20 kJ/g, a toplinski kapacitet vode je 4.2 J/kgK. Koliko je ugljena potrebno za zagrijavanje?*

Ako bi se umjesto ugljena koristila ista masa drva, na koju bi se temperaturu zagrijala voda? Drvo daje 3.5 kJ/g.

Rješenje.

$V = 300\ \mathrm{l} = 300\ \mathrm{dm}^3 = 0.3\ \mathrm{m}^3$

$\rho_V = 1\,000\ \mathrm{kg/m}^3$

$\eta = 25\% = 0.25$

$q_U = 20\ \mathrm{kJ/kg}$

$q_D = 3.5\ \mathrm{kJ/kg}$

$c_V = 4.2\ \mathrm{kJ/kgK}$

$t_1 = 7\,^\circ\mathrm{C}, \qquad t_2 = 40\,^\circ\mathrm{C}$

$\underline{\Delta t = 33\,^\circ\mathrm{C} = 33\ \mathrm{K}}$

$m_U = ?, \qquad t_3 = ?$

Q_U – količina topline oslobođena gorenjem ugljena,

Q_{V1} – količina topline potrebna za zagrijavanje vode.

$Q_U = \eta m_U q_U,$

$Q_V = mc_V\Delta t = \rho_V V c_V \Delta t,$

$Q_U = Q_{V1}$ – zbog održanja topline.

$$m_U = \frac{\rho_V V c_V \Delta t}{\eta q_U} = 8316\ \mathrm{kg}.$$

Potrebno je 8 316 kg ugljena za zagrijavanje 300 l vode sa $7\,^\circ\mathrm{C}$ na $40\,^\circ\mathrm{C}$.

Ako uzmemo $m_U = 8316$ kg drveta i zapalimo, imamo:

$Q_D = \eta m_U q_D$ – količina topline oslobođena gorenjem drveta.

$Q_{V2} = mc_V\Delta t_1 = \rho_V V c_V \Delta t_1,$

$Q_D = Q_{V2},$

$\eta m_U q_D = \rho_V V c \Delta t_1,$

$$\Delta t_1 = \frac{\eta m_U q_D}{\rho_V V c},$$

$t_3 = t_1 + \Delta t_1 = 12.775\,^\circ\mathrm{C}.$

Ako umjesto ugljena uzmemo istu količinu drveta, temperatura vode će se povećati na $t_3 = 12.775\,^\circ\mathrm{C}$.

Zlatan Tucaković (8), Sarajevo, BiH

Rješenja zabavne matematike

Šest putnika

Ovaj logički problem najlakše se rješava pomoću tablice putnici–gradovi i načela isključivanja (prema uvjetima Horvat nije Karlovčanin, Osječanin, Puljanin, ni Siščanin itd.). Rješenje: Horvat–Županja–profesor, Kralj–Osijek–odvjetnik, Marić–Rijeka–novinar, Petek–Pula–novinar, Savin–Sisak–odvjetnik, Zvrko–Karlovac–profesor.

Kockice u plavom

Sve kockice imajku ukupno 432 strane. 60 strana već je obojeno plavom bojom. Dakle, još treba obojiti 372 strane. U postocima to iznosi oko 86%.

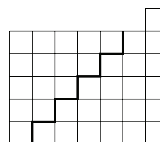
Zbrajaljka

Evo traženih zamjena:

AEIMOPRST= 239517846, 259714638, 269714538, 289517346, 352916847, 382916547, 462915837, 482915637, 564718923, 569317824, 589317624, 594718623, 625418379, 628715349, 635418279, 638715249, 723918546, 732819456, 742819356, 753918246, 824317569, 827614539, 835219467, 839615427, 845219367, 849615327, 854317269, 857614239, 942817536, 952817436.

Kako do kvadrata

Postoje tri načina razrezivanja. Prvi je razrezivanje lijevog stupca s pet kvadratića i njegovo polaganje horizontalno gore, drugi je razrezivanje desnog stupca sa šest kvadratića i njegovo polaganje horizontalno gore ili dolje, a treći vidite na crtežu.



Malo košarke

Pretpostavimo da su A i B momčadi s istim brojem pobjeda i da je uz to momčad A pobijedila momčad B. Tada postoji momčad C koja je izgubila od momčadi B i pobijedila momčad A.



Otvoreni dan Instituta za fiziku

Ana Smontara[1], *Zagreb*

I ove godine, šesti put za redom znanstvenici Instituta za fiziku otvorili su svoje laboratorije za posjetitelje, prvenstveno učenike ali i za kolege s drugih Institucija.

Sve je počelo u petak 16. veljače ove godine u 10 sati ujutro, učenici zajedno sa svojim nastavnicima dolazili su iz cijele Hrvatske. Svaki puni sat autobusi su dolazili ispred Instituta (vidi srednju stranicu lista). Učenici, dio njih prvo je u oraniziranim grupama obilazio laboratorije Instituta, a dio odlazio u dvije predavaonice gdje su pratili program koji su za njih priredili znanstvenici Instituta za fiziku.

Kroz multimedijske prezentacije posjetitelji su se upoznali sa: *tajnama magneta* – gdje sve oko nas ima magneta, kakva su njihova čudesna svojstva i što im je izvor, ali i dobili odgovor na pitanje zašto je i Zemlja magnet i jesu li magneti važni za život; *Bose-Einsteinovom kondezacijom* (BEC) najhladnijom stvari u cijelom svemiru. Ovo stanje materije predvidjeli su A. Einstein i S. Bose još davne 1924. godine, ali do njegovog eksperimentalnog ostvarenja došlo je tek nedavno; *Teslinim otkrićem rotacijskog magnetskog polja* – dva datuma iz 19. stoljeća obilježavaju tehnološki razvoj naše civilizacije. U travnju 1820. danski fizičar Oersted je otkrio da električna struja stvara magnetsko polje, a 16. studenog 1896. god. električna energija je prenesena s Niagare u 20 milja udaljen grad Buffalo. Ogroman doprinos spoznajama i razvoju tehnologije u tom vremenu dao je Nikola Tesla. Prikazana su otkrića i razvoj tehnologije baziran na istosmjernoj struji, te Teslino otkriće rotacijskog magnetskog polja i asinkronog motora koji su omogućili konačnu prevagu izmjenične struje i sustav elektrifikacije kakav danas koristimo a pokazano je i niz vrlo ilustrativnih pokusa; *optičkom spektroskopijom* – nakon kratkog uvoda o osnovama spektroskopije mogli su se vidjeti i spektri nekih izvora svjetlosti, te je napravljen kućni spektrometar i snimljeno nekoliko spektara pomoću njega; *uzrocima sporog padanja permanentnog magneta kroz aluminijevu cijev* – interaktivnim pokusom mjereno je vrijeme potrebno da permanentni magnet NdFeB prođe kroz okomito postavljenu aluminijsku ili bakrenu cijev; *kamen do kamena palača, atom do atoma...*? – svijet našeg svakodnevnog iskustva sastoji se od atoma organiziranih u nepregledni niz materijala i oblika. Građevni materijal živih bića najbolje ilustrira kako su se u prirodi razvili mehanizmi slaganja atoma u vrlo kompleksne molekularne strukture. Vrlo često te molekule imaju zadatak da preslaguju atome i dijelove drugih molekula stvarajući nove, za život vitalne molekule. Prirodi su trebale miljarde godina da evolucijom dođe do današnjeg stupnja složenosti. Čovjek neprestano uči na primjerima iz prirode i nastoji je dosegnuti, ali na način da se novi materijali čovjeku stvaraju kontroliranim mehaniznima. Znanost je tek nedavno razvila alate koji nam omogućuju da se stvaraju nove strukture baratajući atomima i molekulama. Ilustrirani su principi tih metoda, pokazano na primjerima do kuda se stiglo i kakve se mogućnosti otvaraju; *svjetlo* – upoznali niz primjera fantastičnih izvora svjetlosti, vidjeti neka od bitnih svojstava lasera i običnih svjetlosnih izvora, uživati u nekoliko

[1] Voditeljica *Laboratorija za istraživanje transportnih problema*, Institut za fiziku, `ana@ifs.hr`.

pokusa s laserima i žaruljama, kao i vidjeti da su boje još uvijek velika zagonetka našeg vida; *kvantnom informacijom* – informacija pored matematičkog koncepta uvijek ima i svoju fizičku reprezentaciju. U dosadašnoj informatici, utjelovljenje informacije je uvijek pratilo zakone klasične fizike. Znanost o kvantnoj informaciji stavlja informaciju u kvantni kontekst, te teleportacija bi mogla prenositi kvantnu informaciju s jednoga na drugi procesor u kvatnom kompjutoru koji bi znatno nadmašili snagu postojećih računala.

U obilasku laboratorija uz stručno vodstvo mogli su se ove godine obići: *laboratorij za interferometriju* i saznati kako točno izmjeriti vrlo mali pomak nekog predmeta? Jedan od načina je da se promatra slika preklopljenih valova koji se reflektiraju s površine predmeta i valova koji se reflektiraju s mirnog ravnog zrcala. Dva vala ako prolaze jedan preko drugog superponiraju, ali ti valovi, ako su krenuli iz istog koherentnog izvora (koherentni izvor znači da se svojstva valova koje emitira kao što su faza i amplituda ne mijenjaju u vremenu) međusobno interferiraju, a njihova slika na zaslonu je niz koncentričnih kružnica, naizmjenično svijetlih i tamnih, koje se pomiču kako se miče predmet; *laboratorij za fiziku površina* – svijet na atomskoj skali u središtu je današnjih novih tehnologija, koje dijele skupni naziv nanotehnologija. Na krajnje smanjenim dimenzijama materijali poprimaju potpuno nova svojstva, koja su u pravilu bitno drugačija od svojstava materijala koje tradicionalno poznajemo. Uvođenjem nanotehnologije "fantazije" poput jako malih i superbrzih računala, nanorobota koji uništavaju stanice raka, ili pročišćavaju zrak u prezagađenim gradskim uvjetima, polako ali sigurno postaju stvarnost. Kreiranje, razumijevanje i karakterizacija takvih novih materijala podrazumijevaju kontrolu na atomskom nivou, doslovno do na raspored pojedinih atoma. Na primjer, direktan pogled na atome u realnom prostoru omogućuje metoda takozvane pretražne-tunelirajuće mikroskopije. Osim što je metoda fascinantna po svojoj nenadmašivoj rezoluciji, u određenim uvjetima omogućuje doslovno pomicanje i slaganje atoma po principu "Lego" kockica; *laboratorij za kompleksne sisteme* – u laboratoriju za kompleksne sisteme proučavaju se termodinamička i transportna svojstva materijala s kompleksnim uređenjem nastalim međudjelovanjem kristalne rešetke, elektrona i njihovih spinova, to su materijali u kojima se javljaju takozvani valovi gustoće naboja i koji pokazuju sličnost s poluvodičima, supravodičima i strukturnim staklima; *laboratorij za mikrostrukturno i kristalno uređenje* – mikrostrukturno i kristalno uređenje u tankim filmovima i višeslojnim naslagama novih materijala istražuje se raznim tehnikama svjetlosne i elektronske mikroskopije, te metodoma elektronske i rendgenske difrakcijske analize. Mogao se vidjeti čip snimljem refleksijskim svjetlosnim mikroskopom pri malom povećanju od nekoliko desetaka puta, kao i kristal istaložen u tankom filmu amorfne ZrFe slitine snimljen transmisijskim elektronskim mikroskopom pri povećanju od nekoliko desetaka tisuća puta; *laboratorij za karakterizaciju materijala reducirane dimenzionalnosti* – u laboratorijima diljem svijeta neprestance nastaju novi materijali. Jedna skupina su i materijali reducirane dimenzionalnosti, bazirani na organskoj i anorganskoj kemiji. Novi fenomeni koji se nalaze u tim materijalima su posljedica toga što elektroni, čestice koje nose električnu struju, sudjeluju u tome zajednički, a ne svaki za sebe kao u standardnom vodiču kao što je npr. bakar. Istraživanje se prirodno proširuje i na najpoznatiji jednodimenzionalni materijal – molekulu DNK; kao i svake godine dio učenika je obišao – *kriogeno postrojenje* – Instituta gdje su se mogli upoznati s tekućim dušikom i s nekim pojavama na niskim temperaturama.

Posjeta Institutu za fiziku pod "dirigentskom" palicom mladog znanstvenika Instituta dr. sc. Ivice Živkovića, omogućena je ove godine (toliko ih je Institut u jednom mogao danu prihvatiti) učenicima 20-tak škola diljem Hrvatske koji su se prvi najavili za posjetu. Oni su tijekom dva sata "uživali" u tajnama istraživanja naših znanstvenika, družili se s njima i mogli im postavljati pitanja.

Tijekom dana, više od 800 učenika prošlo je Institutom, tko zna. . . , možda neki od njih jednog dana postanu i znanstvenici!

Studenti Osječkog sveučilišta posjetili Geofizički zavod PMF-a u Zagrebu

Ana Smontara, Zagreb

Ove godine Prirodoslovno-matematički fakultet, Geofizički odsjek PMF-a u Zagrebu i cijela znanstvena zajednica obilježavaju 150. obljetnicu rođenja hrvatskog i svjetskog geofizičara Andrije Mohorovičića. Prije nešto više od godinu dana, na spomen tom najznamenitijem hrvatskom znanstveniku svih vremena i svjetskom velikanu seizmologije i geofizike pa i egzaktnih znanosti uopće uređene su, opremljene i otvorene *Memorijalne prostorije* na Geofizičkom odsjeku. One su otvorene za javnost 16. veljače ove godine. Studenti Odjela za fiziku Sveučilišta Josip Juraj Strossmayer u Osijeku, ljubaznošću docentice Snježane Markušić, posjetili su Geofizički odsjek PMF-a i uz stručno vodstvo obišli *Memorijalne prostorije Andrije Morovičića* te razgledali eksponate (vidi drugu srednju stranicu MFL-a). Tom prilikom bili su "počašćeni" i popularnim predavanjem iz seizmologije, meteorologije i oceanografije mladog znanstvenika Marka Pavića.

Ususret međunarodnoj olimpijadi iz fizike u Hrvatskoj 2010. godine

Ana Smontara[1], Zagreb

Sudjelovanje učenika iz Hrvatske na IPhO do 1991. godine

Do 1991. godine učenici iz Hrvatske su mogli sudjelovali na olimpijadi u ekipi Jugoslavije. Članovi su se odabirali prema uspjehu na Saveznom natjecanju mladih fizičara Jugoslavije, koje se održavalo oko mjesec dana prije održavanja IPhO, Jugoslavija se uključila u to međunarodno natjecanje vrlo rano. Prvo njeno sudjelovanje je bilo već na drugoj po redu Međunarodnoj olimpijadi u Budimpešti 1968. g. (vidi pregled sudjelovanja – podebljano su označeni učenici iz SR Hrvatske).

Pregled sudjelovanja učenika iz Jugoslavije

II. IPhO (Budimpešta (Mađarska), 23.VI. – 1.VII. 1968.)

1. Detela Andrej, II. gimanzija Ljubljana (SR Slovenija) – IV. nagrada
2. **Dorešić Miroslav, Matematička gimnazija, Zagreb**
3. **Galić Hrvoje, Gimnazija Bogdana Ogrizovića, Zagreb**

[1] Članica Međunarodnog povjerenstva IPhO od1984. do danas, suorganizatorica XVI. IPhO (Portorož 1985.), voditeljica ekipe Jugoslavije (1988.–1991.) i Hrvatske (1992.–1996.).

III. IPhO (Brno (Čehoslovačka), 22. VI. – 2. VII. 1969.)

1. **Dorešić Miroslav, Matematička gimnazija, Zagreb – III. nagrada**
2. Đorđević Antonije, XIV. gimnazija, Beograd (SR Srbija) – I. nagrada
3. Jevicki Ante, Gimnazija Moše Pijade, Subotica (SAP Vojvodina) – II. nagrada
4. **Pribeg Zdravko, Školski centar za strojarstvo i elektrotehniku, Zagreb – III. nagrada**
5. **Tisaj Krešo, Matematička gimnazija, Zagreb – III. nagrada**

IV. IPhO (Moskva (Sovjetski Savez), 6. – 14. VII. 1970.)

1. **Dolenc Branko, Tehnička škola Varaždin – pohvala**
2. Đorđević Antonije, XIV. gimnazija, Beograd (SR Srbija) – II. pohvala
3. Đurić Oliver, Matematička gimnazija Beograd (SR Srbija) – pohvala
4. Zavaljevski Aleksandar, Matematička gimnazija, Beograd (SR Srbija)

X. IPhO (Hradec Králové (Čehoslovačka), 8. – 15. VII. 1977.)

1. Ivanković Mladen, Gimnazija Ognjena Price, Sarajevo (SR BiH)
2. **Lončarić Josip, Matematička gimnazija, Zagreb – II. nagrada**
3. Ostojić Stanko, Matematička gimnazija, Beograd (SR Srbija)
4. **Horvatić Mladen, Gimnazija Dr. Ivana Ribara, Karlovac – pohvala**
5. **Tutiš Eduard, Gimnazija Dr. Ivana Ribara, Karlovac**

XII. IPhO (Varna (Bugarska), 1. – 10. VII. 1981.)

1. Cvetković Slobodan, Obrazovni centar "25 maj", Kladovo (SR Srbija)
2. **Gračanac Tomislav, Matematičko–informatički obrazovni centar, Zagreb – pohvala**
3. Ignjatović Siniša, Gimnazija Ognjena Price, Sarajavo (SR BiH)
4. Kaluža Matjaž, Gimnazija Miloša Zidanšeka, Maribor (SR Slovenija)
5. Mozetić Dean, Slovenska gimnazija, Koper (SR Slovenija) – II. nagrada i specijalna pohvala (najmlađi najecatelj (IPhO)

XIII. IPhO (Malente (Savezna Republika Njemačka), 20. VI. – 1. VII. 1982.)

1. **Gračanac Tomislav, Matematičko-informatički obrazovni centar, Zagreb – II. nagrada**
2. Kaloper Nemanja, OC J. J. Zmaja, Novi Sad (SAP vojvodina)
3. Marić Đorđe, Matematička gimnazija, Beograd (SR Srbija) – II. nagrada
4. Mozetić Dean, Slovenska gimnazija Koper (SR Slovenija) – II. nagrada i specijalna pohvala (najpotpunije rješenje 1. zadatka i najmlađi natjecatelj)
5. **Žunić Damir, Srednjoškolski centar, Gračanica**

XIV. IPhO (Bukurešt (Rumunjska), 5. – 14. VII. 1983.)

1. Herbut Igor, OVO MTS Veljka Vlahovića, Beograd (SR Srbija) – pohvala
2. Mozetić Dean, Slovenska gimnazija Koper (SR Slovenija)
3. **Rakić Zoran, MIOC Vladimira Popovića, Zagreb**
4. Stefanović Darko, OVO MTS Veljka Vlahovića, Beograd (SR Srbija) – III. nagrada
5. **Vrabec Boris, MIOC Vladimira Popovića, Zagreb**

XV. IPhO (Sigtuna (Švedska), 24. VI. – 1. VII. 1984.)

1. **Brenner Antonio, COUO, Virovitica**
2. Kondev Jane, OVO MTS Veljka Vlahovića, Beograd (SR Srbija)
3. Radić Stojan, ŠSC Envera Šiljka, Bosanska Gradiška (SR BiH)
4. Tošić Nenad, OVO MTS Veljka Vlahovića, Beograd (SR Srbija)
5. Žitnik Matjaž, Srednja naravoslovna šola, Maribor (SR Slovenija) – pohvala

XVI. IPhO (Portorož (SR Slovenija), Juogoslavija, 23. – 30. VI. 1985.)

1. Kondev Jane, OVO MTS Veljka Vlahovića, Beograd (SR Srbija) – III. nagrada
2. **Donjerković Donko, III. gimnazija, Split**
3. Ðoković Igor, Tuzla (SR BiH) – III. nagrada
4. Markaić Mićo, Maribor (SR Slovenija)
5. **Lalić Nenad, MIOC Vladimira Popovića, Zagreb**

XVII. IPhO (London-Harrow (Velika Britanija), 24. VI. – 1. VII. 1986.)

1. Cigler Grega, Ljubljana (SR Slovenija)
2. **Donjerković Donko, III. gimnazija, Split**
3. Maksimović Petar, Beograd (SR Srbija)
4. Popović Pavle, Ljubljana (SR Slovenija)
5. Ristić Ivan, Beograd (SR Srbija)

XVIII. IPhO (Jena (Demokratska Republika Njemačka), 24. VI. – 1. VII. 1987.)

1. Bajc Jure, Naravoslovna šola, Ljubljana (SR Slovenija)
2. Lamovec Andrej, Naravoslovna šola, Ljubljana (SR Slovenija)
3. Maksimović Petar, OVO MTS Veljka Vlahovića, Beograd (SR Srbija) – nagrada
4. Milošević Predrag, OC Bore Stankovića, Vranje (SR Srbija)
5. Vilfan Andrej, Naravoslovna šola, Ljubljana (SR Slovenija) – III. nagrada

XIX. IPhO (Bad Ischl (Austrija), 24. VI. – 1. VII. 1988.)

1. Zvonimir Bandić, Matematička gimnazija, Beograd (SR Srbija) – III. nagrada

2. **Davor Matić, MIOC, Zagreb**
3. **Matko Milin, MIOC, Zagreb**
4. **Damir Starešinić, MIOC, Zagreb**
5. Andrej Vilfan, Naravoslovna šola, Ljubljana (SR Slovenija) – III. nagrada

XX. IPhO (Waraw (Poljska), 24. VI. – 1. VII. 1989.)

1. Zvonimir Bandić, Matematička gimnazija, Beograd (SR Srbija) – III. nagrada
2. **Mladineo Vjekoslav, MIOC, Split – pohvala**
3. **Tomasović Dubravko, ŠC NGRM, Varaždin – III. nagrada**
4. **Tužinski Dalibor, OC Z. Brkića, Slavonska Požega – pohvala**
5. Andrej Vilfan, Naravoslovna šola, Ljubljana (SR Slovenija) – II. nagrada

XXI. IPhO (Groningen (Nizozemska), 24. VI. – 1. VII. 1990.)

1. **Dvornik Albert, MIOC, Zagreb**
2. **Karamazen Krešimir, MIOC, Zagreb**
3. Nikolić Mladen, ŠSC Đure Pucara-Starog, Modriča (SR BiH)
4. Slepčev Dejan, SŠRTS Veljka Vlahovića, Sombor (SAP Vojvodina)
5. **Štefančić Hrvoje, COUO Augusta Cesarca, Našice**

XXII. IPhO (Havan (Kuba), 24. VI. – 1. VII. 1991.)

1. Batričević Uroš, Beograd (SR Srbija)
2. Hadrović Feđa, Mostar (SR BiH)
3. Knežević Irena, Zemun (SR Srbija)
4. Knežević Kristijan, Sarajevo (SR BiH)
5. **Štefančić Hrvoje, COUO Augusta Cesarca, Našice**

Na IPhO do 1991. g. učenici iz Hrvatske su osvojili 2 srebrne, 4 brončane medalje i 5 pohvala.

Zbog pomanjkanja sredstava i šireg interesa, za sudionike Olimpijade nisu se organizirale posebne pripreme i eventualni uspjeh natjecatelja bio je rezultat njihovog samostalnog učenja i dobrovoljnog rada njihovih nastavnika, te se ekipa Jugoslavija ubrajala u manje uspješne zemlje na IPhO u tom periodu.

⋆ ⋆ ⋆

Ispravka. U MFL-u br. 3/ 227 na drugoj strani omota i na str. 169 greškom je navedeno Neven Bogdanović. Treba biti Neven Bogdanić.



Klase modularnih kompleksnih mreža

Vinko Zlatić[1], *Zagreb*

Kompleksni sustavi: Od svoga formiranja kao samostalne znanstvene discipline, fizika je uvijek tražila nove teme kojima bi se bavila i širila horizonte ljudske spoznaje. Isprva su se fizičari bavili samo kretanjem planeta i čvrstih tijela te su zasnovali mehaniku. Kasnije su se počeli zanimati za plinove i tekućine, te razvili termodinamiku. Nakon toga fizičarima je uzbudljiva postala struktura materije – čestice, atomi, molekule. Kako je napredovalo ljudsko znanje tako su im novije i novije teme postajale zanimljivije. Zajednička osobina svih tih tema je bila da su se mogle matematički kodificirati na temelju tada dostupnih eksperimentalnih rezultata i matematičkog znanja. Zadnjih desetak godina neke od tema koje jako privlače fizičare su *kompleksni sustavi*. Kako definirati kompleksni sustav? Iako ne postoji univerzalna definicija, meni se osobno sviđa: *Kompleksni sustav je sustav koji se sastoji od velikog broja manjih dijelova koji su (nelinearno) povezani i čije se kolektivno ponašanje znatno razlikuje od individualnog.* Tako je kompleksni sustav npr. stanica, mozak, ekosustav, društvo, *www*. . . .

Kompleksne mreže: Prirodan način opisa interakcija u nekom kompleksnom sustavu je kompleksna mreža. Kompleksna mreža je matematički objekt koji se sastoji samo od čestica (*čvorova* ili *vrhova*) koje mogu ili ne moraju biti povezane (*vezama* ili *bridovima*). Takvi se objekti u matematici nazivaju grafovi i njihova se svojstva proučavaju već stotinama godina. Ono što kompleksne mreže odvaja od klasičnih matematičkih grafova je to što se temelje na podacima o realnim mapama međudjelovanja. Uzmimo za primjer proteine koji međudjeluju u stanici nekog organizma. Različite vrste proteina tada možemo prikazati čvorovima (matematičari bi rekli vrhovima), a njihova međudjelovanja vezama (matematičari bi rekli bridovima) između čvorova. Ukoliko veza između dva čvora postoji znači da te dvije vrste proteina međudjeluju i vežu se jedan na drugoga. Ukoliko pomislimo da u jednoj prosječnoj stanici, jednog prosječnog organizma, postoje tisuće različitih vrsta proteina, od kojih mnoge još nismo niti otkrili, na prvi pogled se čini da su veze između njih potpuno slučajne i da ta mreža može izgledati, u principu, bilo kako. Zaprepašćujuća je činjenica da razne kompleksne mreže koje nalazimo u prirodi uopće ne izgledaju toliko slučajno, već postoje pravilnosti koje se ponavljaju od bioloških mreža poput mreža metabolita, neuralnih mreža, ekoloških mreža, preko tehnoloških mreža kao što je recimo internet, *www* ili mreža zračnih luka, do socijalnih mreža kao što je mreža e-mail poruka ili *SMS* poruka. Na početku članka smo napomenuli da je interes fizičara pratio dostupnost eksperimentalnih podataka. Eksplozija istraživanja kompleksnih mreža podudara se s razvojem interneta i elektronskih baza podataka jer su se odjednom nekad nepovezani dijelovi znanja, razbacani po raznim člancima, našli na istom lako dostupnom mjestu. To je fizičarima omogućilo mapiranje međudjelovanja i izradu prvih realnih mreža koje su imale na tisuće, desetke tisuća, a ponekad čak i stotine milijuna čvorova.

Globalne osobine: Kad se kompleksne mreže usporede s potpuno slučajnim grafovima koji imaju isti broj čvorova i veza, pokazuje se da postoje velike razlike u nekim mjerljivim veličinama. Kao prvo, kod slučajnog grafa će vjerojatnost da slučajno odabran vrh ima k bridova biti raspoređena po *Poissonovoj distribuciji*. Nasuprot tome kod kompleksnih mreža će ta vjerojatnost biti distribuirana *zakonom potencija*. U

[1] Autor je znanstveni novak na Zavodu za teorijsku fiziku, Instituta Ruera Boškovića, `vzlatic@irb.hr`

kompleksnim mrežama će također broj malih motiva, kao što su recimo, trokuti ili četverokuti, biti i nekoliko redova veličine veći od broja istih motiva u slučajnom grafu.

Zašto se proučavaju – uloga funkcionalnosti i strukture: Takva odstupanja od potpune slučajnosti ukazuju na to da u kompleksnim mrežama postoje određena netrivijalna pravila povezivanja koja fizičari danas žele razumjeti. Većina istraživača smatra da su razne interesantne strukturne osobine povezane sa svrhom postojanja te mreže. To ustvari znači da bi matematička struktura kompleksnih mreža trebala optimizirati svoju funkciju. Primjerice mreža metaboličkih reakcija predstavlja same životne procese stanice. Na koji način se ona hrani, kako izgledaju energetski tokovi u stanici, na koji način stanica razumije što tijelo od nje želi i kako to da stanica, relativno rijetko, nešto "zabrlja". Sličan je slučaj i s mrežom neurona u mozgu. Uloga je neuralne mreže pravilno odgovoriti na vanjske podražaje (električne impulse) te kolektivno ispravno odgovoriti na njih. Pomaže li struktura mreže u tom procesu i kako, predmet je istraživanja mnogih znanstvenika danas.

Modularnost – cigle od kojih je mreža izgrađena: Usporedimo sada stanicu s računalom, ma koliko se to smiješno činilo. Računalo se sastoji od mnogih komponenti: procesora, RAM-a, hard diska, portova, ... Sve su to dijelovi koji obavljaju neku funkciju, sastoje se od nekih manjih dijelova i međusobno komuniciraju. Postoji li sličan ustroj u stanici? Odgovor je da. Većina, ako ne i sve, kompleksne mreže se mogu podijeliti u određene module (skupove čvorova) koji su namijenjeni izvršavanju određene funkcije, čiji su čvorovi međusobno bolje povezani i koji su i dalje sastavni dio cijele mreže putem međumodulskih veza. Fascinantno je da se maksimizacijom jedne matematičke funkcije koju nazivamo modularnost, a koja za argumente ima samo statistiku čvorova i veza, dobivamo precizno određene funkcionalne module u potpuno raznorodnim mrežama kao što su recimo internet na ruter razini i proteinske interakcije. To znači da nije potrebno znati detalje o tome što doista mreža predstavlja, dovoljno je imati njezin matematički zapis i maksimizacijom modularnosti dobit će se različite funkcionalne podmreže. Ukoliko malo razmislimo o tome, ta je tvrdnja na prvi pogled kontradiktorna s prije navedenom da struktura kompleksne mreže optimizira njezinu funkcionalnost. Električni impulsi na internetu se opisuju takozvanim difuzijskim jednadžbama, dok se međuodnosi među vrstama metabolita u metaboličkim mrežama opisuju *Lotka-Volterinim* diferencijalnim jednadžbama. Razlika između ta dva matematička opisa vrlo je velika i teško je očekivati da će ista modularnost biti optimalna za obje mreže.

Vrste čvorova prema povezanosti: U znanstvenom časopisu *Nature* u siječnju ove godine Roger Guimera i njegovi suradnici su pokazali da se čvorovi u mreži mogu podijeliti u nekoliko klasa s obzirom na njihovu povezanost (broj veza) i njihovu ulogu u mreži s obzirom na module. Tako su čvorovi klasificirani kao *hubovi* i *nehubovi* (hubovi su oni čvorovi koji imaju puno veći broj veza od prosječnog čvora u mreži). Nadalje nehubovi su podijeljeni na *ultra periferne*, koji su povezani samo sa članovima istog modula, *periferne*, kojima je većina veza u njihovom modulu, *satelite*, koji svoje veze raspodjeljuju između različitih modula i *bezrodne* čvorove, koji homogeno raspodjeljuju svoje veze po cijeloj mreži. Hubovi su dodatno podijeljeni na *provincijalne* kojima je većina veza u njihovom modulu, *povezujuće*, koji imaju mnogo veza s drugim modulima i *globalne*, kojima su veze homogeno raspoređene između različitih modula.

Klase mreža po konektivnosti: Guimera i kolege su nakon toga pogledali statistiku međusobnih veza između čvorova koji pripadaju različitim klasama u 26 različitih mreža formiranih iz baza podataka o metaboličkim interakcijama, proteinskim interakcijama, zračnom prometu i internetu. Pokazalo se da mreže koje pripadaju istoj funkciji (recimo razne metaboličke mreže) imaju gotovo identičan statistički profil, dok mreže različitih funkcionalnosti imaju i različiti statistički "otisak".

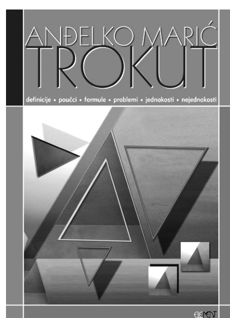
Perspektive: Ova saznanja omogućila su znanstvenicima da jednostavnije nego do sada pronađu funkcijske podmreže u kompleksnim sustavima, a sada je bitno razumjeti

kako se povezanost unutar različitih klasa očituje u opisu procesa na mrežama. Da li neki od čvorova služe kao stabilizatori procesa ili reakcija, ili je pak njihova uloga upravo suprotna, da omoguće sustavu da "brzo" promijeni proces kako bi efikasno odgovorio na promjenu stanja u okolini. Ova i druga pitanja vezana uz funkcionalnost kompleksnih mreža i njihovu modularnu strukturu obećavaju sigurno još nekoliko vrlo uzbudljivih godina u fizici kompleksnih sustava.



NOVE KNJIGE

Anđelko Marić, Trokut, Element, Zagreb, 2007.



U izdanju Elementa pojavila se nova knjiga profesora Anđelka Marića. Na 312 stranica i 8 poglavlja izloženo je praktično sve o trokutu na srednjoškolskoj razini. Poglavlja su redom:

1. Temeljni poučci o trokutu, 2. Trigonometrija trokuta, 3. Pravokutan trokut, 4. Pseudopravokutan trokut, 5. Poučci I, 6. Poučci II, 7. Jednakosti u trokutu, 8. Nejednakosti u trokutu.

U prvom poglavlju, u 11 podpoglavlja, kroz 15 definicija, 48 poučaka i 46 formula (od kojih se 25 odnose na ploštinu trokuta), izložena je temeljna građa o trokutu. Skupa s drugim poglavljem, u kojem je 6 definicija, 11 poučaka i 13 formula trigonometrijske naravi, to je svojevrsni priručnik o trokutu potreban svakom srednjoškolcu zainteresiranom za matematiku.

U trećem su poglavlju 3 definicije, 73 poučka (od kojih su 39 karakterizacije pravokutnog trokuta) i 13 formula. Poglavlje završava Pitagorinim trojkama i njihovom vezom s pravokutnim trokutom. Tu se, na primjer, dokazuje da nema pravokutnog trokuta s cjelobrojnim stranicama koje su članovi geometrijskog niza, a da je trokut sa stranicama 3, 4, 5, u biti, jedini takav trokut kojemu stranice čine Pitagorinu trojku a članovi su aritmetičkog niza.

U četvrtom poglavlju s 2 definicije, 6 formula i 20 poučaka upoznajemo se s pseudopravokutnim trokutom, tj. trokutom kojemu je razlika dvaju kutova pravi kut. Takvi su trokuti po mnogočemu analogni pravokutnima.

U petom i šestom su poglavlju 216 raznovrsnih poučaka o trokutu razvrstanih u dva dijela prema složenosti izričaja. Tu je, među ostalim, serija poučaka o trokutima kojima su stranice članovi aritmetičkog niza.

U sedmom su poglavlju 85 jednakosti među elementima općeg ili posebnog trokuta.

U osmom su poglavlju 95 nejednakosti o općem ili posebnom trokutu.

Kao i obično kod ovog autora, svi su poučci dokazani planimetrijski, kad god je to bilo moguće. Izlaganje je logično, jezično i metodički na visokoj razini. Crteži su pomno izrađeni, a formule jasno naznačene.

Ova će knjiga dobro doći svakom natjecatelju iz matematike, svakom srednjoškolskom i osnovnoškolskom nastavniku, kao i mnogima drugima.

Zanima li vas što je Cevin, Menelejev, Van Aubelov, Pitagorin, Euklidov, Hamiltonov, Gaussov, Apolonijev, Leibnizov, Stewartov ili Eulerov poučak? Zanima li vas kako se sve te tvrdnje koje nose slavna imena, dokazuju i u kakvom su suodnosu? Zanima li vas što su Molweidove formule, Simpsonov, ili Eulerov pravac, Feuerbachova kružnica? Zanima li vas kako se u geometriji koristi Čebiševljeva nejednakost i nejednakost Cauchy-Schwartz-Bunjakovskog? Ako tako zavirite u ovo remek djelo profesora Anđelka Marića, nećete požaliti.

Ivica Gusić, Zagreb



KVALIFIKACIJSKI ISPITI

Zadaci s prijemnog ispita iz matematike na Ekonomskom fakultetu u Zagrebu 2006. g.

Donosimo tek manji dio zadataka namijenjenih svim zainteresiranim kandidatima koji se žele pripremiti za razredbeni (kvalifikacijski) ispit na Ekonomskom fakultetu u Zagrebu i svim srodnim fakultetima u Hrvatskoj.

⋆ ⋆ ⋆

M-1. Pojednostavnite izraz $2\sqrt{x^3} - \dfrac{x^{-1} - x^{-2}}{\sqrt{x^{-1}} - \sqrt{x}} + \dfrac{1 - x^2}{\sqrt{x^{-1}} + \sqrt{x}}$.

A. x **B.** $-\dfrac{1}{x}$ **C.** $\sqrt{x}$ **D.** $-\dfrac{1}{\sqrt{x}}$

M-2. Ako je $\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a} = 3$ tada je $\dfrac{a^3}{b^3} + \dfrac{b^3}{a^3}$

A. 19 **B.** 18 **C.** 27 **D.** 36

M-3. $\sqrt[4]{17 + 12\sqrt{2}}$ je

A. $\sqrt{2} + 1$ **B.** $2\sqrt{2} + 1$ **C.** $3\sqrt{2} + 1$ **D.** $4\sqrt{2} + 1$

M-4. Skup svih rješenja nejednadžbe $|x - 1| > x + 1$ je:

A. $\langle -\infty, -1\rangle$ **B.** $\langle -\infty, 0\rangle$ **C.** $\langle 0, +\infty\rangle$ **D.** $\langle 1, +\infty\rangle$

M-5. Domena funkcije $y = \sqrt{\log(2x)}$ je:

A. $[0, +\infty\rangle$ **B.** $[0.5, +\infty\rangle$ **C.** $[1, +\infty\rangle$ **D.** $[1.5, +\infty\rangle$

M-6. Ako je $a : b = 9 : 4$, $b : c = 9 : 4$, $c : d = 9 : 4$ tada je $\sqrt{a} : \sqrt{d}$ jednako:

A. 3 : 2 **B.** 9 : 4 **C.** 27 : 8 **D.** 81 : 16

M-7. Za koji realni k jednadžba $x^2 + kx^2 + k = 0$ nema realnih rješenja?

A. $k < 0$ **B.** $k > 0$ **C.** $0 < k < 4$ **D.** $-4 < k < 0$

M-8. Ako je $z = \dfrac{1}{2}\left(\sqrt{2 + \sqrt{2}} + i\sqrt{2 - \sqrt{2}}\right)$ tada je z^{16}:

A. -1 **B.** 1 **C.** $-i$ **D.** i

M-9. Ako su pravci $x = y$ i $y = x + 4$ tangente iste kružnice tada njezin polumjer iznosi:

A. $\sqrt{2}$ **B.** 2 **C.** $2 + \sqrt{2}$ **D.** $2\sqrt{2}$

M-10. Kako glasi jednadžba hiperbole kojoj su pravci $5x - 6y = 16$ i $13x - 10y = 48$ tangente?

A. $x^2 - 4y^2 = 16$ **B.** $4x^2 - y^2 = 16$ **C.** $x^2 - 2y^2 = 16$ **D.** $2x^2 - y^2 = 16$

M-11. Rješenje jednadžbe $\log_{\frac{1}{2}} \cdot \log_{16} \cdot \log(0.1x) = 2$ je:

A. $x = 10$ **B.** $x = 100$ **C.** $x = 1\,000$ **D.** $x = 10\,000$

M-12. Ako je $x = \left(\sqrt[5]{\sqrt[4]{a^3} : \sqrt[3]{a^2}}\right)^6 \cdot \sqrt{a}$ tada $\log_a x$ iznosi:

A. 0.6 **B.** 0.5 **C.** 0.4 **D.** 0.3

M-13. Ako piramidi volumena $1\,000\ \mathrm{m}^3$ i visine 10 m odsiječemo vrh paralelno s bazom na 9 m visine od baze tada preostali dio piramide ima volumen:

A. $900\ \mathrm{m}^3$ **B.** $970\ \mathrm{m}^3$ **C.** $990\ \mathrm{m}^3$ **D.** $999\ \mathrm{m}^3$

M-14. Komad leda volumena $1\ \mathrm{dm}^3$ stavimo u lonac oblika valjka polumjera baze 1 dm i rastalimo. Ako se prilikom taljenja volumen leda smanji za 10% koliko približno će biti visina vode u loncu?

A. 2.86 cm **B.** 3.18 cm **C.** 3.51 cm **D.** 3.82 cm

M-15. Za koliko posto je površina istostraničnom trokutu opisanog kruga veća od površine njemu upisanog kruga?

A. za 100% **B.** za 200% **C.** za 300% **D.** za 400%

M-16. Površina pravilnog osmerokuta stranice $a = \sqrt{\sqrt{2} - 1}$

A. 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 4

M-17. Koliko ima različitih prirodnih brojeva čije su znamenke tri jedinice, tri dvojke i tri trojke?

A. 360 **B.** 840 **C.** 1 680 **D.** 3 024

M-18. Ako je cijena B za 10% manja od cijene A, a cijena C za 10% veća od B tada je:

A. C za 1% manja od A **B.** A za 1% veća od C

C. C iznosi 98% od A **D.** A i C su jednake cijene

M-19. Glavnica od 4 215.23 kune uložena uz 1% mjesečnih dekurzivnih i složenih kamata donijela je 487.57 kuna kamata. Koliko mjeseci je bila uložena?

A. 8 mjeseci **B.** 9 mjeseci **C.** 10 mjeseci **D.** 11 mjeseci

M-20. Neki posao 12 radnika može napraviti za 25 dana. Koliko će ukupno trajati posao ako su nakon 10 dana rada posao napustila 3 radnika?

A. 28 dana **B.** 29 dana **C.** 30 dana **D.** 31 dan

M-21. Izračunajte $\frac{1}{50} + \frac{1}{150} + \frac{1}{300} + \frac{1}{500} + \frac{1}{750} + \frac{1}{1050} + \ldots + \frac{1}{252500}$

A. $\frac{1}{25}$ **B.** $\frac{2}{51}$ **C.** $\frac{4}{101}$ **D.** $\frac{8}{201}$

M-22. Ako je $a^{\frac{3}{4}} = a^{\frac{1}{2}}$ tada je $a^{\frac{4}{3}}$ jednako:

A. b^2 **B.** $b^{\frac{2}{3}}$ **C.** $b^{\frac{8}{9}}$ **D.** $b^{\frac{16}{9}}$

M-23. Koliko različitih rješenja na skupu R ima nejednadžba $\frac{|x| - 1}{|x| + 1} \leqslant \frac{1}{3}$?

A. 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 4

M-24. Ostatak dijeljenja polinoma $P(x) = 2005x^{2005} - 2000x^{2000} + 100x^{100} - 50x^{50}$ polinomom $R(x) = x - 1$ je:
A. 5 005 **B.** 505 **C.** 55 **D.** 5

M-25. Ako je $2a : 3b = 4b : 3a$ tada $b^4 : a^4$ iznosi:
A. 0.25 **B.** 0.5 **C.** 2 **D.** 4

M-26. Pojednostavite izraz $\dfrac{a^2}{(a-b)(a-c)} + \dfrac{b^2}{(b-c)(b-a)} + \dfrac{c^2}{(c-a)(c-b)}$.
A. 0 **B.** 1 **C.** abc **D.** $a+b+c$

M-27. Područje definicije funkcije $f(x) = \sqrt{\dfrac{2}{2-\sqrt{x}}}$ je:
A. $\langle 4, +\infty\rangle$ **B.** $\langle 1, 4\rangle$ **C.** $[0, +\infty\rangle$ **D.** $[0, 4\rangle$

M-28. Pravac $2x - y - 2 = 0$ je simetrala dužine $\overline{AB}$. Ako je $A(7, 7)$ tada je:
A. $B(10, 4)$ **B.** $B(4, 10)$ **C.** $B(9, 3)$ **D.** $B(3, 9)$

M-29. Realni dio kompleksnog broja $(1+i)^8$ iznosi:
A. 16 **B.** 8 **C.** 4 **D.** 2

M-30. Napišite kvadratnu jednadžbu čija su rješenja jednaka recipročnim rješenjima jednadžbe $x^2 + x + 2 = 0$.
A. $x^2 + x + 0.5 = 0$ **B.** $x^2 - x - 0.5 = 0$
C. $x^2 + 0.5x + 0.5 = 0$ **D.** $x^2 - 0.5x - 0.5 = 0$

M-31. Ako se kružnice $(x-2)^2 + (y+3)^2 = r^2$ i $(x+1)^2 + (y-1)^2 = r^2$ međusobno dodiruju izvana tada polumjer svake od njih iznosi:
A. $\sqrt{2.5}$ **B.** 2.5 **C.** $\sqrt{5}$ **D.** 5

M-32. Rješenje jednadžbe $\log_{\frac{1}{2}} \cdot \log_2 \cdot \log x = -1$ je:
A. 0.0001 **B.** 0.01 **C.** 100 **D.** 10 000

M-33. Koliko rješenja u skupu R ima nejednadžba $x^{\log x} < 0.01x^3$?
A. 999 **B.** 899 **C.** 99 **D.** 89

M-34. Kolika je površina jednakokračnog trapeza čije su osnovice 6 dm i 2 dm, a krak zatvara s većom osnovicom kut od $60°$?
A. $4\sqrt{3}$ dm^2 **B.** $6\sqrt{3}$ dm^2 **C.** $8\sqrt{3}$ dm^2 **D.** $10\sqrt{3}$ dm^2

M-35. Ako je volumen tetraedra 9 m^3 tada mu je visina:
A. $3\sqrt{2}$ m **B.** $2\sqrt{3}$ m **C.** $2\sqrt{2}$ m **D.** $3\sqrt{3}$ m

M-36. Ukupna površina dvaju sličnih trokuta je 260 cm^2. Ako im se opsezi odnose kao 2:3 tada je površina manjeg trokuta:
A. 40 cm^2 **B.** 64 cm^2 **C.** 80 cm^2 **D.** 104 cm^2

M-37. Vjerojatnost da u 5 uzastopnih bacanja kocke padne 5 različitih brojeva iznosi:
A. $\dfrac{5}{54}$ **B.** $\dfrac{5}{48}$ **C.** $\dfrac{5}{36}$ **D.** $\dfrac{5}{32}$

M-38. Znamo da je 40% broja A za 3 veće od 30% broja B i da je 60% broja A za 3 manje od 50% broja B. Koliki je broj B?
A. 100 **B.** 150 **C.** 200 **D.** 250

M-39. Glavnica od 2 500 EUR uz godišnji dekurzivni kamatnjak p donese za 3 godine 150 EUR jednostavnih kamata. Kolike bi složene kamate donijela ta glavnica za isto vrijeme uz isti kamatnjak?
A. 153.00 **B.** 150.02 **C.** 153.10 **D.** 153.12

M-40. Osobe A, B i C međusobno dijele iznos od 4 740 kuna. Osoba B dobiva 20% više, a C 20% manje od B. Koji iznos dobiva osoba C?
A. 1 500 **B.** 1 800 **C.** 1 440 **D.** 1 250

Rješenja zadataka

M–1	D	M–2	B	M–3	A	M–4	B
M–5	B	M–6	C	M–7	C	M–8	B
M–9	A	M–10	A	M–11	C	M–12	A
M–13	D	M–14	A	M–15	C	M–16	B
M–17	C	M–18	A	M–19	D	M–20	C
M–21	C	M–22	C	M–23	B	M–24	C
M–25	A	M–26	A	M–27	D	M–28	D
M–29	A	M–30	C	M–31	B	M–32	D
M–33	D	M–34	C	M–35	B	M–36	C
M–37	A	M–38	B	M–39	B	M–40	C

⋆ ⋆ ⋆



Pogledajmo kako izgleda igra u tipičnoj bridž partiji. U oba dijeljenja, kontrakt će biti 3NT. Izvođač je **S**, i pratit ćemo igru iz njegove pozicije. Na stolu su položene karte igrača **N**, a nama su skrivene one u rukama **E** i **W**. Zadatak izvođača jest osvojiti barem 9 štihova u igri bez aduta. Protivnici, koji započinju atakom, imaju cilj osvojiti barem 5 štihova.

	N	
	♠ A Q J 3 ♡ 9 8 ♢ A J 9 ♣ Q 9 4 2	
W ♠ 7 5 4 ♡ K J 6 4 3 ♢ 8 6 5 ♣ K 7		**E** ♠ K 8 6 2 ♡ Q 10 5 ♢ 10 3 2 ♣ 8 5 3
	S ♠ 10 9 ♡ A 7 2 ♢ K Q 7 4 ♣ A J 10 6	

Ataka: ♡4. **E** je stavio damu. Napravimo plan igre.

Možemo prebrojiti sedam visokih štihova: četiri u karonu i po jedan u preostalim trima bojama. Negdje moramo pronaći dva dodatna štiha.

Izvor za dodatne štihove su pik i tref boja. Ako impas (igra dame ili male karte prema dami, dok je as u istoj ruci) u bilo kojoj od tih dviju boja uspije, sigurno ćemo napraviti barem dva dodatna štiha. Međutim, što ako impas ne uspije? Možemo li onda napraviti kontrakt?

Možemo ako primijenimo sigurnosnu igru. Propustit ćemo prva dva kruga herca i uzeti treći herc. Time smo *prekinuli komunikaciju* između igrača obrane. U ovom trenutku **E** više nema herčeva, pa je sigurno igrati impas u pik boji. Iako impas ne uspije, kontrakt ćemo napraviti s tri pik štiha, jednim hercom, četiri karona i jednim trefom.

Pogledajmo sljedeće neznatno modificirane listove:

	N	
	♠ A Q J 3 ♡ 9 8 ♢ A J 9 ♣ Q 9 4 2	
W ♠ 7 5 4 ♡ A 10 7 4 3 ♢ 8 6 5 ♣ K 7		**E** ♠ K 8 6 2 ♡ Q 6 5 ♢ 10 3 2 ♣ 8 5 3
	S ♠ 10 9 ♡ K J 2 ♢ K Q 7 4 ♣ A J 10 6	

Ataka: ♡4.

Nakon iste atake, **E** je stavio damu. Napravimo plan igre.

Imamo isti broj štihova. Pokušamo li primijeniti isti plan i propustimo prvi štih, naš će se kontrakt urušiti sam od sebe. **E** će vratiti herc, a **W** neće odigrati as! Na taj će način on zadržati komunikaciju između igrača obrane! Što god dalje odigrali, morat ćemo dati štih jednom crnom kralju, a protivnik će uz to napraviti još četiri herc štiha.

Zato moramo kraljem uzeti prvi štih. Kako dalje? Postoji siguran način da se kontrakt načini. Sada treba uočiti da naš opasni protivnik nije **W** nego **E**! Ako **E** dođe u štih, odigrat će herc kroz našeg dečka! Ako pak **W** dođe u štih, on ne može uzeti štihove u herc boji.

Zato je plan ovakav: prvi štih uzet ćemo herc kraljem. Prijeći ćemo na stol karo asom i odigrati damu tref. Ako impas uspije, imamo svojih devet štihova. Ako impas ne uspije, tada je na štihu **W** a on nam ne može naškoditi. Dečko herc koji držimo u ruci sigurna je brana. Najbolje što **W** može učiniti jest da vrati pik i ponudi nam da napravimo impas u piku. To svakako treba odbiti. Dakle, uzet ćemo pik asa i zadovoljiti se s naših devet štihova: jedan u piku, jedan u hercu, četiri u karonu i tri u trefu.

Neven Elezović, Zagreb

SADRŽAJ LVII. GODIŠTA

ČLANCI IZ MATEMATIKE

ČLANCI IZ FIZIKE

INFORMATIKA

IZ MOJE RADIONICE I LABORATORIJA

ASTRONOMIJA

ZABAVNA MATEMATIKA

ZADACI I RJEŠENJA

ZANIMLJIVOSTI

NOVOSTI IZ ZNANOSTI

NOVE KNJIGE

KVALIFIKACIJSKI ISPITI

BRIDŽ

NAGRADNI NATJEČAJ

Srednja, dvostruka stranica

Zadnja strana omota

Rješenje nagradnog natječaja br. 177

Rješenje. Npr. $N = 100\ldots00999999899$, $N+1 = 100\ldots00999999900$. Zbroj znamenaka od N je 81, a od $N+1$ je 64.
Knjigom su nagrađeni sljedeći rješavatelji:
1. *Igor Boban* (3), III. gimnazija, Split; 2. *Ervin Duraković* (4), Gimnazija A. Mohorovičića, Rijeka; 3. *Šimun Romić* (3), Gimnazija Metković, Metković.

Riješili zadatke iz br. 2/226

(Broj u zagradi označava razred–godište srednje–osnovne škole.)
a) Iz matematike: *Haris Čaušević* (3), Treća gimnazija, Sarajevo, BiH, 3021, 3022, 3027, 3030, 3031, 3032; *Ervin Duraković* (4), Gimnazija Andrije Mohorovičića, Rijeka 3021, 3027; *Zlatan Tucaković* (8), OŠ Musa Ćazim-Ćatić, Sarajevo, BiH, 3021, 3024; *Vanja Ubović* (1), Gimnazija Petra Preradovića, Virovitica, 3021, 3034; *Mediha Zukić* (4), Gimnazija Visoko, Visoko, BiH, 3021–3027, 3029–3032, 3034.
b) Iz fizike: *Anamarija Birkeš* (7), OŠ Fausta Vrančića, Šibenik, 254–257; *Zlatan Tucaković* (8), OŠ Musa Ćazim-Ćatić, Sarajevo, BiH, 254–257, 1350, 1356; *Gabrijel Guberović* (2), Gimnazija Nova Gradiška, Nova Gradiška, 1350, 1352, 1356; *Josip Maleš* (1), Gimnazija Antuna Vrančića, Šibenik, 1350, 1352; *Vanja Ubović* (1), Gimnazija Petra Preradovića, Virovitica, 1350.

Nagradni natječaj br. 179

Zbroj pozitivnih brojeva x, y i z jednak je 11. Dokaži da je

$$[x]^4 + [y]^4 + [z]^4 \geqslant 243.$$

($[a]$ je najveći cijeli broj koji nije veći od a.)

SVIM SURADNICIMA

U Matematičko–fizičkom listu objavljuju se članci iz matematike, fizike i informatike, s malim prilogom iz astronomije, zadaci i rješenja, prikazi natjecanja i ljetnih škola iz matematike i fizike, zanimljivosti u obliku članaka i zadataka od učenika, profesora i ostalih matematičara, novosti iz znanosti, zadaci s razredbenih (kvalifikacijskih) ispita, zabavna matematika i nagradni natječaj.
Prilozi trebaju biti napisani računalom (Word, Tex, Latex) ili pisaćim strojem sa širokim proredom na formatu A-4. Uz kopiju pošaljite i disketu.
Slike trebaju biti jasno nacrtane na posebnom papiru i pogodne za presnimavanje. Slike crtane računalom (eps, tif, gif, jpg i sl.) pošaljite i na disketi.
Članci neka ne budu dulji od osam stranica, a ako je to potrebno neka budu napisani u nastavcima.
Pozivaju se učenici da pošalju članak o nekoj od spomenutih tema, originalne zadatke s rješenjima ili prikaze nekih manifestacija (ljetne škole, susreti učenika, rad školske grupe).
Kako se rukopisi ne vraćaju, sačuvajte original a pošaljite kopiju na papiru formata A-4.
Svi rukopisi podliježu recenziji redakcije ili neke stručne osobe za određeno područje.
Prilozi se šalju na adresu ovog časopisa koja je na drugoj stranici omota.

RJEŠAVATELJIMA ZADATAKA

Svako rješenje neka bude napisano na **posebnom** papiru (formata A-4 ili A-5) i to samo na **jednoj** strani papira. Uz svako rješenje na vrhu papira treba potpuno ispisati tekst zadatka. Svako rješenje treba čitljivo potpisati (ime i prezime), naznačiti razred, školu i mjesto.